



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

P-მოდები დედამიწისა და დედამიწის ტიპის პლანეტების თხევად ბირთვებში

ლუკა ცისკარიშვილი

საბაკალავრო პროგრამა „ფუნდამენტური ფიზიკა“
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

საბაკალავრო ნაშრომის ხელმძღვანელი:
ალექსანდრე თევზაძე
თსუ ასოცირებული პროფესორი

თბილისი, 2013

სარჩევი

ანოტაცია	3
1. შესავალი	4
2. ბრტყელი პარალელური სტრატეფიცირებული გარემო	7
3. პოლიტროპული სტრატეფიკაცია	11
4. P-მოდების ამონახსნები დედამიწის თხევად წიაღში	12
5. დედამიწის შიდა ბირთვის ვიზრაცია: სლიხტერის მოდები	13
6. ამონახსნები სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით	15
7. დასკვნა	19
8. გამოყენებული ლიტერატურა	20

ანოტაცია

საბაკალავრო ნაშრომში განხილულია კუმშვადი აკუსტიკური ტალღების დინამიკა პლანეტების თხევად ბირთვებში. პრტყელი პარალელური სტრატეფიცირებული შრის მაგალითზე შესწავლილია აკუსტიკური P-მოდების დინამიკა წრფივ შემფოთებათა თეორიის გამოყენებით. სიმკვრივის ვერტიკალური სტრატეფიკაცია აღებულია პოლიტროპული კანონით, ხოლო დინამიური განტოლება ამოხსნილია ანალიზურად ბესელის ცილინრული ფუნქციების გამოყენებით. მიღებული ზოგადი ამონახსნი მიყენებულია დედამიწისა და სხვა პლანეტების შიდა თხევადი შრეების მოდელს, როდესაც შრეს ედება ერთმანეთისაგან განსხვავებული ქვედა და ზედა სასაზღვრო პირობა. ზედა სასაზღვრო პირობათ გამოყენებულია მანტიისა და გარე თხევადი გულის საზღვარი, რომელიც განიხილება როგორც მყარი კედელი, ხოლო ქვედა საზღვრით აღებულია პლანეტების შიდა მყარი ბირთვის საზღვარი, რომელიც ოსცილირებს სლიხტერის მოდების მახასიათებელ სიხშირეზე. შესწავლილია როგორც დედამიწის მაგალითი, ასევე მზის სისტემის კლდოვანი პლანეტები - მერკური, ვენერა და მარსი, რომელთა თხევადი ბირთვი დედამიწის მსგავსად მოქცეულია მყარ ქერქსა და მკვრივ ოსცილირებად შიდა ბირთვს შორის. ნაპოვნია პლანეტების P-მოდების მახასიათებელი სიხშირეები და ბირთვის ოსცილაციის სლიხტერის სიხშირეები. განხილულია წარსულში რეზონანსების არსებობის შესაძლებლობა.

P-modes in the liquid cores of the Earth and terrestrial planets

Luka Tsiskarishvili

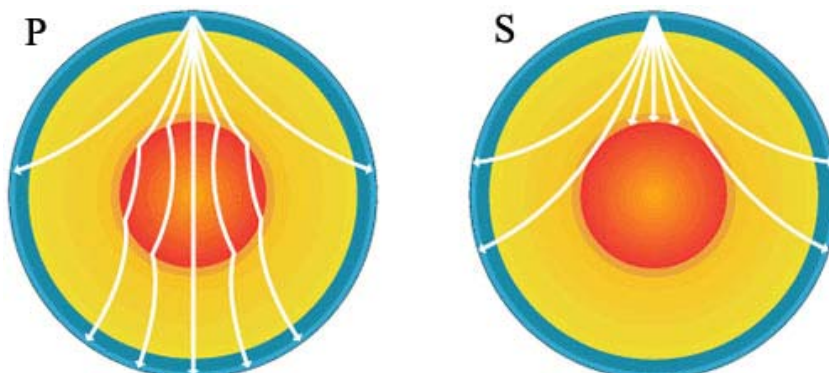
ABSTRACT

BSc thesis presents investigation of the compressible acoustic waves in the liquid cores of the planets. P-mode dynamics is studied in the plane parallel layer using linear perturbation theory. Vertical stratification is taken to be polytropic and the dynamical equation is solved using Bessel cylindrical functions. Obtained general solution is applied to the liquid cores of the planets, where layer is supplied by different upper and bottom boundary conditions. Outer rigid boundary matches the boundary between the mantle and the liquid core, while inner rigid boundary matches outer wall of solid core, which oscillates by Slichter mode frequency. We consider interiors of the Earth, as well as other terrestrial planets: Mercury, Venus and Mars, liquid core of which is constrained between outer mantle and inner solid core. We have found the oscillation frequencies of the planetary P-modes, as well as Slichter modes. Possibility of the resonances in the past is discussed.

1. შესავალი

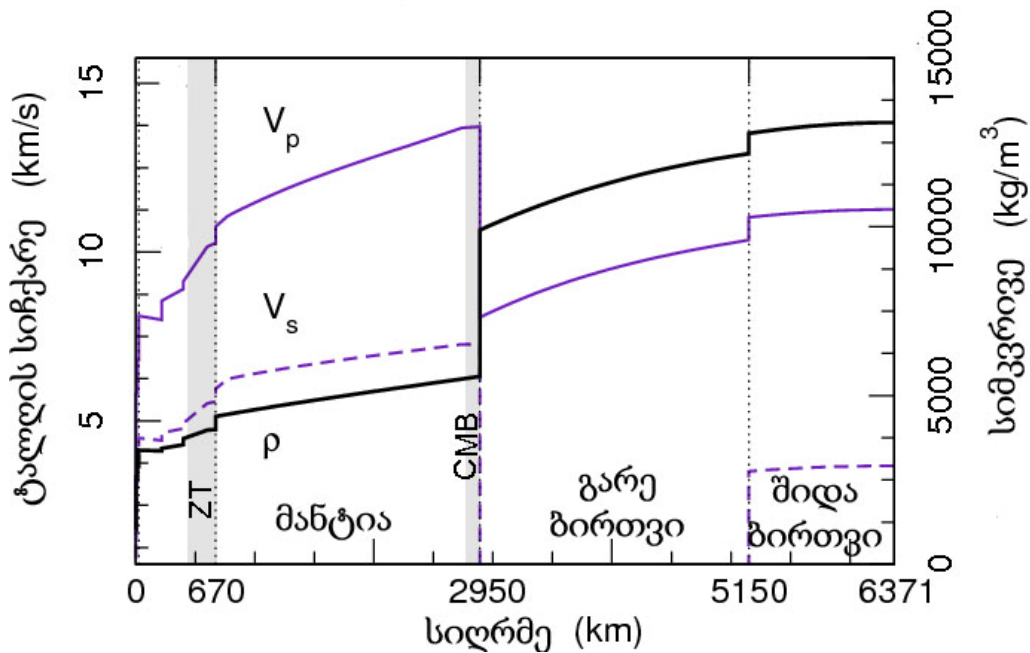
დედამიწის ზედაპირზე ხშირად დაიკვირვება რხევები, რომლებიც მის გულში არსებული სხვადასხვა სეისმური ტიპის ტალღების გამოვლინებაა. ამ ტალღების თვისებები დამოკიდებულია დედამიწის შიდა აგებულებაზე, თერმოდინამიკურ პარამეტრებზე და ასევე ფიზიკურ თვისებებზე. ანალოგიური ტიპის რხევები არსებობენ მზისი სისტემის დედამიწის ტიპის პლანეტებშიც.

სეისმური რხევების აღზნება შესაძლებელია როგორც პლანეტის საკუთარი სეისმური აქტივობით, ასევე გარეშე შეშფოთებებით, ისეთი როგორცაა მაგალითად მცირე ზომის ასტეროიდთან შეჯახება. სეისმური ტალღების შესწავლა საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ დედამიწის შინაგანი სტრუქტურა. დღეისათვის ცნობილი სეისმურ ტალღებს შორის ძირითადი ორი ტიპია P და S მოდები. P-მოდებს უწოდებენ წნევის, ანუ პირველად (primary) მოდებს, რომლებიც წარმოადგენენ გასწვრივ ტალღებს. S-მოდებს უწოდებენ წანაცვლებით (shear) ან მეორად (secondary) მოდებს, რომლებიც წარმოადგენენ განივ ტალღებს. P-მოდების გავრცელებისათვის საჭიროა გარემო იყოს კუმშვადი, ხოლო S-მოდების გავრცელებისათვის საჭიროა, რომ გარემოში არსებობდეს დამაბრუნებელი ძალა. ამ თვისებებზე დაყრდნობით ჩვენ შეგვიძლია შევაფასოთ მოდების გავრცელების არეალი დედამიწის წიაღში: იხილეთ ნახ. 1. P-მოდები ვრცელდებიან დედამიწის მთლიან სიღრმეში, როდესაც S-მოდები ვერ ვრცელდებიან თხევად გარემოში. შესაბამისად დედამიწის თხევად გულში ძირითადად მხოლოდ კუმშვადი P-მოდებია.



ნახ. 1. P და S სეისმური ტალღების გავრცელება დედამიწის წიაღში. კუმშვად, გასწვრივ სწრაფად ოსცილირებად P მოდას შეუძლია შეაღწიოს დედამიწის თხევად ბირთვში, მაშინ როდესაც განივი ნელა მოძრავი S მოდა ვრცელდება მხოლოდ მყარ ზედაპირსა და მანტიაში.

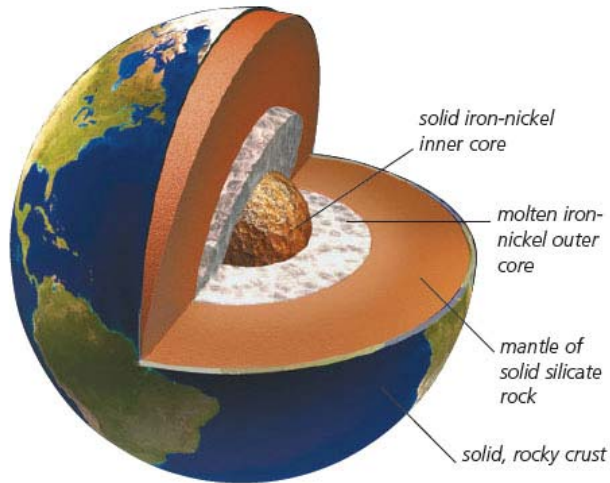
დედამიწის შიდა სტრუქტურა პირობითად შეიძლება გავყოთ ოთხ შრეთ: გარე თხელი ქერქი, მყარი მანტია, გარე თხევადი გული და შიდა მყარი გული: იხილეთ ნახ. 2. ამ შრეებში ფიზიკური თვისებები მნიშვნელოვნად განსხვავებულია. აღსანიშნავია ორი მკვეთრი სიმკვრივის გრადიენტი რომლებიც გამოყოფენ გარე თხევად შრეს მანტიისა და მყარი გულისაგან: იხილეთ ნახ. 3.



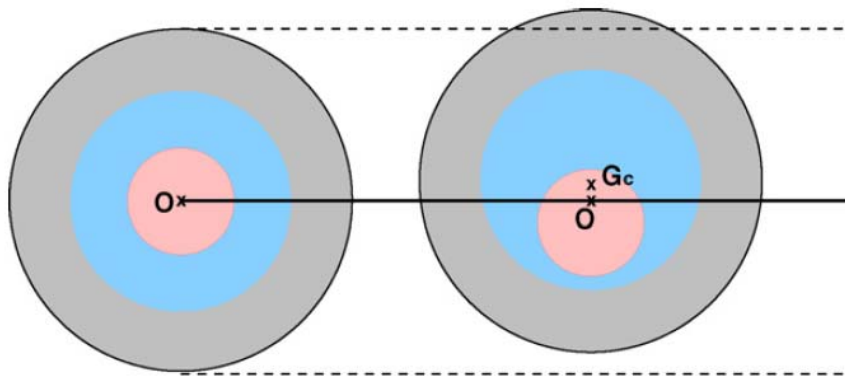
ნახ. 2. დედამიწის შიდა სტრუქტურა. ნაჩვენებია სიმკვრივის, P და S მოდების სიჩქარეების სიღრმეზე დამოკიდებულება.

პლანეტის შიდა მყარი ბირთვი შესაძლებელია ირხეოდეს თხევად გარე შრეში. ამ ტიპის რხევებს სლიხტერის მოდები ეწოდებათ (იხ. ნახ. 4). ამ შემთხვევაში მყარი ბირთვი გადაადგილდება გარე გარსის საწინააღმდეგო მიმართულებით პლანეტის სიმძიმის ცენტრის ცვლილების გარეშე. გარე თხევადი ბირთის საკუთარი სიხშირეები დამოკიდებულია შრის გეომეტრიულ პარამეტრებზე და მის სიმკვრივის სტრატეფიკაციაზე. მეორეს მხრივ ეს რხევები განიცდიან შიდა გულიდან სლიხტერის ოსცილაციებს როგორც გარეშე ძალას.

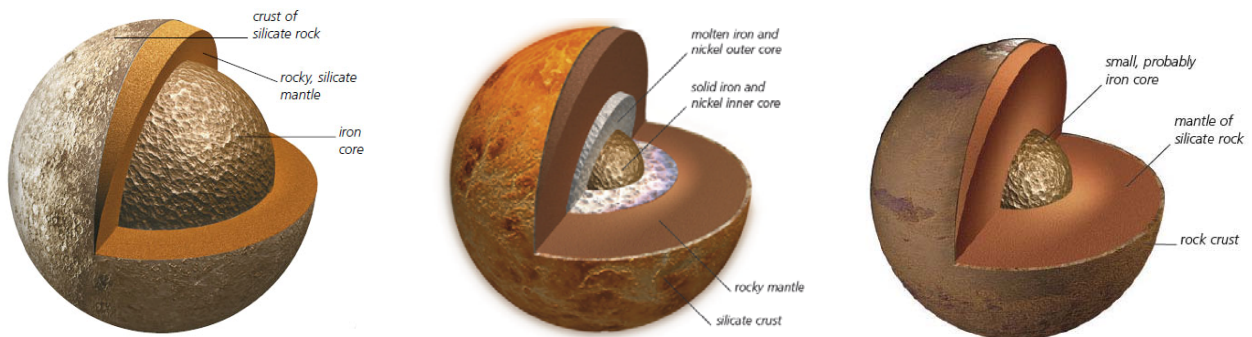
დედამიწის მსგავსი შიდა აგებულება აქვთ დედამიწის ტიპის კლდოვან პლანეტებს (იხ. ნახ. 5-7). ამ შემთხვევაში განსხვავებულია თხევადი შრის სიღრმე და სიმკვრივე, რაც გამოიწვევს საკუთარი სიხშირეების და სლიხტერის მოდების სიხშირეების განსხვავებულ მნიშვნელობებს.



ნახ. 3. დედამიწის შიდა სტრუქტურა. განსხვავებულ ფერებში შეიძლება ქერქის, მანტიის გარე თხევადი და შიდა მყარი შრის გარჩევა.



ნახ. 4. სლიბტერის მოდეები. დედამიწის შიდა მყარი ბირთვი სლიბტერის მოდების სიხშირით ოსცილირებს მის გარშემო მყოფ გარე თხევად ბირთვში. (Greff-Lefitz, Legros 2007).



ნახ. 5. მარცხნიდან მარჯვნივ: მერკურის, ვენერას და მარსის შინაგანი სტრუქტურა. ყველაზე დიდი ზომის შიდა თხევადი გული გააჩნია ყველაზე ცხელ კლდოვან პლანეტას - მერკურის.

2. ბრტყელი პარალელური სტრატეფიცირებული გარემო

სისტემის დინამიკის შესასწავლად ვიყენებთ უწყვეტობისა და ჰიდროდინამიკური მოძრაობის განტოლებას სიბლანტის გათვალისწინების გარეშე გარეშე გრავიტაციულ ველში:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}$$

წონასწორულ მდგომარეობად ავიღებთ სტატიკური ვერტიკალურად არაერთგვაროვანი სტრატეფიცირებული გარემო:

$$\mathbf{V}_0 = 0$$

$$P_0 = P_0(z)$$

$$\rho_0 = \rho_0(z)$$

ამ შემთხვევაში სტაციონალური ვერტიკალური წონასწორობის პირობა მიიღება შემდეგი სახით:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} = 0$$

რხევების დინამიკის შესასწავლად გამოვიყენოთ წრფივ შემფოთებათა ანლიზი. ამ შემთხვევაში ფიზიკურ სიდიდეებს ვყოფთ წონასწორულ და შემფოთებულ ნაწილებად:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}'$$

$$P = P_0 + P'$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

წონასწორული განაწილების პირობის გამოყენებით და არაწრფივი წევრების უგულვებელყოფით შესაძლებელია წრფივ შემფოთებათა დინამიკის აღმწერი განტოლებების მიღება:

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}' = -\nabla P'$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho' + \rho_0 \nabla \mathbf{V}' = 0.$$

ვერტიკალური სტრატეფიკაციის პარამეტრისათვის შემოვიყვანოთ პარამეტრი A:

$$A = \frac{1}{\rho} \nabla \rho - \frac{1}{\gamma p} \nabla p. \quad (2.1)$$

რადგან შემუშვოთებელ გარემოში სიმკვრივე და წნევა დამოკიდებულია მხოლოდ z კომპონენტზე, (2.1)–დან მივიღებთ:

$$A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{1}{\gamma p} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (2.2)$$

$$N^2 = -gA.$$

ჰორიზონტალურად სტრატეფიცირებულ გარემოში, სადაც გრავიტაციული კონსტანტა $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, სიმკვრივისა და წნევის დამოკიდებულება მოიცემა ფორმულით:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (2.3)$$

ავიღოთ უწყვეტობის განტოლება ზოგადი სახით

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \nabla \mathbf{V} + \mathbf{V} \nabla \rho = 0$$

და გადავწეროთ დროში ცვალებადი წრფივი შემფოთებებისათვის:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho' + \mathbf{V} \nabla \rho_0 + \rho_0 \nabla \mathbf{V} = 0. \quad (2.5)$$

ასევე ავიღოთ ეილერის განტოლება ზოგადი სახით

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (2.6)$$

ეილერის განტოლება შემფოთებული სახით:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} = \frac{\rho'}{\rho^2} \nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p' \quad (2.7)$$

აქ ვთვლით, რომ გრავიტაციული აჩქარების შემფოთება ნულია: $g' = 0$.

გავშალოთ წრფივი შემფოთებები ფურიე სპექტრად:

$$p' \propto \exp(i(\omega t - k_x x - k_y y)) \quad (2.8)$$

ამგვარი გარდაქმნის შემდეგ ჰორიზონტალური კოორდინატები გარდაიქმნებიან ტალღურ რიცხვებად:

$$p' = p'(z; \omega, k_x, k_y)$$

თუ ამ გარდაქმნას გავითვალისწინებთ (2.5)–ში, მივიღებთ შემდეგს:

$$i\omega\rho' + V_z \frac{\partial\rho'}{\partial z} + \rho' \left(-ik_x V_x - ik_y V_y + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.10)$$

ასევე (2.7) სამი კომპონენტისთვის მიიღებს სახეს:

$$i\omega V_x = \frac{1}{\rho_0} ik_x \nabla p' \quad (2.11)$$

$$i\omega V_y = \frac{1}{\rho_0} ik_y \nabla p' \quad (2.12)$$

$$i\omega V_z = \frac{\rho'}{\rho^2} ik_z P_0 - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P'}{\partial z} \quad (2.13)$$

გავითვალისწინოთ სიმკვრივისა და წნევის შემფოთებების ურთიერთდამოკიდებულება

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) + \mathbf{V} \nabla \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (5.14)$$

შემფოთებების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{\rho^\gamma} \frac{\partial P'}{\partial t} + \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \frac{1}{\rho^\gamma} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \right) = 0 \quad (2.15)$$

ფურცს გარდაქმნების გათვალისწინებით

$$i\omega P' + i\omega \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \rho' + \rho^\gamma V_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \right) = 0 \quad (2.16)$$

წნევის შემფოთების ნორმირებისათვის შემოვიყვანოთ ახალი ცვლადი: $h' = \frac{p'}{\rho}$.

შესაბამისად (2.11) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$V_x = \frac{k_x h'}{\omega} \quad (2.17)$$

ხოლო (2.12)–ისთვის გვექნება:

$$V_y = \frac{k_y h'}{\omega} \quad (2.18)$$

ჩავსვათ ჰორიზონტალური სიჩქარეების მნიშვნელობები (5.10)–ში

$$i\omega \frac{\rho'}{\rho} + V_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{i(k_x^2 + k_y^2)}{\omega} h' = 0 \quad , \quad (2.19)$$

ხოლო (2.13)–ში P' შევცვალოთ h' –ით

$$i\omega V_z = \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{\partial P_0}{\partial z} - \frac{h'}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial z} - \frac{\partial h'}{\partial z} \quad (2.20)$$

ასევე (5.16)–ში

$$\frac{\gamma P_0}{\rho_0} \frac{\rho'}{\rho} = h' - V_z \frac{i\rho^{\gamma-1}}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) \quad (2.21)$$

მივიღეთ სამი განტოლება სამი ცვლადით: $\frac{\rho'}{\rho}$, h' და V_z . განტოლება (2.21) არ შეიცავს

წარმოებულს. ამიტომ, ჩვენ შეგვიძლია გამოვსახოთ $\frac{\rho'}{\rho}$ და ჩავსვათ (2.20)–ში

$$\frac{\gamma P_0}{\rho_0} \frac{\partial h'}{\partial z} - \rho^{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) h' = -iV_z \left(\omega \frac{\gamma P_0}{\rho_0} - g \rho^{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) \right) \quad (2.22)$$

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.23)$$

დავწეროთ A სხვა ფორმით:

$$A = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \right) \frac{\rho_0^\gamma}{\rho_0} \quad (2.24)$$

და ჩავსვათ (5.22)–ში

$$\frac{\partial h'}{\partial z} + Ah' = -iV_z \left(\omega + \frac{Ag}{\omega} \right) \quad (2.25)$$

დავწეროთ (2.21) ასეთი ფორმით

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} h' + \frac{iV_z A}{\omega} \quad (5.26)$$

ასევე გადავწეროთ (2.19) შემდეგი ფორმით

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{g}{c_s^2} V_z + ih' \left(\frac{\omega}{c_s^2} - \frac{k_p^2}{\omega} \right) = 0 \quad (2.27)$$

სადაც

$$k_p^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (2.28)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$V_z = i\omega\xi_z \quad (2.29)$$

ახლა კი მივცეთ განტოლებებს საბოლოო ფორმა

$$\frac{\partial \xi_z}{\partial z} - \frac{g}{c_s^2} \xi_z + \frac{1}{c_s^2} \left(1 - \frac{k_p^2 c_s^2}{\omega^2} \right) = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial z} + \frac{N^2}{g} h' + (N^2 - \omega^2) \xi_z = 0 \quad (2.31)$$

მიღებული განტოლებები აღწერენ რხევებს ვერტიკალურად სტრატოფიციურულ გარემოში სტრატოფიკაციისა და ზგერის სიჩქარის ზოგადი მნიშვნელობებისათვის. თერმოდინამიკური პარამეტრების კონკრეტული მნიშვნელობები შეიძლება გამოვითვალოთ პლანეტების მოდელების გამოყენებით.

3. პოლიტროპული სტრატოფიკაცია

პლანეტების გულში სტრატოფიკაციის აღსაწერად გამოვიყენოთ სიმკვრივის და წნევის პოლიტროპული მდგომარეობის განტოლება:

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{m}} \quad (3.1)$$

(3.1)-ის ვერტიკალური წონასწორობის პირობაში ჩასმით მივიღებთ

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g . \quad (3.2)$$

მიღებული განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნი მოგვცემს სიმკვრივის ვერტიკალური პროფილს პლანეტის თხევად ბირთვში:

$$\rho(z) = \left(\frac{g}{(m+1)K} \right)^m (-z)^m \quad (3.3)$$

თერმოდინამიკური პარამეტრებისათვის ვერტიკალური კოორდინატის გადანომვრის შემდეგ მივიღებთ შემდეგ განაწილებას:

$$\begin{aligned}x &= -z \\ \rho &\propto x^m \\ P &\propto x^{m+1} \\ T &\propto x\end{aligned}$$

სიმკვრივისა და წნევის მნიშვნელობების ჩასმით ბგერის სიჩქარის ფორმულაში ვიღებთ:

$$c_s^2 = \frac{\gamma g}{m+1} x \quad (3.4)$$

მათი ჩასმით (2.24) ფორმულაში კი მივიღებთ:

$$\frac{N^2}{g} = \frac{(\gamma-1)m-1}{\gamma x} \quad (3.5)$$

მიღებულია თერმოდინამიკური პარამეტრების კონკრეტული მნიშვნელობები, რომელთა გამოყენებით შესაძლებელია p-მოდების დინამიკური განტოლების კონკრეტული ფორმის მიღება.

4. P-მოდების ამონახსნები დედამიწის თხევად წიაღში

თუ ჩავთვლით რომ $k_p = 0$, მაშინ (2.30) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$c_s^2 \frac{\partial \xi_z}{\partial x} - g \xi_z + h' = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{N^2}{g} h' + (N^2 - \omega^2) \xi_z = 0 \quad (4.2)$$

(4.1)–იდან გამოვსახოთ h' და ჩავსვათ (4.2)–ში

$$c_s^2 \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} + \gamma g \frac{\partial \xi_z}{\partial x} + \omega^2 \xi_z = 0 \quad (4.3)$$

მიღებულია ცილინდრული ტიპის დიფერენციალური განტოლება. რადგანაც ბგერის სიჩქარე დამოკიდებულია ვერტიკალურ კოორდინატზე სასარგებლოა ამოცანის მახასიათებელი დროითი მასშტაბის შემოყვანა:

$$\tau = \int_0^x \frac{dx}{c_s} \quad (4.4)$$

(2.47)–იდან გამოვსახოთ x

$$x = \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma g}{m+1} \right) \tau^2 \quad (4.5)$$

და ჩავსვათ (4.4)–ში

$$\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial \tau^2} + \frac{2m+1}{\tau} \frac{\partial \xi_z}{\partial \tau} + \omega^2 \xi_z = 0 \quad (4.5)$$

ამ განტოლების ამონახსნია ბესელის ფუნქცია

$$\xi_z = \tau^{-m} (C_1 J_m(\omega\tau) + C_2 J_{-m}(\omega\tau)) \quad (4.6)$$

საჭიროა დედამიწის ტიპის (კლდოვანი) პლანეტების შემთხვევაში ამონახსნზე ქვედა და ზედა სასაზღვრო პირობების დადება.

5. დედამიწის შიდა ბირთვის ვიბრაცია: სლიხტერის მოდელები

სლიხტერის მოდელების აღსაწერად ვიყენებთ Greff-Leffitz, Legros (2007)–ში მოცემულ მოდელს, როდესაც შიდა მყარი ბირთვის რხევის სიხშირის განსაზღვრა შესაძლებელია კლდოვანი პლანეტის სამ-ზონოვან მოდელზე დაყრდნობით. ორი დამხმარე მასის განსაზღვრების შემდეგ:

$$M = \frac{4\pi}{3} (\rho_1 R_1^3 + \rho_2 (R_2^3 - R_1^3) + \rho_3 (R_3^3 - R_2^3)) \quad (5.1)$$

$$m = \frac{4\pi}{3} (\rho_1 - \rho_2) R_1^3 \quad (5.2)$$

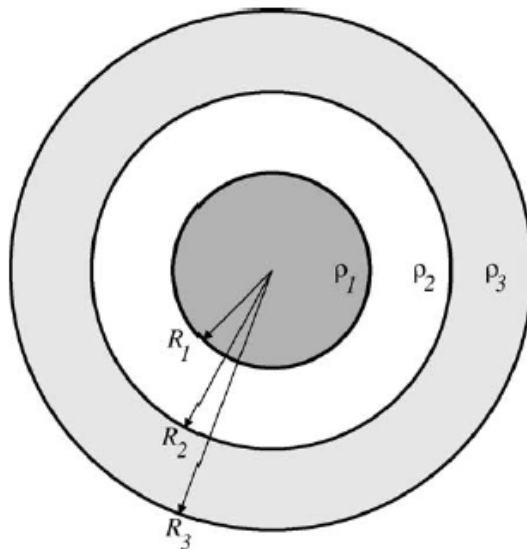
შესაძლებელია სლიხტერის სიხშირის გამოთვლა შემდეგი ფორმით:

$$\omega^2 = \frac{4\pi}{3} G \rho_2 \frac{(\rho_1 - \rho_2)(R_2^3 - R_1^3)}{\frac{3}{2} \rho_2 R_2^3 + (\rho_1 - \rho_2)(R_2^3 - R_1^3) \left(1 - \frac{m}{M}\right)}. \quad (5.3)$$

აღსანიშნავია, რომ მცირე მასის მყარი ბირთის პლანეტებისათვის სამართლიანია გამარტივებული ფორმულაც:

$$\omega_{m \ll M}^2 = \frac{4\pi}{3} G \rho_2 \frac{(\rho_1 - \rho_2)(R_2^3 - R_1^3)}{\frac{3}{2} \rho_2 R_2^3 + (\rho_1 - \rho_2)(R_2^3 - R_1^3)} \quad (5.4)$$

პლანეტების სამ-შროვანი მოდელის პარამეტრები სხვადასხვა პლანეტებისათვის მოცემულია ცხრილ 1-ში. მნიშვნელობები მოცემულია ცდომილების მითითების გარეშე. ბუნებრივია, დედამიწის შემთხვევაში დაკვირვებითი მასალის სიუხვის გამო მოდელის პარამეტრების ცდომილება მნიშვნელოვნად ნაკლებია მზის სისტემის სხვა პლანეტების მოდელებთან შედარებით.



ნახაზი 6. დედამიწის ტიპის კლდოვანი პლანეტების სამ შროვანი მოდელის შიდა სფეროების პარამეტრები.

პლანეტა \პარამეტრები	შიდა ბირთვის რადიუსი, R ₁ (კმ)	ბირთვის რადიუსი, R ₂ (კმ)	პლანეტის რადიუსი, R ₃ (კმ)	საშუალო სიმკვრივე (კგ/მ ³)	შიდა ბირთვის სიმკვრივე, ρ ₁ (კგ/მ ³)	გარე ბირთვის სიმკვრივე, ρ ₂ (კგ/მ ³)	მანტიის სიმკვრივე, ρ ₃ (კგ/მ ³)
მერკური	1 700	1 800	2 400	5.43	9 500	8000	3 000
ვენერა	2 000	5 250	6 052	5.24	12 000	6 000	3 000
დედამიწა	1 220	3 490	6 370	5.52	13 000	12000	4 500
მარსი	1540	2 190	3 390	3.94	7 000	4000	3 500

ცხრილი 1. მზის სისტემის კლდოვანი პლანეტების პარამეტრები სამ-შროვანი მოდელის მოიხედვით.

პლანეტა\პარამეტრები	m (კგ)	M (კგ)	ω (წმ ⁻¹)
მერკური	3.09×10^{22}	3.27×10^{23}	2.08×10^{-4}
ვენერა	2.01×10^{22}	4.8×10^{24}	8.07×10^{-4}
დედამიწა	7.60×10^{21}	6.22×10^{24}	4.11×10^{-4}
მარსი	4.59×10^{22}	6.39×10^{23}	5.24×10^{-4}

ცხრილი 2. დამხმარე მასები და სლიხტერის მოდის სიხშირეები დედამიწისა და დედამიწის ტიპის პლანეტებისათვის.

ცხრილ 1-ში აღებული მოდელოური პარამეტრებისა და სლიხტერის სიხშირის ანალიზური ფორმის გამოყენებით შესაძლებელია სხვადასხვა პლანეტის მყარი ბირთვის რხევის სიხშირის განსაზღვრა. შედეგები მოცემულია ცხრილ 2-ში.

6. ამოხსნები სასაზღვრო პირობების გათალისწინებით

განვიხილოთ ბესელის ფუნქციის ამონახსნი სითხის ზედა საზღვარზე, მანტიისა და თხევადი გულის შეხების არეში. მანტია განვიხილოთ დრეკადი კედლის სახით. ამ შემთხვევაში როდესაც $\tau \rightarrow 0$, ბესელის ფუნქციის ასიმპტოტიკური მნიშვნელობისათვის

$$J_m(\tau) \approx \tau^m \quad (6.1)$$

ხოლო ზოგადი ამონახსნი მიიღებს ხარისხობრივ ფორმას:

$$\xi_z = \tau^{-m} (C_1 (\omega\tau)^m + C_2 (\omega\tau)^{-m}) \quad (6.2)$$

ანუ

$$\xi_z = \tau^{-m} (C_1 \omega^m + C_2 \omega^{-m} \tau^{-2m}) . \quad (6.3)$$

იმისთვის რათა ამ განტოლებას ჰქონდეს სასრული ამონახსნი, ზედა საზღვარზე უნდა შესრულდეს პირობა: $C_1 \neq 0$ და $C_2 = 0$. შესაბამისად დაზუსტდა ორი თავისუფალი პარამეტრიდან ერთ-ერთი და P-მოდების რხევის აღმწერი ამონახსნი ზოგადი ფორმით მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\xi_z = C_1 \tau^{-m} J_m(\omega\tau) \quad (6.4)$$

განვიხილოთ მიღებული ბესელის ფუნქცია სითხის ქვედა საზღვარზე $x = H$ სადაც H გარე შრის სისქეა.

შემოვიყვანოთ დროითი მასშტაბი რომელიც სჭირდება ზგერას თხევადი გულის სისქის გასავლეღად:

$$\tau_H = \int_0^H \frac{dx}{c_s} \tag{6.5}$$

ზგერის სიქარის განაწილების პოლიტროპული მოდეღის გამოყენებით შესაძლებელია ამ ინტეგრალის კონკრეტული ინტეგრალის გამოთვლა:

$$\tau_H = \left(\frac{4H(m+1)}{\gamma g} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{6.6}$$

სადაც $H=R_2-R_1$ გრავიტაციული აქარების გამოსათვლეღად ვაინტეგროთ სამ-შროვანი მუდმივი სიმკვრივეების მოდეღი და ვაინტეგროთ გრავიტაციული აქარების მნიშვნეღობა თხევად გარე შრეში:

$$\bar{g} = \frac{1}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} \frac{GM(r)}{r^2} dr + g_0, \tag{6.7}$$

სადაც

$$M(r) = \frac{4\pi r}{3} \rho_2 \tag{6.8}$$

და შიდა ბირთვში განსხვავებული სიმკვრივით გამოწვეული ნამატი წვერი:

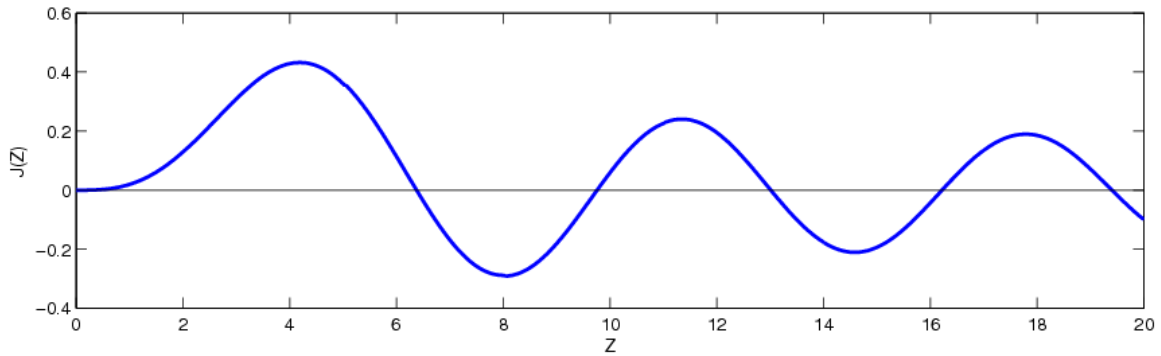
$$g_0 = \frac{GM_0}{R_1^2} = \frac{4\pi}{3} GR_1 (\rho_1 - \rho_2). \tag{6.9}$$

შედეგად მივიღებთ მუდმივი გრავიტაციული აქარების ანალიზურ ფორმას:

$$\bar{g} = \frac{4\pi}{3} GR_1 (\rho_1 - \rho_2) + \frac{2\pi}{3} G(R_2 + R_1) \rho_2. \tag{6.10}$$

პლანეტა	H (კმ)	τ_H 10 ³ (წმ)	\bar{g} (მ/წმ ²)
მერკური	100	0.455	4.63
ვენერა	3250	1.82	9.43
დედამიწა	2270	1.63	8.24
მარსი	650	1.36	3.37

ცხრიღი 3. პლანეტების თხევადი გარე ბირთვების სიგანე, ზგერის გასვღის მახასიათებელი დრო და სფერულ შრეში გრავიტაციული აქარების კოეფიციენტის საშუალო მნიშვნეღობა.



ნახაზი 7. ბესელის ფუნქცია $J_3(Z)$ და მისი ნულები პირველი ოთხი ნული: $Z_i = 6.4, 9.74, 13.05, 16.21$.

ცხრილი 3-ში მოცემულია ზემოთ აღნიშნული პარამეტრების კონკრეტული მნიშვნელობები. ქვედა მყარი საზღვრის პირობა გვაძლევს ბესელის ფუნქციის ნულთან ტოლობის განტოლებას:

$$J_m(Z) = 0, \tag{6.11}$$

რომელსაც ამონახსნების სერია გააჩნია: $Z = Z_i, i=0,1,2,3, \dots$

კლდოვანი პლანეტების შედა სტრუქტურის მოდელირებისათვის ვიენებთ პოლიტროპულ ინდექსს $m=3$, და ვიღებთ განტოლებას: , რომლის ამოხსნებიც ნახ. 7-ზეა მოცემული.

P-მოდების საკუთარი სიხშირეების გამოთვლა შესაძლებელია შემდეგი განტოლების ამოხსნით:

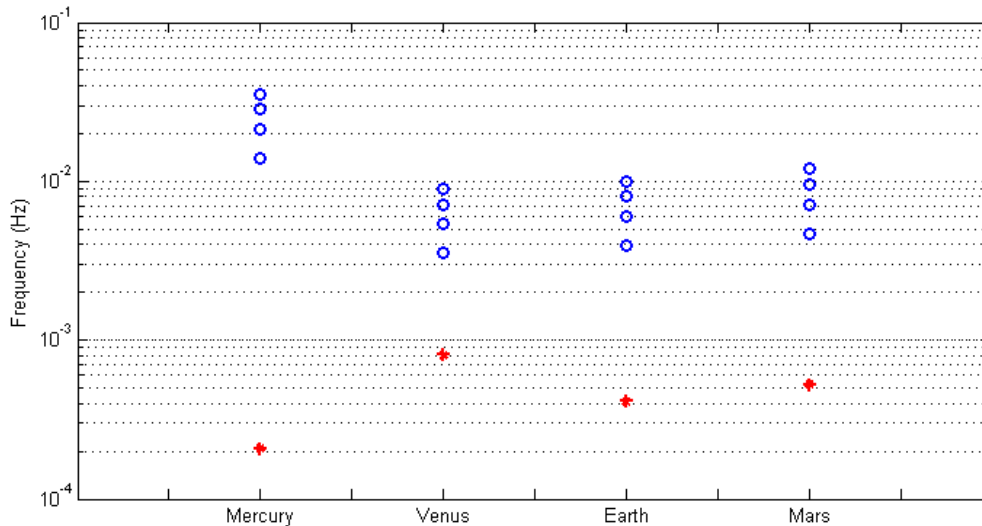
$$\omega_i = \frac{z_i}{\tau_H}. \tag{6.12}$$

ბესელის ფუნქციის ამონახსნების რიცხვითი მწკრივის გამოყენებით (იხ. ნახ. 7) ჩვენ მივიღებთ გარე ბირთვის ვიბრაციების საკუთარი სიხშირეების მწკრივს დედამიწისათვის:

$$\omega_i = 0.0039, 0.0060, 0.0080, 0.01, \dots \text{ (ჰც)}.$$

პლანეტა	ω_1 (წმ ⁻¹)	ω_2 (წმ ⁻¹)	ω_3 (წმ ⁻¹)	ω_4 (წმ ⁻¹)	ω_{sl} (წმ ⁻¹)
მერკური	0.0140	0.0214	0.0286	0.0356	2.08×10^{-4}
ვენერა	0.0035	0.0054	0.0072	0.0089	8.07×10^{-4}
დედამიწა	0.0039	0.0060	0.0080	0.0100	4.11×10^{-4}
მარსი	0.0047	0.0072	0.0096	0.0119	5.24×10^{-4}

ცხრილი 4. დედამიწასა და მზის სისტემის კლდოვანი პლანეტების P-მოდების პირველი სამი ფუნდამენტური სიხშირე და სლიხტერის მოდების სიხშირე. დღევანდელი მონაცემებით ეს ორი სიხშირე ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ორი რიგით, რაც გამორიცხავს პირდაპირი რეზონანსის შესაძლებლობას.



ნახაზი 7. მერკურის, ვენერას, დედამიწისა და მარსის თხევადი ბირთვების P-ოდების საკუთარი სიხშირეების მნიშვნელობები (ლურჯი რგოლები) და სლიხტერის რხევების სიხშირეები (წითელი ვარსკვლავები). ყველა პლანეტის შემთხვევაში სლიხტერის მოდების სიხშირე ერთი რიგით ან უფრო მეტად ნაკლებია აკუსტიკური რხევების საკუთარ სიხშირეებთან შედარებით.

ანალოგიურად, დედამიწის ტიპის პლანეტებისათვის გამოთვლების შედეგად მიღებული სიხშირეები ნაჩვენებია ცხრილ 4-ში. აღნიშნულ ცხრილში არ არის მოცემული რიგით პირველი ნულოვანი ამონახსნი, რომელიც ნულოვანი სიხშირით აღწერს ნულოვან შემფოთებას საზღვართან. ეს ტრივიალური მოდა არ აღწერს P-მოდას და საზღვრების გადანომვრით შეიძლება მოიხსნას.

როგორც ცხრილი 4 გვიჩვენებს, სლიხტერის მოდის სიხშირე ნაკლებია სეისმური P-მოდების სიხშირეების სერიის დასაწყისში არსებულ სიხშირეებთან. ეს ნიშნავს, რომ გლობალური რეზონანსი სლიხტერის მოდებსა და სეისმურ ტალღებს შორის დედამიწის შემთხვევაში შესაძლებელი არ არის.

სლიხტერის მოდებსა და P-მოდებს შორის განსხვავება ცვალებადია პლანეტის ევოლუციის განმავლობაში, როდესაც პლანეტა ცივდება და თხევადი შრის ზომა კლებულობს. ასე, შესაძლებელია, ადრეულ ეტაპზე პლანეტას გაველო რეზონანსის არე, როდესაც სლიხტერის მოდა რეზონირებდა P-მოდებთან. ასეთ სისტემისათვის სავარაუდოდ უნდა ახასიათებდეს ზედაპირის ქერქის არამდგრადობა: ნებისმიერი სასრული ამპლიტუდის შემფოთებას, მაგალითად მცირე ზომის ასტეროიდთან შეჯახებას, უნდა შეეძლოს საჭირო ამპლიტუდის P-

მოდის გენერაცია, რაც გამოიწვევს სლიხტერის მოდასთან რეზონანსს და პლანეტის ქერქის ვიბრაციას არაწრფივ ამპლიტუდებზე. ამ შემთხვევაში მოსალოდნელია ქერქის (პლიტების) სწრაფი გადანაწილება, რაც ჩვეულებრივ ძალიან ნელი პროცესია.

7. დასკვნა

საბაკალავრო ნაშრომში შესწავლილია დედამიწისა და მზის სისტემის კლდოვანი პლანეტების თხევადი ბირთვების სეისმური ტალღები, P-მოდების საკუთარი სიხშირეები და მყარი ბირთვის ოსცილაციით გამოწვეული სლიხტერის მოდების სიხშირეები.

P-მოდების შესასწავლად განხილულია ბრტყელი-პარალელური სტრატეფიცირებული შრე, სადაც წნევა და სიმკვრივე პოლიტროპული კანონით არიან განაწილებულნი. ცვლადი ბგერის სიჩქარის და გრავიტაციული აჩქარების პირობებში გამოყვანილია აკუსტიკური ტალღების განტოლებები, რომლებიც განხილულია წრფივ მიახლოებაში.

მიღებულია აკუსტიკური ტალღების ევოლუციის ზოგადი ამონახსნი ბესელის ფუნქციების გამოყენებით. სასაზღვრო პირობების დადებით მიღებულია კონკრეტული ამონახსნები ყოველი პლანეტისათვის ინდივიდუალურად. ამონახსნის პარამეტრები მოცემულია ცხრილების სახით.

მერეს მხრივ დათვლილია თხევადი შრის თერმოდინამიკური და გრავიტაციული მახასიათებლები, დამხმარე მასები, რომლებიც საშალეზას იძლევიან გამოვიანგარიშოთ კლდოვანი პლანეტების სლიხტერის მოდების სიხშირეების რიცხვითი მნიშვნელობები. სლიხტერის მოდების სიხშირეები აღებულია სფერული სიმეტრიისა გათვალისწინებით მაღალი სიზუსტით სამ-შროვნი პლანეტის მოდელის ფარგლებში.

აღოჩნდა, რომ სლიხტერის სიხშირეები ერთი რიგით უფრო დაბალია დედამიწის შემთხვევაში P-მოდების სიხშირეებთან შედარებით. სიხშირეებს შორის განსხვავება მაქსიმალურია მერკურის შემთხვევაში. წარსულში პლანეტების წიაღები უფრო ცხელნი იყვნენ, რაც გამოიწვევდა შიდა მყარი ბირთვის შემცირებასა და თხევადი შრის სიგანიზ ზრდას. ეს ნიშნავს P-მოდების სიხშირეების კლებასა და სლიხტერის მოდების სიხშირეების მატებას. ყოველივე ეს საშუალებას გვაძლევს ვივარაუდოთ, რომ წარსულში შესაძლებელია ეს ორი მოვლენა ერთმანეთთან რეზონირებდა.

ზუსტი დასკვნების გასაკეთებლად საჭიროა P-მოდების სიხშირეების უფრო მაღალ მიახლოებაში გამოთვლა, რაც საშუალებას მოგვცემს დავაზუსტოდ რხევების მაღალი რიგის ამონახსნების ($i=3,4,5\dots$) უფრო ზუსტი მნიშვნელობები. განხილულ ამოცანაში უგულვებელყოფილია გარემოს სიმრუდე, რაც მისაღებია თხელი გარე ბირთვის შემგვევაში, მაგრამ მიუღებელია შედარებით ახალგაზრდა პლანეტების შემთხვევაში.

ნაშრომის შედეგები მიგვითითებენ კლდოვანი პლანეტების ფუნდამენტური მდგრადობის პრობებს, როდესაც პლანეტის კუმშვადი ვიბრაციის საკუთარი სიხშირე განსხვავდება მის თხევად გულში გრავიტაციულად შეტივტივებული მყარი ბირთვის ოსცილაციების სიხშირისაგან.

8. გამოყენებული ლიტერატურა

Greff-Lefftz, .and Legros, H., “*Fluid core dynamics and degree-one deformations: Slichter mode and geocenter motions*”, *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 161 150. (2007).

Grinfeld, P., and Wisdom, J., “*Motion of the mantle in the translational modes of the Earth and Mercury*”, *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **151**, 77 (2005).

Pringle, J. E., and King, A. R., “*Astrophysical Flows*”, Cambridge University Press (2007).

Hester, J., Smith, B., Blumenthal, G., Key, L., Voss, H., “*21st Century Astronomy: The Terrestrial Planets and Earth’s Moon*”, (2010).