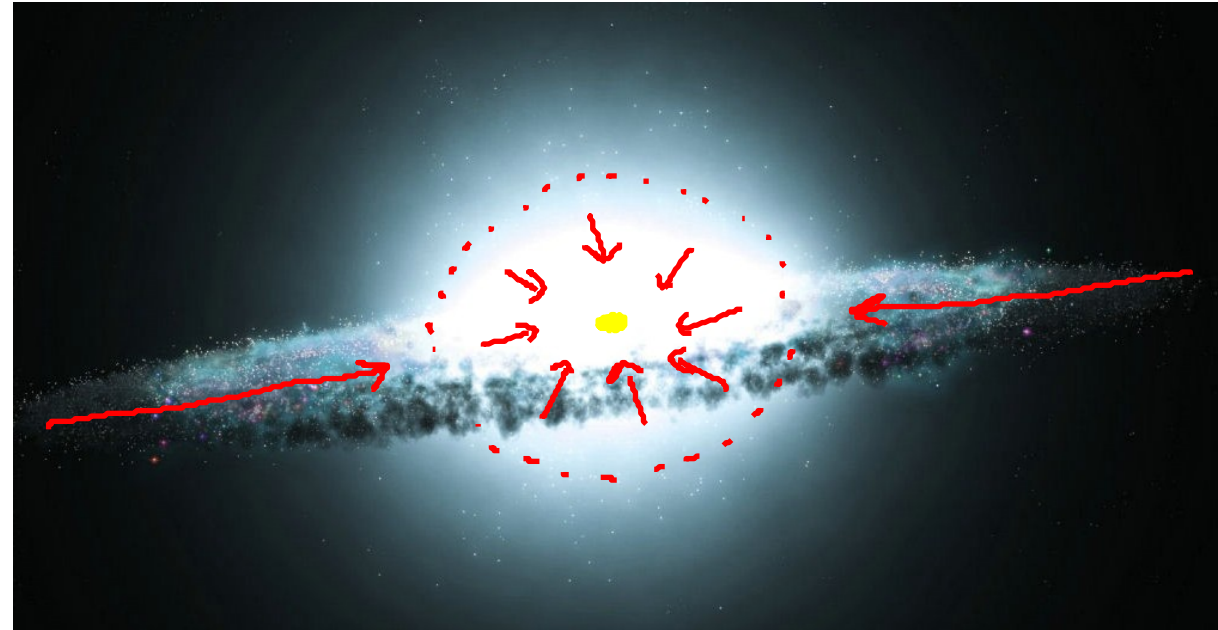


ლექცია #2

სიმეტრიული დინებები

სფერული სიმეტრია

სფერული აკრეცია
სფერული ვარსკვლავური ქარი
სფერული აფეთქება (blast wave)



სფერული დინება:
მოძრაობა სიმძიმის ველში
ბრუნვის გარეშე

ბრუნვა: ბრუნვის ღერძი: ცილინრდული სიმეტრია;

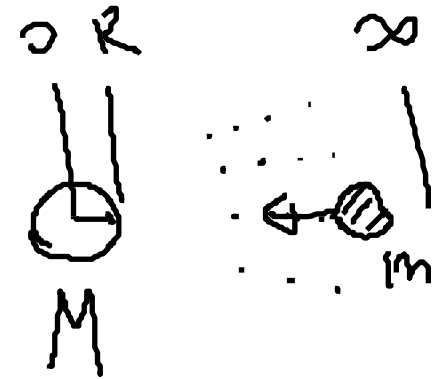
მასიური აკრეციული დისკების
ცენტრალური ნაწილი
პროტოვარსკვლავური აკრეცია



გამოსხივების სიმძლავრე

$$\begin{cases} U_{\infty} = 0 \\ U_R = -\frac{GM\Delta m}{R} \end{cases}$$

$$\Delta U = U_{\infty} - U_R$$



$$L = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{GM}{R} \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

აკრეციის ტემპი (accretion rate):

გამოსხივების სიმძლავრე:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt}$$

$$L = \frac{GM\dot{m}}{R}$$

ბონდის დინება (Bondi accretion)

უწყვეტობის განტოლება სფერულ კოორდინატებში:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) = 0$$

სფერული სიმეტრია: $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

იზოთერმული დინება: $T = \text{const},$

$$\rho = \rho(T, P) : \begin{cases} \rho = \rho(r) \\ P = P(r) \end{cases}$$

ბონდის დინება

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot \rho v_r) = 0$$

სტაციონალური შემთხვევა:

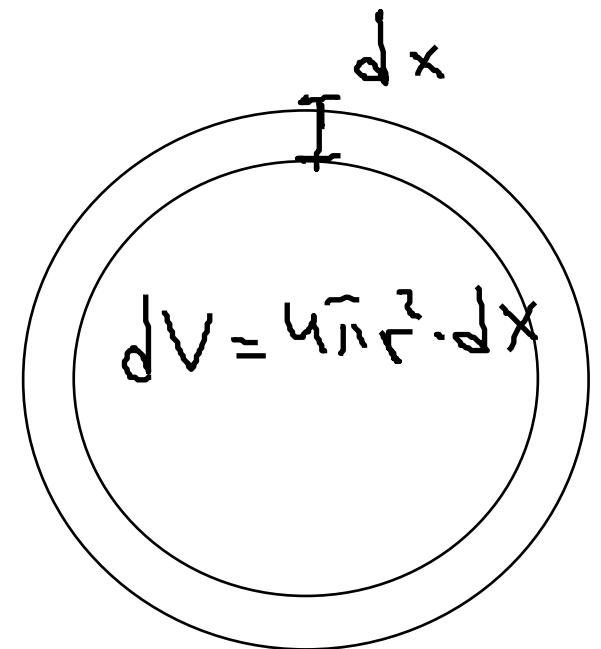
$$\frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

$$(v \neq 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) = 0$$

$$m = \rho V \quad \frac{dm}{dt} \equiv \dot{m} = \rho \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt}$$

$$\dot{m} = \rho \cdot 4\pi r^2 \frac{dx}{dt} = 4\pi r^2 \rho v_r$$



ბონდის დინება

მუდმივი აკრეციის ტემპი: $\frac{\partial}{\partial r}(\dot{m}) = 0, \quad \dot{m} = \text{const}(r)$

მოძრაობის განტოლება (ეილერის განტოლება სფერულ კოორდინატებში).
რადიალური კომპონენტი:

$$\frac{D}{Dt} v_r - \frac{v_\phi^2 + v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r$$

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

ბონდის დინება

სფერულად სიმეტრიული სტაციონალური შემთხვევა: $\frac{\partial}{\partial t} = 0, \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

რადიალური დინება: $\vec{v} = (v_r, v_\varphi, v_\theta); v_\varphi = v_\theta = 0$

$$\frac{D}{Dt} v_r - \frac{v_\varphi^2 + v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r$$

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

ბონდის დინება

$$U_r \frac{\partial}{\partial r} (U_r) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + g_r$$

გრავიტაციული აჩქარება:

$$g_r = -\frac{GM}{r^2}$$

მდგომარეობის განტოლება:

$$P = P(\rho).$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial r}$$

ბგერის სიჩქარე:

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

ბონდის დინება

$$u_r \frac{\partial}{\partial r} (u_r) + \frac{c_s^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (\rho) + \frac{GM}{r^2} = 0.$$

უწყვეტობის განტოლება:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r) = 0,$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + r^2 u_r \frac{\partial}{\partial r} (\rho) = 0,$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = - \frac{1}{r^2 u_r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r),$$

ბონდის დინება

$$U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{c_s^2}{r^2 U_r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U_r) + \frac{GM}{r^2} = 0,$$

$$r^2 \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_r \cdot 2r$$

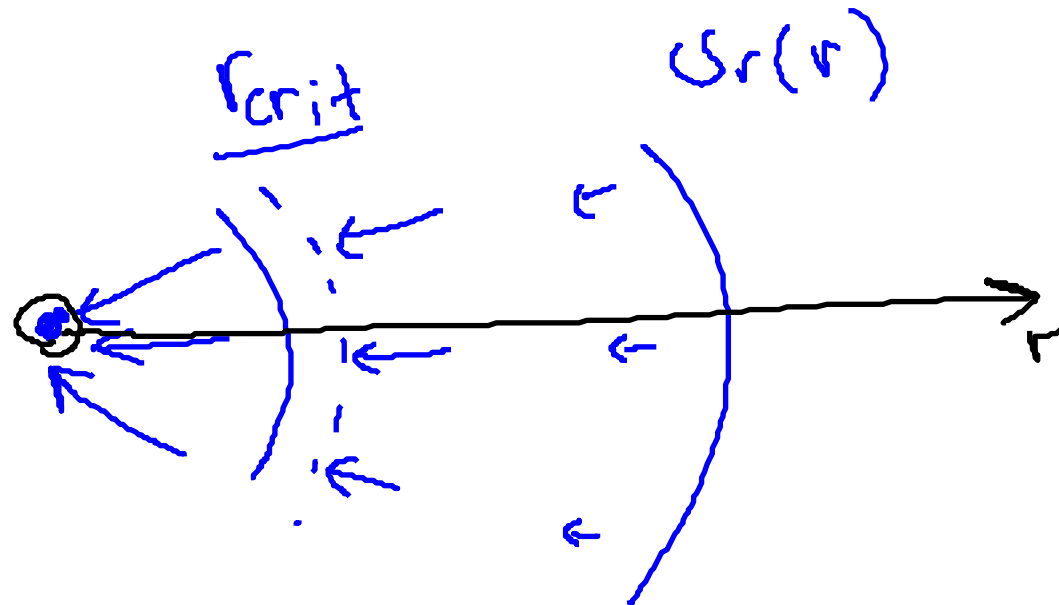
$$U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{c_s^2}{U_r} \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{2c_s^2}{r} + \frac{GM}{r^2} = 0$$

$$\left(1 - \frac{c_s^2}{U_r^2}\right) U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} = - \frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2c_s^2 r}{GM}\right)$$

ბოზდის დინება

$$\left(1 - \frac{C_s^2}{U_r^2}\right) \frac{\partial U_r^2}{\partial r} = - \frac{2GM}{r^2} \left(1 - \frac{2C_s^2 r}{GM}\right)$$

$$r_{cr} = \frac{GM}{2C_s^2} \quad U_r(r_{cr}) = C_s(r_{cr})$$



$$C_s = C_s(r)$$

$$U_r = U_r(r)$$

ამონახსნები

$$\left(1 - \frac{C_s^2}{U_r^2}\right) \frac{\partial U_r^2}{\partial r} = -\frac{2GM}{r^2} \left(1 - \frac{2C_s^2 r}{GM}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_r^2}{C_s^2}\right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\ln \left(\frac{U_r^2}{C_s^2}\right)\right) = -\frac{2GM}{r^2} \left(1 - \frac{2C_s^2 r}{GM}\right) C_s^{-2}$$

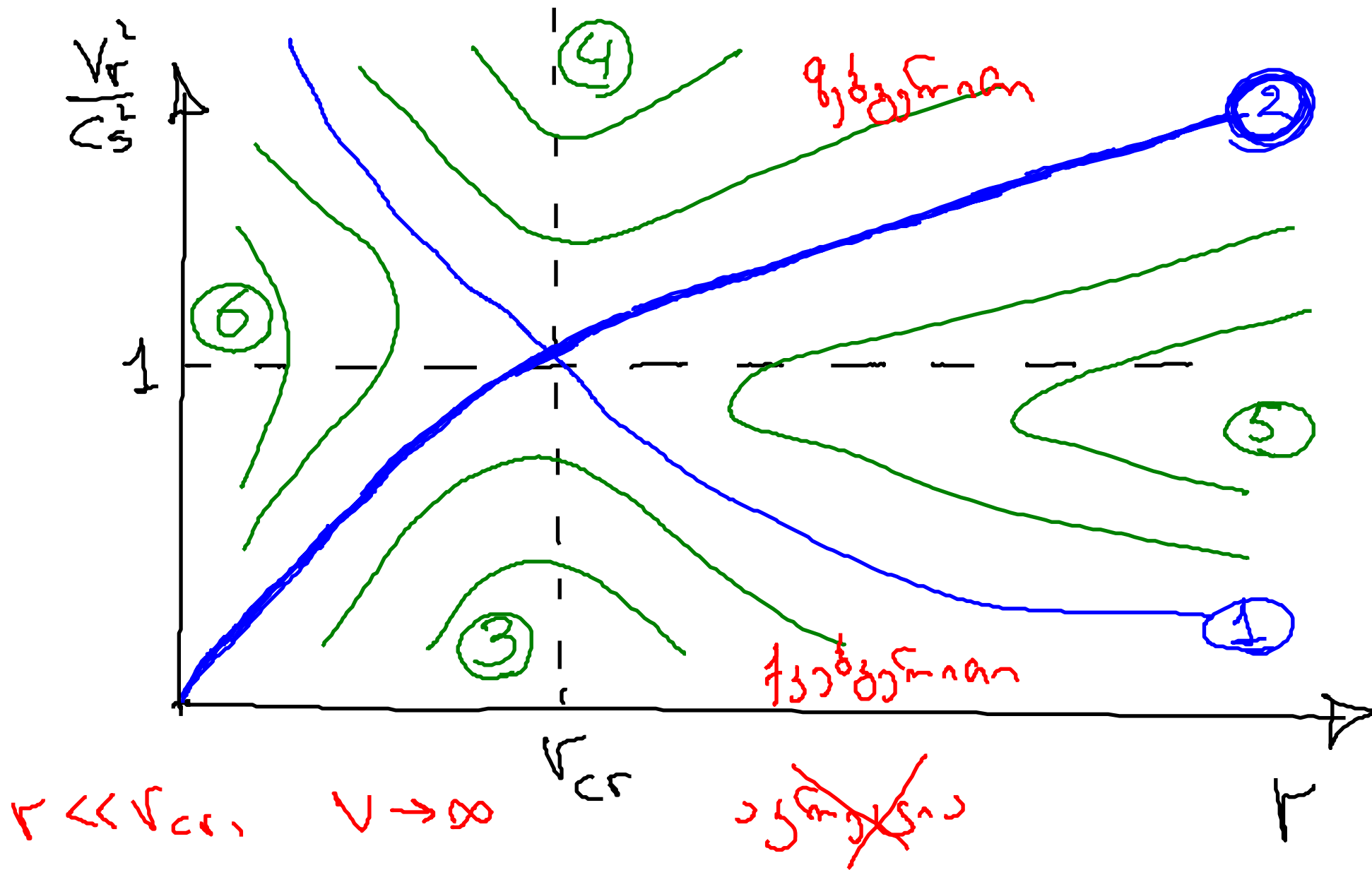
მახის რიცხვი: $\mathcal{M} \equiv \frac{U_r}{C_s}$

იზოთერმული შემთხვევა: $C_s = \text{const.}$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mathcal{M}^2 - \ln \mathcal{M}^2 \right\} = -4 \frac{r_{cr}^2}{r^2} \left(1 - \frac{r}{r_{cr}}\right)$$

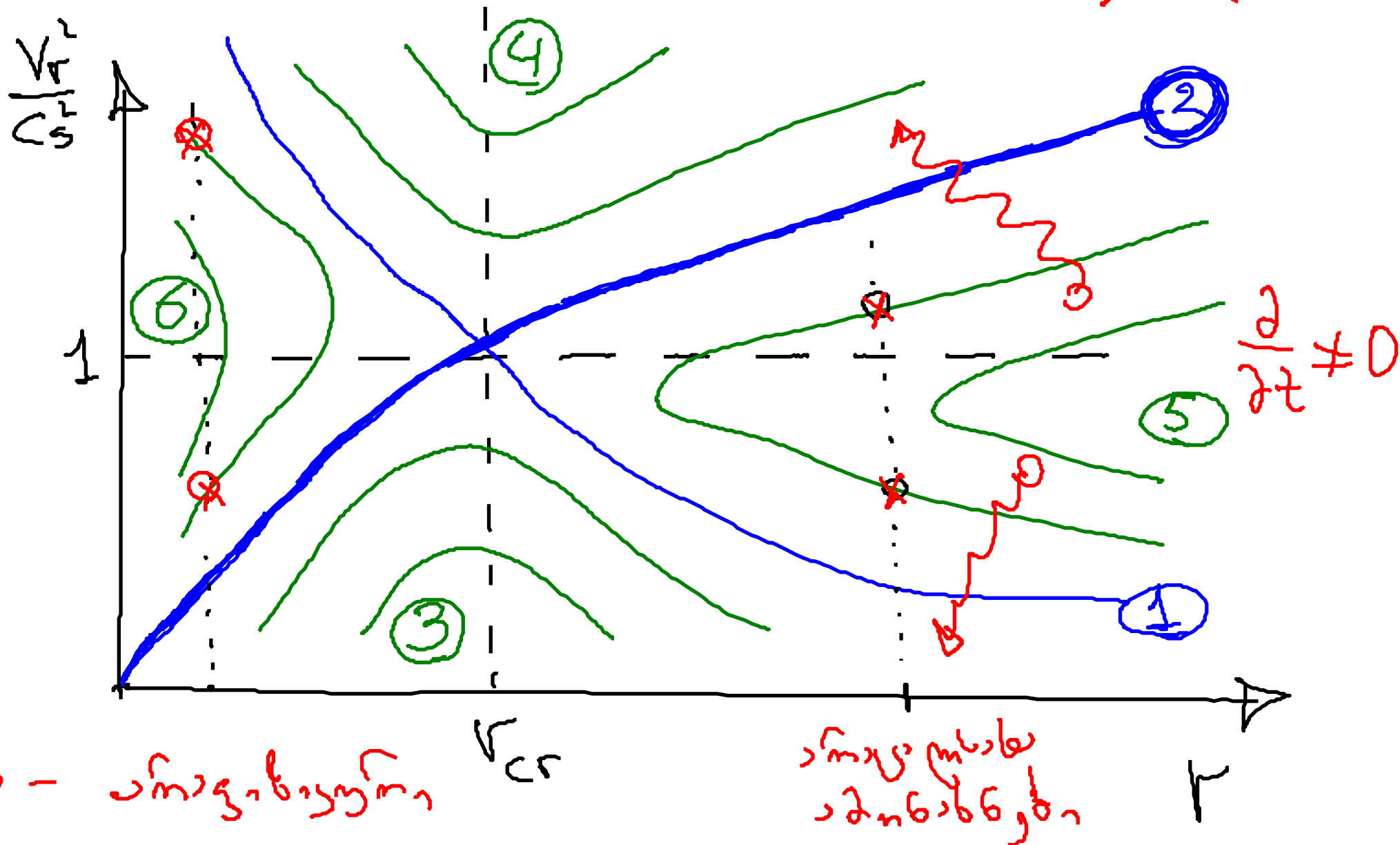
ამონახსნები

3, 4,



ამონახსნები

~~სტრუქტურის~~



5, 6 - ამონახსნები

ამონახსნები
ამონახსნები

ინვარიანტი

მოძრაობის განტოლება:

$$U_r \frac{\partial}{\partial r} (U_r) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + g_r \quad g_r = -\frac{GM}{r^2}$$

უყვეტობის განტოლება:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho U_r) = 0,$$

პოლიტროპული მდგომარეობის განტოლება:

$$P = K \cdot \rho^\gamma$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \gamma K \rho^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\gamma K \rho^{\gamma-2} \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial r} (K \rho^{\gamma-1})$$

$$C_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = K \rho^{\gamma-1} \quad \parallel \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{C_s^2}{\rho} \right)$$

ინვარიანტი

$$U_r \frac{\partial}{\partial r} U_r = - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial r} C_s^2 - \frac{GM}{r^2} \quad \parallel \quad \underline{C_s^2 = C_s^2(r)}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{U_r^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} C_s^2 - \frac{GM}{r} \right\} = 0$$

ბერნულის განზოგადოებული თეორემა.

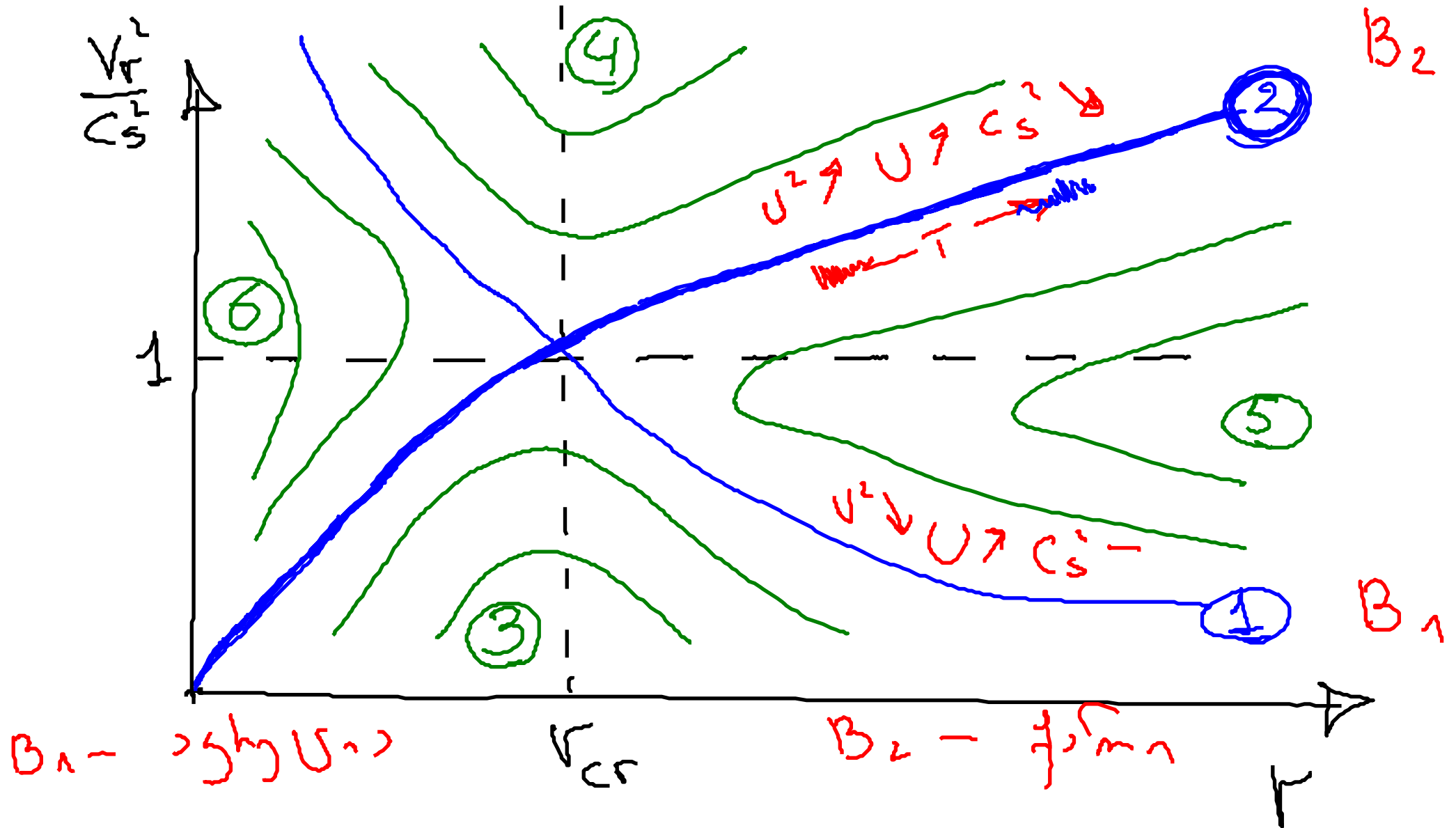
ბერნულის ინტეგრალი:

$$B \equiv \underbrace{\frac{U_r^2}{2}}_{\text{კინეტიკური}} + \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma-1} C_s^2}_{\text{ენთალპია}} - \underbrace{\frac{GM}{r}}_{\text{გრავიტაციული}} = \text{const}$$

$$\frac{U^2}{2} + c_s^2 = \frac{1}{r}$$

ამონახსნები

1, 2



აკრეციის ტემპი

$$r = r_{\infty} : B = \frac{U_{\infty}^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} C_{\infty}^2$$

$$r = r : B = \frac{U_r^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} C_s^2 \Rightarrow \frac{GM}{r}$$

$$\frac{U^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} (C_s^2 - C_{\infty}^2) = \frac{GM}{r}$$

აკრეციის ტემპი

უწყვეტობის განტოლება:

$$\dot{m} = 4\pi r^2 \rho v$$

$$v^2 = \frac{(\dot{m})^2}{16\pi^2 r^4 \rho^2}$$

ქვებგერითი აკრეცია:

$$v(r_{cr}) = C_{cr}$$

აკრეციის ტემპი

$$\frac{U_c^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} U_c^2 - \frac{\gamma}{\gamma-1} C_\infty^2 = \frac{GM}{r} = 2C_{cr}^2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} - 2 = \frac{\gamma-1 + 2\gamma - 4\gamma + 4}{2(\gamma-1)} = \frac{\gamma+3}{2(\gamma-1)}$$

$$\frac{\gamma+3}{2(\gamma-1)} U_{cr}^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} C_\infty^2$$

$$U_{cr}^2 = \frac{2\gamma}{\gamma+3} C_\infty^2$$

აკრეციის ტემპი

$$C_s^2 = K \gamma \rho^{\gamma-1}, \quad \frac{C_{cr}^2}{C_\infty^2} = \frac{2\gamma}{\gamma+3}$$

$$\rho_{cr}^{\gamma-1} = \rho_\infty^{\gamma-1} \cdot \frac{2\gamma}{\gamma+3}$$

$$\rho_{cr} = \rho_\infty \left(\frac{2\gamma}{\gamma+3} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

აკრეციის ტემპი

$$\dot{m} = 4\pi r^2 \rho v = \text{const.}$$

$$\rho_{\text{cr}} v_{\text{cr}} = \rho_{\infty} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+3} \right)^{1/(\gamma-1)} \cdot C_{\text{cr}} \cdot \frac{G^2 M^2}{4 C_{\text{cr}}^4}$$

$$r_{\text{cr}} = \frac{GM}{2C_s^2}$$

$$\dot{m} = \pi \rho_{\infty} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+3} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot G^2 M^2 C_{\text{cr}}^{-3}$$

აკრეციის ტემპი

მაქსიმალური აკრეციის ტემპი

$$\dot{m} = \pi G^2 M^2 \rho_{\infty} C_{\infty}^{-3} \cdot \left(\frac{2\gamma}{\gamma+3} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - \frac{2}{3} \frac{2}{3}$$

$$\dot{m} = \pi G^2 M^2 \frac{\rho_{\infty}}{C_{\infty}^3} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+3} \right)^{\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}}$$

-