ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

პლანეტების წარმოშობა: ჩანასახების ფორმირება რეოლოგიურ დინებებში

საბაკალავრო პროგრამა "ფიზიკა"
ასტროფიზიკის კათედრა

ავტორი:
ლუკა პონიატოვსკი

ხელმძღვანელი:
თსუ ზსმფ-ის ფიზიკის დეპარტამენტის
ასოც. პროფ.:
ალექსანდრე თევზაძე

©თბილისი
2015

შინაარსი

ანოტაცია

ნაშრომში განხილულია პროტოპლანეტარული დისკების წრფივი დინამიკა რეოლოგიური ეფექტების გათვალისწინებით. მტვრის ნაწილაკების დინამიკა განხილულია გრანულარული რეოლოგიური სიბლანტის მოდელის გამოყენებით, როდესაც დინების კინემატიკური სიბლანტე დამოკიდებულია წნევასა და სიჩქარის წანაცვლებაზე. აღნიშნულ მიახლოებაში შესწავლილია კუმშვადი სპირალური ტალღები გრანულარული ძალების გათავალისწინებით. ნაპოვნია წრფივი სპირალური რეოლოგიური არამდგრადობა: არამდგრადობის ზრდის ინკრიმენტი იზრდება დისკის რადიალური სტრატიფიკაციის პარამეტრის ზრდასთან ერთად. არამდგრადობა ვითარდება დისკის ბრუნვის საწინააღმდეგოდ მბრუნავი სპირალური შეშფოთებებისთვის, რომლებმაც შეიძლება გამოიწვიონ პლანეტების ჩანასახების სწრაფი ფორმირება პროტოპლანეტარულ დისკებში პლანეტების ფორმირების ადრეულ ეტაპებზე.

Abstract

The paper presents the study of linear dynamics of protoplanetary disks taking into account rheological properties of the flow. Dynamics of dust particles is studied within the granular rheological viscosity model, when kinematic viscosity of the flow depends on the pressure, as well as the velocity shear of the flow. Dynamics of spiral density waves is studied within the described approximation. Linear spiral rheological instability is found: instability growth rate increases with the growth of disk radial stratification parameters. Instability develops for spiral waves rotating opposite to the disk rotation. The process may lead to accelerated formation of planetesimals at early stages of planet formation in protoplanetary disks.

1 შესავალი

პლანეტების ფორმირება თანამედროვე ასტროფიზიკის ერთ-ერთი აქტუალური ამოცანაა. დაკვირვებითი ტექნიკის და სამეცნიერო თანამგზავრების კოსმოსში გაშვებამ უკანასკნელი ათწლეულის განმავლობაში გამოიწვია არამზიური პლანეტების დიდი რიცხვის აღმოჩენა: დღეისათვის დადასტურებულია 1931 არამზიური პლანეტის არსებობა. ყოველივე ამან გამოიწვია პლანეტების წარმოშობის თეორიის განვითარება, რომლის თეორიული წინასწარმეტყველებები დღეისათვის შესაძლებელია შევადაროთ დაკვირვებით მონაცემებს.

პლანეტების წარმოშობა ხდება პროტოპლანეტარულ დისკებში, სადაც აირის და მტვრის ნარევიდან, რომელიც ბრუნავს ცენტრალური ახლად წარმოშობილი ვარსკვლავის ან პროტოვარსკვლავის ირგვლივ, წარმოიშობა პლანეტები. თანამედროვე წარმოდგენებით პლანეტების აბსოლუტური უმრავლესობა წარმოიშობა ე.წ. ბირთვზე აკრეციის შედეგად. ამ მოდელში პლანეტის წარმოშობა ხდება სამ ეტაპად. პირველ საფეხურზე, მტვრის და აირის ნარევში წარმოიქმნება პლანეტების ჩანასახები. მეორე საფეხურზე ეს ჩანასახები შთანთქავენ პროტოპლანეტარულ დისკში არსებულ აირებს და წარმოიშობა პლანეტის „ემბრიონი‘‘. მესამე ეტაპზე ათასობით პლანეტარული ემბრიონები ეჯახებიან ერთმანეთს და იზრდებიან, სანამ საბოლოოდ არ მივიღებთ ჩამოყალიბებულ პლანეტარულ სისტემას. ამ ეტაპს ხშირად ოლიგარქიული ზრდის ეტაპადაც მოიხსენიებენ.

დაკვირვებები გვიჩვენებენ, რომ პლანეტების ფორმირება უნდა მოხდეს ვარსკვლავის სიცოცხლის პირველ ეტპზე ძალიან სწრაფად (რამოდენიმე ასეულ მილიონ წელიწადში). ეს დროითი შეზღუდვა პრობლემას წარმოადგენს ბირთვზე აკრეციის მოდელისათვის, რომლის პირველ ეტაპზე პლანეტების ჩანასახების ფორმირებას შეიძლება დასჭირდეს მილიარდობით წელიწადი. დროის ეს შეფასება მოდის მტვრის კოაგულაციის დინამიკის შეფასებიდან. დაკვირვებებიდან ცნობილია, რომ პროტოპლანეტარულ დისკებში მტვრის მარცვლის ზომა აღწევს მიკრომეტრებს, ხოლო პლანეტის ჩანასახის ზომა, რომელიც შეძლებს აირის აკრეციას აჭარბებს 1 კილომეტრს. შესაბამისად, კოაგულაციის პროცესით პლანეტის ჩანასახის ჩამოყალიბებას ხშირად შეიძება დასჭირდეს უფრო მეტი დრო, ვიდრე ვარსკვლავის სიცოცხლის ხანგრძლივობაა.

ამ პრობლემის ამოსახსნელად კვლევა მიმდინარეობს რამოდენიმე მიმართულებით. ერთი მიდგომით შესაძლებელია, რომ პროტოპლანეტარულ დისკში არსებულმა ძლიერმა ანტიციკლონურმა გრიგალებმა ჰიდროდინამიკურად დააჩქარონ პლანეტების ჩანასახების ფორმირება. მეორე მიდგომით მნიშვნელოვანი უნდა იყოს აირისა და მტვრის ურთიერთქმედება. ამ პირობებში, თუკი განვითარდა ე.წ. ორნაკადოვანი არამდგრადობა [5]. ამ მიდგომისას ხდება აირისა და ნულოვანი წნევის მტვრის კომპონენტის ურთიერთქმედების განხილვა, როდესაც ლოკალურმა არამდგრადობამ შეიძება გამოიწვიოს მასის ზრდა და პლანეტის ჩანასახის ჩამოყალიბება.

წარმოდგენილი საბაკალავრო ნაშრომის მიზანია პირველად მოვახდინოთ პროტოპლანეტარულ დისკში არსებული აირის და მტვრის ნარევის რეოლოგიური მოდელის ფორმულირება. ამ მიახლოებაში გათვალისწინებულია არა მხოლოდ აირის ჰიდროდინამიკური თვისებები, არამედ მტვრის ნაწილაკების დაჯახებების შედეგად გაჩენილი სიბლანტის რეოლოგიური კომპონენტი. გამოყენებულ მიახლოებაში სითხის სიბლანტე დამოკიდებულია როგორც დინების წნევაზე, ასევე დინების სიჩქარის წანაცვლებაზე. აღებული რეოლოგიური მოდელის ფარგლებში სიჩქარის წანაცვლების ზრდა იწვევს სიბლანტის კოეფიციენტის ზრდას. აღნიშნული მიდგომის გამოყენება შესაძლებელი გახდა გრანულარული დინების ლოკალური რეოლოგიური მდგომარეობის განტოლების შემუშავების შემდეგ [1]. საბალავრო ნაშრომში განხილულია ცენტრალური გრავიტირებადი ობიექტის ირგვლივ ორგანზომილებიანი დიფერენციალურად მბრუნავი პროტოპლანეტარული დინება, რომელშიც სიბლანტე მტვრის ნაწილაკების გრანულარული ურთიერთქმედების გამო ავლენს რეოლოგიურ თვისებებს.

პირველ თავში განხილულია პროტპლანეტური დისკის მოდელი რომელიც, ამოცანის სიმეტრიიდან გამომდინარე ჩაწერილია ცილინდრულ კოორდინატებში და არ არის გათვალისწინებული რეოლოგიური წევრები. მოცემული შემთხვევისთვის ნაპოვნია წონასწორული ამონახსნები. შემოტანილია წრფივი შეშფოთებები და დაიწერა განტოლებები პირველ მიახლოებაში,

გამოთვლების გამარკივების მიზნით განტოლებები გადაწერილია ლოკალური თანამბრუნავი მართკუთხა სისტემისთვის, რის შემდეგაც, ნაპოვნია დისპერსიული განტოლება და მისი ამონახსნები. მიღებულ შედეგებს ვიყენებთ გრანულარული დინების ლოკალური რეოლოგიური განტოლებებში როგორც ნულოვან ამონახსნებს და იმ მინიმალურ შედეგს რომელზეც უნდა დადიოდეს ახალი განტოლებები.

მე-2 თავში წარმოდგენილია გრანულარული დინების ლოკალური რეოლოგიური მედელი, რომლისთვისაც გამოიყენება სიბლანტის როგორც, დინების წნევისა და სიჩქარის წანაცვლების ფუნქცა. მსგავსად პირველი შემთხვევისა, სიმეტრიის გათვალისწინებით, განტოლებები ჩაიწერა ცილინდრულ კოორდინატებში. კეპლერულ და რეოლოგიურ წევრების სიდიდეებს შორის საგრძნობი სხვაობის გათვალისწინებით პირველ ეტაპზე ჩაიწერა მოცემული სისტემის წონასწორული ამონახსნები, რის შემდეგაც შესაძელებელი გახდა განტოლებებში შეშფოთებების შემოტანა, ამ შემთხვევაშიც განვიხილეთ მხოლოდ პირველი მიახლოვება. დასმული ამოცანის ამოხსნის ეტაპები მსგავსი იყო პირველ თავში ამოხსნილი ამოცანისა, გამოთვლების გამარტივების მიზნით შემოვიღეთ თანამბრუნავი მართკუთხა სისტემა, რომელშიც ვიპოვეთ დისპერსიის განტოლება. განტოლების სახიდან გამომდინარე საჭირო გახდა მისი გაშლა სიბლანტის კოეფიციენტის ხარისხების მიმართ, სადაც ნულოვანი წევრი არის პირველ თავში მიღებული დისპერსიული განტოლების ფესვი. პირველ მიახლოებაში მიღებული შედეგიდან გამოისახა მისი რეალური და კომპლექსური ნაწილები, რის შემდეგაც შესაძლებელი გახდა არამდგრადობის პოვნა.

ნაპოვნია, რომ ამ ტიპის დინებებში კუმშვადმა სპირალურმა ტალღებმა შეიძლება განიცადონ გრანულარული არამდგრადობა. არამდგრადობის შედეგად შესაძლებელია მტვრის ნაწილაკების კონცენტრაციის სწრაფი ზრდა და პლანეტის ჩანასახის სწრაფი ფორმირების ხელშეწყობა.

2 ზოგადი მოდელი

წინამდებარე თავში განხილულია კუმშვადი ორგანზომილებიანი დიფერენციალურად მბრუნავი პროტოპლანეტარული დისკის წრფივი ჰიდროდინამიკური მოდელი ცილინდრულ კოორდინატებში. წონასწორულ მდგომარეობაში დინებას გააჩნია ღერძული სიმეტრია, ხოლო ბრუნვა ემორჩილება კეპლერის კანონს.

2.1 ზოგადი ფორმალიზმი

ფროტოფლანეტური დინების აღსაწერად განვიხილოთ ენერგიის, იმპულსის და უწყვეტობის ჰიდროდინამიკური განტოლებები ორ განზომილებიან კუმშვად გარემოში პოლარულ კოორდინატებში
ნივთიერების შენახვისთვის გვექნება:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho V_\phi)}{\partial \phi} = 0 \tag{1}$$

იმპულსის შენახვის განტოლებები შეიზლება აღიწეროს ნავიე-სტოქსის განტოლებებით, რომალთაც პოლარულ კორდინატებში აქვთ შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{V_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \ , \tag{2}$$

$$\frac{\partial V_\phi}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_r V_\phi}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \phi} \ . \tag{3}$$

სადაც Φ წარმოადგენს გრავიტაციულ პოტენციალს , ასე რომ: $\partial_r \Phi = \Omega_{Kep}^2 r$ ენერგიის შენახივის განტოლებების გათვალისწინებით ჩვენ გვექნება:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathtt{V}\cdot\nabla\right\}S = 0$$

და მასში მდგომარეობის განტოლების ჩასმით:

$$S = c_v \ln\frac{P}{\rho^\gamma}$$

ვღებულობთ დიფერენციალურ განტოლებას წნევისთვის:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + V_r\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r}\frac{\partial P}{\partial \phi} = -\gamma P\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}\right) \tag{4}$$

სადაც პოლარული კოორდინატებში ∇ მოიცემა როგორც:

$$\nabla\cdot\mathtt{D} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rD_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

2.2 წონასწორული მდგომარეობა

განტოლებების ზოგადი სახის მიღების შემდეგ, უპირველეს ყოვლისა საჭიროა სისტემის წონასწორული მგომარეობის დადგენა, რომლისთვისაც ამონახსნები შემდეგი სახით შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\begin{cases} \rho_0 = \mathtt{const} \\ P_0 = \text{const} \\ \mathtt{V}_0 = (0, V_{0\phi}) \end{cases} \tag{5}$$

გან.(2; 3)-ში ჩასმით ვღებულობთ, რომ:

$$\frac{V_{0\phi}^2}{r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

გრავიტაციული პოტენციალი ჩავწერეთ ნიუტონის ფორმით:

$$\Phi = -\frac{\mathtt{MG}}{r} \qquad \text{და} \qquad V_{0\phi} = \Omega(r) r$$

შედეგად კი გვრჩება გამოსახულება კეპლერული სიჩქარისთვის:

$$\Omega(r)^2 = \frac{\mathtt{MG}}{r^3} \tag{6}$$

აქ M არის ცენტრალური გრავიტაციული ობიექტის მასა.

2.3 წრფივი შეშფოთებები

წონასწორული ამონახსნების პოვნის შემდეგ ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ შეშფოთების თეორია. ამისათვის საჭიროა სისტემისთვის შეშფოთებების დამატება, ჩვენ ვიხილავთ მხოლოდ წრფივ შეშფოთებებს, ამიტომ ცვლადებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\rho(t, r, \phi) = \rho_0 + \rho'(t, r, \phi)$$

$$P(t, r, \phi) = P_0 + P'(t, r, \phi)$$

$$V_r(t, r, \phi) = V_r'(t, r, \phi)$$

$$V_\phi(t, r, \phi) = V_{0\phi} + V_\phi'(t, r, \phi)$$

აქ ცვენ ვთვლით რომ $\Phi' \sim 0$.

სიჩქარის, წნევის და სიმკვრივის ასეთი სახით გან. (1 - 4)-ში შეტანის და არაწრფივი წევრების უგულებელყოფის შემდეგ ჩვენ ვღებულობთ რომ :

$$\Big\{\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\Big\}\rho' + \frac{\rho_0}{r}\Big(V_r' + r\frac{\partial V_r'}{\partial r} + \frac{\partial V_\phi'}{\partial \phi}\Big) = 0 \tag{7}$$

$$\Big\{\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\Big\}V_r' - 2\Omega(r)V_\phi' = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P'}{\partial r} \tag{8}$$

$$\Big\{\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\Big\}V_\phi' + \Big(2\Omega(r) + r\frac{\partial \Omega(r)}{\partial r}\Big)V_r' = -\frac{1}{\rho_0 r}\frac{\partial P'}{\partial \phi} \tag{9}$$

$$\Big\{\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\Big\}P' = -\gamma\frac{P_0}{r}\Big(V_r' + r\frac{\partial V_r'}{\partial r} + \frac{\partial V_\phi'}{\partial \phi}\Big) \tag{10}$$

ცნობილია რომ

$$c_s^2 = \gamma P_0/\rho_0 \tag{11}$$

რაც გვაძლევს :

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P'}{\partial r} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{P'}{\gamma P_0} = c_s^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{P'}{\gamma P_0}$$

ხოლო მოცემული წევრის შემდეგნაირად გადაწერის შედეგად

$$\frac{V_r'}{r} + \frac{\partial V_r'}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r V_r')}{\partial r}$$

ვიღებთ საბოლოო პასუხის შემდეგ სახეს:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\right\}\frac{\rho'}{\rho_0}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rV'_r)}{\partial r}+\frac{\partial V'_\phi}{\partial \phi}\right)=0 \tag{12}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\right\}V'_r-2\Omega(r)V'_\phi=-c_s^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{P'}{\gamma P_0} \tag{13}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\right\}V'_\phi+\left(2\Omega(r)+r\frac{\partial \Omega(r)}{\partial r}\right)V'_r=-\frac{c_s^2}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\frac{P'}{\gamma P_0} \tag{14}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\right\}\frac{P'}{\gamma P_0}=-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rV'_r)}{\partial r}+\frac{\partial V'_\phi}{\partial \phi}\right) \tag{15}$$

2.4 ლოკალური ანალიზი

მბრუნავი სისტემის დინამიკის შესასწავლად ვიყენებთ ლოკალურ მიახლოებას, რომელიც სამართლიანია მცირემასშტაბოვანი შეშფოთებებისათვის. ამ შემთხვევაში ლოკალური მიახლოება უგულვებელყოფს დინების სიმრუდეს და შეისწავლის წრფივი მოდების დინამიკას, რომელთა მახასიათებელი მასშტაბი მნიშნელოვნად მცირეა დისკის რადიუსთან შედარებით.

2.4.1 ლოკალური თანამბრუნავი მართკუთხა კოორდინატები

იმისათვის რომ გადავწეროთ განტოლებები მართკუთხა კოორდინატებისთვის ჩვენ შემოგვაქვს შემდეგი გარდაქმნები:

$$\begin{cases} x \equiv r-r_0 \\ y \equiv r_0(\phi-\Omega(r_0)t0) \\ t \equiv t \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial t}-r_0\Omega(r_0) \end{cases} \tag{16}$$

$\Omega(r)$-ს გაშლით r_0 წერტილში ჩვენ ვღებულობთ, რომ: $\Omega(r)\approx\Omega(r_0)+\Omega'(r)|_{r_0}(r-r_0)$ და ჩვენ ვუშვებთ, რომ: $\Omega(r_0)=\Omega_0$ მოცემული აღნიშვნებისთვის

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}\left[r\frac{\partial\Omega(r)}{\partial r}\right]_{r=r_0}$$

$$\mathrm{B}=-\frac{1}{2}\left[r\frac{\partial\Omega(r)}{\partial r}+2\Omega(r)\right]_{r=r_0}$$

ოპერატორი

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\right\} \quad \text{გადაიწერება, როგორც::} \quad \left\{\frac{\partial}{\partial t}+2Ax\frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

ვინაიდან დაშორება მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემის სათავესა(გრავიტაციულ ცენტრსა) და შემოღებულ მაღთკუთხა კორრდინატული სისტემის სათავეს შორის გაცილებით აღემატება მოცემულ სისტემის შიდა მანძილებს , რასაც ჩვენ ასე გამოვხატავთ: $x/r_0 \ll 1 \sim \epsilon$ შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rV'_r)}{\partial r}=\frac{1}{x+r_0}\frac{\partial((x+r_0)V'_x)}{\partial x}\sim\frac{1}{r_0}(\epsilon-1)\frac{1}{\epsilon}(r_0(\epsilon+1)V)=$$

$$\frac{1}{r_0}(\epsilon^2-1)\frac{1}{\epsilon}(r_0V)\sim-\frac{1}{r_0}\frac{1}{\epsilon}(r_0V)\Rightarrow\frac{1}{r_0}\frac{\partial(r_0V'_x)}{\partial x}=\frac{V'_x}{r_0}+\frac{\partial V'_x}{\partial x}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V'_\phi}{\partial \phi} = \frac{r_0}{x+r_0}\frac{\partial V'_y}{\partial y} \sim \frac{1}{\epsilon+1}\frac{1}{\epsilon}V = \frac{1}{\epsilon^2+\epsilon}V \sim \frac{1}{\epsilon}V \Rightarrow \frac{\partial V'_y}{\partial y}$$

აქედან გამომდინარეობს რომ:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + 2Ax\frac{\partial}{\partial y}\right\}\frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{V'_x}{r_0} + \frac{\partial V'_x}{\partial x} + \frac{\partial V'_y}{\partial y} = 0 \tag{17}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + 2Ax\frac{\partial}{\partial y}\right\}V'_x + 2\left[\mathrm{A} + \mathrm{B}\right]V'_y = -c_s^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{P'}{\gamma P_0} \tag{18}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + 2Ax\frac{\partial}{\partial y}\right\}V'_\phi - 2\mathrm{B}V'_x = -c_s^2\frac{\partial}{\partial y}\frac{P'}{\gamma P_0} \tag{19}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + 2Ax\frac{\partial}{\partial y}\right\}\frac{P'}{\gamma P_0} = -\Big(\frac{V'_x}{r_0} + \frac{\partial V'_x}{\partial x} + \frac{\partial V'_y}{\partial y}\Big) \tag{20}$$

2.4.2 წანაცვლებითი დინების გარდაქმნები

გამოთვლების გამარტივებისა და სიჩქარის კოორდინატზე ცხადი სახით დამოკიდებულების გამორიცხვის მიზნით, ვახორციელებთ ე.წ. წანაცვლებითი დინების გარდაქმნებს. ამ გარდაქმნებს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} x' \equiv x \\ y' \equiv y - 2Ayt \\ t' \equiv t \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x'} - 2At'\dfrac{\partial}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t'} - 2Ax\dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases} \tag{21}$$

ახალი ცვლადებისთვის გადაწერილი გან.(17 - 20) მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + 2Ax\frac{\partial}{\partial y}\right\} \quad = \quad \left\{\frac{\partial}{\partial t'}\right\}$$

and :

$$\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{V'_x}{r_0} + \left\{\frac{\partial}{\partial x'} - 2At'\frac{\partial}{\partial y'}\right\}V'_x + \frac{\partial V'_y}{\partial y'} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}V'_x - 2\Omega_0 V'_y = -c_s^2\left\{\frac{\partial}{\partial x'} - 2At'\frac{\partial}{\partial y'}\right\}\frac{P'}{\gamma P_0} \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}V'_y + 2\Big(\Omega_0 + A\Big)V'_x = -c_s^2\frac{\partial}{\partial y'}\frac{P'}{\gamma P_0} \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}\frac{P'}{\gamma P_0} = -\left[\frac{V'_x}{r_0} + \left\{\frac{\partial}{\partial x'} - 2At'\frac{\partial}{\partial y'}\right\}V'_x + \frac{\partial V'_y}{\partial y'}\right] \tag{25}$$

ავღნიშნოთ, რომ: $2Ayt$ წევრი,რომელიც შეიცავდა სიჩქარის კოორდინატზე ცხადი სახით დამოკიდებულებას, მოცემული გარდაქმნების ხარჯზე აღარ გვხვდება. ასეთი გარდაქმნები შესაძლებლობას მოგვცემს ჩავტაროთ ფურიე სივრცითი გაშლა.

2.5 ფურიე გარდაქმნა და ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები

ფურიე გაშლას ვახორციელებთ სივრცითი კოორდინატების მიმართ შემდეგი შახით:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \int\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\mathbf{k},t)\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{26}$$

სადაც $\mathbf{k}$ მოიცემა: $\mathbf{k}(t) = (k_x(t'), k_y)$

ϕ გამოვსახავთ $\mathbf{V}(\mathbf{r},t); \rho(\mathbf{r},t); P(\mathbf{r},t)$-ს ზოგად სახეს, ვინაიდან ფურიე გაშლა არის შემდეგნაირი:

$$\phi(\mathbf{k},t) = \begin{pmatrix} i\varrho(\mathbf{k},t) \\ \mathbf{v}(\mathbf{k},t) \\ -ip(\mathbf{k},t) \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$\begin{pmatrix} \rho'/\rho_0 \\ \mathbf{V}' \\ P'/\gamma P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\varrho(\mathbf{k},t) \\ \mathbf{v}(\mathbf{k},t) \\ -ip(\mathbf{k},t) \end{pmatrix} \times \exp\left[ik_x x + ik_y y\right] \tag{28}$$

მისი ჩასმით გან.(22 - 25)და ინტეგრალშიდა გამოსახულების ნოლთან ტოლობისა და $\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}}$-ს ნებისმიერობის გამო ვღებულობთ:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\varrho = -\left\{k_x(t') - 2At'k_y\right\}v_x - k_y v_y \tag{29}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t'} = 2\Omega_0 v_y - c_s^2\left\{k_x(t') - 2At'k_y\right\}p \tag{30}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t'} = -2\Big(\Omega_0 + A\Big)v_x - c_s^2 k_y p \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}p = \left[\left\{k_x(t') - 2At'k_y\right\}v_x + k_y v_y\right] \tag{32}$$

ან მატრიცული ფორმით გადაწერილი(სიმარტივისათვის $\partial_t D \equiv \dot{D}$):

$$\begin{pmatrix} \dot{\varrho} \\ \dot{v_x} \\ \dot{v_y} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{k} & -k_y & 0 \\ 0 & 0 & 2\Omega_0 & -c_s^2\hat{k} \\ 0 & -2\left(\Omega_0 + A\right) & 0 & -c_s^2 k_y \\ 0 & \hat{k} & k_y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varrho \\ v_x \\ v_y \\ p \end{pmatrix} \tag{33}$$

სადაც:

$$\hat{k} \equiv \left\{k_x(t') - 2At'k_y\right\}$$

მყარტანოვანი ბრუნვისათვის, როცა $A = 0$ ჩატარებული ფურიე დროითი დაშლის შედეგად ვღებულობთ შემდეგ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -k_x(t') & -k_y & 0 \\ 0 & -i\omega & 2\Omega_0 & -c_s^2\beta \\ 0 & -2\Omega_0 & -i\omega & -c_s^2 k_y \\ 0 & k_x(t') & k_y & -i\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varrho \\ v_x \\ v_y \\ p \end{pmatrix} = 0 \tag{34}$$

კრამერის წესის თანახმად ერთგვაროვან წრფივ გარტოლებათა სისტემის არატრივიალური ამონახსნის არსებობისათვის აუცილებელია რომ ამ სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი უნდა იყოს ნულის ტოლი. რაც გვაძლევს :

$$\begin{vmatrix} -i\omega & -k_x(t') & -k_y & 0 \\ 0 & -i\omega & 2\Omega_0 & -c_s^2\beta \\ 0 & -2\Omega_0 & -i\omega & -c_s^2 k_y \\ 0 & k_x(t') & k_y & -i\omega \end{vmatrix} = 0 \tag{35}$$

$$-i\omega(i\omega^3 - ic_s^2 k_y^2 \omega - ic_s^2 k_x \omega - 4i\Omega_0^2\omega) = 0$$

სადაც: $k^2 = k_x^2 + k_y^2$:

$$\omega^4 - (c_s^2 k^2 + 4\Omega_0^2)\omega^2 = 0 \tag{36}$$

3 გრანულარული დინების ლოკალური რეოლოგიური მოდელი

გრანულერული გინების აღმწერი განტოლებების ჩასაწერად ჩვენ განვილავთ ნავიე-სტოქსის განტოლებებს ტენზორული სახით, დაძაბულების ტოენზორის სახის გათვალისწინებით, რომელიც გრანულარული დინებებისთვის ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right\} v_i = \frac{\partial}{\partial x_k}\sigma_{ik} \tag{37}$$

$$\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} + \tau_{ik} \qquad \tau_{ik} = \eta\dot{\gamma}_{ik}$$

რეოლოგიურ მდგომარეობაშე დინების დისიფაციური თვისებები (მაგ. სიბლანტე) დამოკიდებულია მის მაკროსკოპიულ მახასიათებლებძე, როგორებიცაა წნევა და სიჩქარის წანაცვლება იხ.[1]

$$\eta = \frac{\mu P}{|\dot{\gamma}|} \qquad |\dot{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2}\dot{\gamma_{ij}}\dot{\gamma_{ij}}}$$

აქ $\dot{\gamma_{ik}}$ მოიცემა როგორც:

$$\dot{\gamma_{ik}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \tag{38}$$

გან.(38)-ის შეტანით გან. (37) ჩვენ ვპოულობთ:

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right\} v_i = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}\eta + \eta \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k} v_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} v_k \right) \tag{39}$$

ხოლო პოლარულ კოორდინატებში ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{V_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\eta\left(\Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right) + + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \phi} + \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right)\frac{\partial \eta}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \phi} + \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right)\frac{\partial \eta}{\partial r} \tag{40}$$

$$\frac{\partial V_\phi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_r V_\phi}{r} =$$

$$- \frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho}\eta\left(\Delta V_\phi - \frac{V_\phi}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \phi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \phi} + \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r}\right)\frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \phi} + \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r}\right)\frac{\partial \eta}{\partial \phi} \quad (41)$$

სადაც:

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

გან.(1- 4)-თან ერთად დგება სისტემის აღმწერ განტოლებათა სრული სისტემა.

$$\frac{\partial \mathtt{V}}{\partial t} + (\mathtt{V}\nabla)\mathtt{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\eta}{\rho}\left(\Delta \mathtt{V} + \nabla(\nabla \mathtt{V})\right) + \frac{1}{\rho}(\dot{\gamma}_{ki}\nabla_i)\eta \quad (42)$$

3.1 ცილინდრული მბრუნავი წონასწორული მდგომარეობა

წონასწორული მდგომარეობისთვის სიდიდეები შეიძლება ჩავწეროთ როგორც:

$$\begin{cases} \rho_0 = \rho(r) \\ P_0 = P(r) \\ \eta = \eta(r) \\ \mathtt{V}_0 = (0, V_{0\phi}) \end{cases} \quad (43)$$

მათი შეტანით გან.(40,41) ჩვენ ვპოულობთ:

$$\frac{V_{\phi 0}}{r} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial V_{\phi 0}}{\partial r} - \frac{V_{\phi 0}}{r}\right)\frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (44)$$

და

$$\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial V_{\phi 0}}{\partial r} - \frac{V_{\phi 0}}{r}\right)\frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho_0}\left(\Delta V_{\phi 0} - \frac{V_{\phi 0}}{r^2}\right) = 0 \quad (45)$$

გავიხსენოთ, რომ V_ϕ -ისთვის პოოლარულ კოორდინატებში იწერება: $V_{0\phi} = \Omega(r)r$, მისი შეტანითვღებულობთ:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \eta_0}{\partial r}\frac{\partial \Omega(r)}{\partial r} + \Omega(r)^2 = \frac{1}{\rho_0 r}\frac{\partial P_0}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (46)$$

$$\frac{r}{\rho_0}\frac{\partial \eta}{\partial r}\frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho_0}\left(r\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + 3\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) = 0 \quad (47)$$

გან.(46,47)-დან, ვინაიდან Φ არის გრავიტაციული პოტენციალი:

$$\Phi = -\frac{\mathtt{MG}}{r} \propto \frac{1}{r} \quad (48)$$

ვპოულობთ:

$$\eta(r) = \frac{C}{r^3\Omega'} \quad (49)$$

$$\frac{\partial P_0(r)}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{C}{r^3} \quad (50)$$

შედეგად წონასწორულ მდგომარეებაში მყოფი სიდიდეებისთვის შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$\begin{cases} \rho_0 = \bar{\rho}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta_\Sigma} \\ P_0(r) = \bar{P}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta_p} \\ \eta(r) = \bar{\eta}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta_\eta} \\ \mathtt{V}_0 = (0, V_{0\phi}) \end{cases} \tag{51}$$

სადაც $\beta_p = 2$ და $\beta_\eta = 1/2$.

3.2 წრფივი შეშფოთებები

განტოლებებში(40,41) შემდეგი სახით შეშფოთებების შეტანის შედეგაგად

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 + \rho' \\ P = P_0(r) + P'(r) \\ \eta = \eta(r) \\ V_r = V_r' \\ V_\phi = V_{0\phi} + V_\phi' \end{cases} \tag{52}$$

გათვალისწინებით, რომ $V_{0\phi} = r\Omega(r)$, წრფივ მიახლოვებაში გვექნება:

$$\Big\{\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\Big\}\rho' + \frac{\rho_0}{r}\Big(V_r' + r\frac{\partial V_r'}{\partial r} + \frac{\partial V_\phi'}{\partial \phi}\Big) + V_r'\frac{\partial \rho_0}{\partial r} = 0 \tag{53}$$

$$\Big\{\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\Big\}V_r' - 2\Omega(r)V_\phi' = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P'}{\partial r} + \\ + \frac{\rho'}{\rho_0^2}P_{0r} + \frac{1}{\rho_0}\eta\left(\Delta V_r' - \frac{V_r'}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\phi'}{\partial \phi}\right) + \\ + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r'}{\partial \phi} + \frac{\partial V_\phi'}{\partial r} - \frac{V_\phi'}{r}\right)\eta_r - \frac{\rho'}{\rho_0^2}r\frac{\partial \Omega}{\partial r}\eta_r \tag{54}$$

$$\Big\{\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\Big\}V_\phi' + \Big(2\Omega(r) + r\frac{\partial \Omega(r)}{\partial r}\Big)V_r' = -\frac{1}{\rho_0 r}\frac{\partial P'}{\partial \phi} + \\ + \frac{1}{\rho_0}\eta\left(\Delta V_\phi' - \frac{V_\phi'}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r'}{\partial \phi}\right) - \frac{\rho'}{\rho_0^2}\eta\left(r\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + 3\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) \\ + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r'}{\partial \phi} + \frac{\partial V_\phi'}{\partial r} - \frac{V_\phi'}{r}\right)\eta_r - \frac{\rho'}{\rho_0^2}r\frac{\partial \Omega}{\partial r}\eta_r \tag{55}$$

$$\Big\{\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\Big\}P' + V_r'\frac{\partial P_0}{\partial r} = -\gamma\frac{P_0}{r}\Big(V_r' + r\frac{\partial V_r'}{\partial r} + \frac{\partial V_\phi'}{\partial \phi}\Big) \tag{56}$$

$$\text{სადაც:} \quad P_{0r} \equiv \frac{\partial P_0}{\partial r} \quad \text{და} \quad \eta_r \equiv \frac{\partial \eta}{\partial r}$$

შეშფოთებებიდან ფონური ეფექტების მოსაშორებლად ჩვენ ვიყენებთ გლობალურ რადიალუს ხარისხობრივ ნორმირებას.

$$\begin{cases} \hat{\rho} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\delta_\Sigma} \rho' \\ \hat{P} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\delta_p} P' \\ \hat{V} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\delta_v} V' \end{cases}$$

შედეგად გვაქვს:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\right\}\frac{\hat{\rho}}{\rho_0} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\delta_\Sigma - \beta_\Sigma + \delta_v} \times$$
$$\times \left[\frac{\partial \hat{V}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{V}_\phi}{\partial \phi} + \frac{\delta_v + 1 - \beta_\Sigma}{r}\hat{V}_r\right] = 0 \quad (57)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\right\}\hat{V}_r - 2\Omega(r)\hat{V}_\phi = -\frac{c_s^2}{\gamma}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\beta_\Sigma + \delta_p - \delta_v}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\hat{P}}{\bar{P}} -$$
$$-\frac{c_s^2}{\gamma}\frac{\delta_p}{r}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\beta_\Sigma + \delta_p - \delta_v}\frac{\hat{P}}{\bar{P}} + \frac{c_s^2}{\gamma}\frac{\beta_p}{r}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\beta_\Sigma - \delta_\Sigma - \beta_p - \delta_v}\frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}} +$$
$$+\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\beta_\Sigma - \beta_\eta}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial^2 \hat{V}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{V}_r}{\partial \phi^2} + \frac{2\delta_v + 1}{r}\frac{\partial \hat{V}_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \hat{V}_\phi}{\partial \phi} + \frac{\delta_v^2 - 1}{r^2}\hat{V}_r\right] -$$
$$-\beta_\eta\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\beta_\Sigma - \beta_\eta}\frac{1}{r}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \hat{V}_r}{\partial \phi} + \frac{\partial \hat{V}_\phi}{\partial r} - \frac{\delta_v - 1}{r}\hat{V}_\phi\right] -$$
$$-\beta_\eta\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\beta_\Sigma - \beta_\eta - \delta_v}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}}r\Omega' \quad (58)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(r)\frac{\partial}{\partial \phi}\right\}\hat{V}_\phi + \Big(2\Omega(r) + r\Omega'\Big)\hat{V}_r = -\frac{c_s^2}{\gamma r}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\beta_\Sigma + \delta_p - \delta_v}\frac{\partial}{\partial \phi}\frac{\hat{P}}{\bar{P}}$$
$$+\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\beta_\Sigma - \beta_\eta}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial^2 \hat{V}_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{V}_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2\delta_v + 1}{r}\frac{\partial \hat{V}_\phi}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \hat{V}_r}{\partial \phi} + \frac{\delta_v^2 - 1}{r^2}\hat{V}_\phi\right] -$$
$$-\beta_\eta\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\beta_\Sigma - \beta_\eta}\frac{1}{r}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \hat{V}_r}{\partial \phi} + \frac{\partial \hat{V}_\phi}{\partial r} - \frac{\delta_v - 1}{r}\hat{V}_\phi\right] -$$
$$-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\beta_\Sigma - \beta_\eta + \beta_\Sigma - \delta_v}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}}\left(r\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + 3\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) - \beta_\eta\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\beta_\Sigma - \beta_\eta - \delta_v}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}}r\Omega' \quad (59)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\Omega(r)\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}\frac{\hat{P}}{\bar{P}}+\gamma\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta_p+\delta_v-\delta_p}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial\hat{V}_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\hat{V}_\phi}{\partial\phi}+\frac{1+\delta_v-\beta_p/\gamma}{r}\hat{V}_r\right]=0 \quad (60)$$

3.3 ლოკალური ანალიზი

3.3.1 ლოკალური თანამბრუნავი მართკუთხა კოორდინატები

ქვეთავ(2.4.1)-ში მოცემული გან. (16) გარდაქმნების მეშვეობით გადაწერილი განტოლე-ბებში გამოთვების გამარტივების მიზნით,

გან.(11)-ისა და იდეალური აირის მდგომარეობის გამტოლების გათვალისწინებით, გა-დავდივართ ენტროფიის ლოკაურ განტოლებებზე.

$$S_0=P_0\rho_0^{-\gamma}=-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta_s} \quad (61)$$

ხოლო ენტროპიის შეშფოთებისთვის გვქნება:

$$\hat{S}=\hat{P}-c_s^2\hat{\rho}$$

სადაც $\beta_s\equiv\beta_p-\gamma\beta_\Sigma$, ხოლო გან.(53 - 56) მიიღებენ სახეს:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+2Ax\frac{\partial}{\partial y}\right\}\frac{\hat{S}}{\gamma\bar{P}}-\frac{\beta_s}{\gamma r_0}\hat{V}_x=0 \quad (62)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+2Ax\frac{\partial}{\partial y}\right\}\hat{V}_x+2\,[\mathtt{A+B}]\,\hat{V}_y=-\frac{c_s^2}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\hat{P}}{\bar{P}}-\left(c_s^2\frac{\delta_p+\beta_p/\gamma}{r_0}-2\beta_\eta\mathrm{A}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\right)\frac{\hat{P}}{\gamma\bar{P}}+$$

$$+\left(c_s^2\frac{\beta_p/\gamma}{r_0}-2\beta_\eta\mathrm{A}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\right)\frac{\hat{S}}{\gamma\bar{P}}+$$

$$+\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial^2\hat{V}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{V}_x}{\partial y^2}+\frac{2\delta_v+1}{r_0}\frac{\partial\hat{V}_x}{\partial x}-\frac{2}{r_0}\frac{\partial\hat{V}_y}{\partial y}+\frac{\delta_v^2-1}{r_0^2}\hat{V}_x\right]-$$

$$-\frac{\beta_\eta}{r_0}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial\hat{V}_x}{\partial y}+\frac{\partial\hat{V}_y}{\partial x}-\frac{\delta_v-1}{r_0}\hat{V}_y\right] \quad (63)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+2\mathtt{A}x\frac{\partial}{\partial y}\right\}\hat{V}_y-2\mathtt{B}\hat{V}_x=-\frac{c_s^2}{\gamma}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\hat{P}}{\bar{P}}+$$

$$+\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial^2\hat{V}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{V}_y}{\partial y^2}+\frac{2\delta_v+1}{r_0}\frac{\partial\hat{V}_y}{\partial x}-\frac{2}{r_0}\frac{\partial\hat{V}_x}{\partial y}+\frac{\delta_v^2-1}{r_0^2}\hat{V}_y\right]-$$

$$-\frac{\beta_\eta}{r_0}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial\hat{V}_x}{\partial y}+\frac{\partial\hat{V}_y}{\partial x}-\frac{\delta_v-1}{r_0}\hat{V}_y\right]-$$

$$-2\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left(\frac{\hat{S}}{\gamma\bar{P}}-\frac{\hat{P}}{\gamma\bar{P}}\right)\left(r_0\frac{\partial}{\partial x}\mathtt{A}+(3+\beta_\eta)\mathtt{A}\right) \quad (64)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+2\mathtt{A}x\frac{\partial}{\partial y}\right\}\frac{\hat{P}}{\gamma\bar{P}}+\left[\frac{\partial\hat{V}_x}{\partial x}+\frac{\partial\hat{V}_y}{\partial y}+\frac{1+\delta_v-\beta_p/\gamma}{r_0}\hat{V}_x\right]=0 \tag{65}$$

3.3.2 წანაცვლებითი დინების გარდაქმნები

წინა ქვეთავის მსგავსად გან.(21)-ით ქვეთავ(2.4.2)-დან ჩვენ GAდავწერთ გან.(62-65) როგორც:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\hat{S}}{\gamma\bar{P}}-\frac{\beta_s}{\gamma r_0}\hat{V}_x=0 \tag{66}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t'}\hat{V}_x+2\left[\mathtt{A+B}\right]\hat{V}_y=&-\frac{c_s^2}{\gamma}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}-2\mathtt{A}t'\frac{\partial}{\partial y'}\right\}\frac{\hat{P}}{\bar{P}}-\left(c_s^2\frac{\delta_p+\beta_p/\gamma}{r_0}-2\beta_\eta\mathrm{A}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\right)\frac{\hat{P}}{\gamma\bar{P}}+\\&+\left(c_s^2\frac{\beta_p/\gamma}{r_0}-2\beta_\eta\mathrm{A}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\right)\frac{\hat{S}}{\gamma\bar{P}}+\\&+\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left[\Delta'_{xy}\hat{V}_x+\frac{2\delta_v+1}{r_0}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}-2\mathtt{A}t'\frac{\partial}{\partial y'}\right\}\hat{V}_x-\frac{2}{r_0}\frac{\partial\hat{V}_y}{\partial y'}+\frac{\delta_v^2-1}{r_0^2}\hat{V}_x\right]-\\&-\frac{\beta_\eta}{r_0}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial\hat{V}_x}{\partial y'}+\left\{\frac{\partial}{\partial x'}-2\mathtt{A}t'\frac{\partial}{\partial y'}\right\}\hat{V}_y-\frac{\delta_v-1}{r_0}\hat{V}_y\right]\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t'}\hat{V}_y-2\mathtt{B}\hat{V}_x=&-\frac{c_s^2}{\gamma}\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\hat{P}}{\bar{P}}+\\&+\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left[\Delta'_{xy}\hat{V}_y+\frac{2\delta_v+1}{r_0}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}-2\mathtt{A}t'\frac{\partial}{\partial y'}\right\}\hat{V}_y-\frac{2}{r_0}\frac{\partial\hat{V}_x}{\partial y'}+\frac{\delta_v^2-1}{r_0^2}\hat{V}_y\right]-\\&-\frac{\beta_\eta}{r_0}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial\hat{V}_x}{\partial y'}+\left\{\frac{\partial}{\partial x'}-2\mathtt{A}t'\frac{\partial}{\partial y'}\right\}\hat{V}_y-\frac{\delta_v-1}{r_0}\hat{V}_y\right]-\\&-2\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left(\frac{\hat{S}}{\gamma\bar{P}}-\frac{\hat{P}}{\gamma\bar{P}}\right)\left(r_0\left\{\frac{\partial}{\partial x'}-2\mathtt{A}t'\frac{\partial}{\partial y'}\right\}\mathtt{A}+(3+\beta_\eta)\mathtt{A}\right)\end{aligned} \tag{68}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\hat{P}}{\gamma\bar{P}}+\left[\left\{\frac{\partial}{\partial x'}-2\mathtt{A}t'\frac{\partial}{\partial y'}\right\}\hat{V}_x+\frac{\partial\hat{V}_y}{\partial y'}+\frac{1+\delta_v-\beta_p/\gamma}{r_0}\hat{V}_x\right]=0 \tag{69}$$

სადაც Δ'_{xy} აღნიშნავს :

$$\Delta'_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial(x')^2}-4\mathtt{A}t'\frac{\partial^2}{\partial x'\partial y'}+4\mathtt{A}^2(t')^2\frac{\partial^2}{\partial(y')^2}$$

3.4 ფურიე გარდაქმნა და ჩვეულებდივი დიფერენციალური განტოლებები

მსგავსად იმისა, თუ როგორ ჩავატარეთ ფულიე გარდაქმნები ნაწ.(2.5) გან.(26)-ების დახმარებით, როდსაც ფურიე სახე სიჩქარისთვის, წნევა და სიმკვრივისთვის მოიცემოდა გან.(27)-ის მეშვეობით. ახლაც გარდავქმინოთ გან.(66,67,68,69)-ებს, იმ გამონაკლისით რომ სიმკვრივის განაწილების ნაცვლად ჩვენ გადავედით ენთროპიის განაწილებაზე, ამიტომ უნდა შეიცვალოს გან.(28) შემდეგნაირად:

$$\begin{pmatrix} \hat{S}/\gamma\bar{P} \\ \hat{\mathtt{V}} \\ \hat{P}/\gamma\bar{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\varrho(\mathtt{k},t) \\ \mathbf{v}(\mathtt{k},t) \\ -ip(\mathtt{k},t) \end{pmatrix} \times \exp\left[ik_x x + ik_y y\right]$$

$$\frac{\partial s}{\partial t'} = \frac{\beta_s}{\gamma r_0} v_x \tag{70}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t'} + 2\left[\mathrm{A}+\mathrm{B}\right] v_y = -c_s^2 \hat{K} p + i\left(c_s^2 \frac{\delta_p + \beta_p/\gamma}{r_0} - 2\beta_\eta \mathrm{A}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\right) p + \left(c_s^2 \frac{\beta_p/\gamma}{r_0} - 2\beta_\eta \mathrm{A}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\right) s +$$
$$+ \frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left[-\hat{K}^2 v_x + i\hat{K}\frac{2\delta_v+1}{r_0} v_x - i\frac{2}{r_0} k_y v_y + \frac{\delta_v^2 - 1}{r_0^2} v_x\right] -$$
$$- \frac{\beta_\eta}{r_0}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left(ik_y v_x + i\hat{K} v_y - \frac{\delta_v - 1}{r_o} v_y\right) \tag{71}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t'} - 2\mathrm{B} v_x = -c_s^2 k_y p +$$
$$+ \frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left[-\hat{K}^2 v_y + i\hat{K}\frac{2\delta_v+1}{r_0} v_y + \frac{\delta_v^2 - 1}{r_0^2} v_y - i\frac{2}{r_0} k_y v_x\right] -$$
$$- \frac{\beta_\eta}{r_0}\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}\left(ik_y v_x + i\hat{K} v_y - \frac{\delta_v - 1}{r_0} v_y\right) -$$
$$- 2\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}}(s + ip)\left(r_0\left\{\frac{\partial}{\partial x'} - 2\mathtt{A}t'\frac{\partial}{\partial y'}\right\}\mathtt{A} + (3+\beta_\eta)\mathtt{A}\right) \tag{72}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t'} = -\left[\hat{K} v_x + k_y v_y - i\frac{1+\delta_v - \beta_p/\gamma}{r_0} v_x\right] \tag{73}$$

სადაც : $\hat{K} \equiv \left\{k_x(t') - 2\mathrm{A}t'k_y\right\}$ ხოლო $\hat{K^2} \equiv \left\{k_x^2(t') - 4\mathtt{A}t'k_xk_y + 4\mathtt{A}^2(t')^2k_y^2\right\}$

ფურიე დროითი დაშლის შედეგად, ენტროპიის ერტგვაროვანი განაწილების შემთხვევაში $S = const$ იდეალური აირის მდგომარეობის გამტოლებიდან გან.(61) გამომდინარეობს:

$$\beta_p = \gamma\beta_\Sigma$$

თუ შემოვიღებთ არნიშვნებს

$$k_p \equiv \frac{\beta_p}{\gamma r_0}$$

$$\Gamma_1 \equiv k_x^2 - ik_x\frac{2\beta_p/\gamma - 1}{r_o} - \frac{1}{r_0^2}\left(\frac{\beta_p^2}{\gamma^2} - 2\frac{\beta_p}{\gamma}\right) + \frac{ik_y\beta_\eta}{r_0}$$

$$\Gamma_2 \equiv \frac{2ik_y}{r_0} + \frac{ik_y\beta_\eta}{r_0}$$

$$\zeta \equiv \frac{ik_y\beta_\eta}{r_0} - \frac{ik_x\beta_\eta}{r_0} + \beta_\eta\frac{\beta_p/\gamma - 2}{r_0^2}$$

და მსგავსად ნაწ.(2.5) მყარტანოვანი ბრუნვისას, როდესაც A = 0, ვღებულობთ :

$$\hat{K} \to k_x(t') \quad \text{და} \quad \hat{K^2} \to k_x^2$$

მაშინ გან(70-73) გადაიწერება შემდეგი დეტერმინანტის სახით:

$$\begin{vmatrix} -i\omega & 0 & 0 & 0 \\ -c_s^2 k_p & -i\omega + \nu\Gamma_1 & 2B + \nu(\Gamma_2 - \zeta) & c_S^2 k_x \\ 0 & -2B + \nu\Gamma_2 & -i\omega + \nu(\Gamma_1 - \zeta) & c_s^2 k_y \\ 0 & -k_x & -k_y & -i\omega \end{vmatrix} = 0 \tag{74}$$

რაც საბოლოოდ მოგვცემს შემდეგი სახის დისპერსიას:

$$i\omega\left(\omega^2 - c_s^2 k^2 - 4B^2\right) + i\omega\left(\Gamma_1 - \Gamma_2\right)\left(\zeta - \Gamma_1 - \Gamma_2\right)\nu^2 + \\ \left(\left(\zeta - 2\Gamma_1\right)\omega^2 - 2i\zeta B\omega - c_s^2 k^2\left(\zeta - \Gamma_1\right) + c_s^2 k_x k_y\left(\zeta - 2\Gamma_2\right) + c_s^2 k_y^2 \zeta\right)\nu = 0 \tag{75}$$

მიღებულ დისპერსიულ განტოლებას ჩვენ ვშლით კინემატკური სიბლანკის კოეფიციენტის მიმართ და ვწერთ მიღებულ შედეგს პირველ მიახლოვებაში

$$\omega = \omega_0 + \nu\omega_1$$
$$\nu^4 \sim \nu^3 \sim \nu^2 \to 0 \Rightarrow$$

$$-ic_s^2 k^2\left(\Gamma 1 - \zeta\right) + ic_s^2 k_x k_y\left(2\Gamma_2 - \zeta\right) - 2\left(c_s^2 k^2 + 4\mathrm{B}^2 - 2\omega_0^2\right)\omega_1 + \\ i\omega_0^2\left(2\Gamma_1 - \zeta\right) + \zeta\left(2\mathrm{B}\omega_0 - ic_s^2 k_y^2\right) = 0 \tag{76}$$

საიდანაც ვპოულობთ გაშლის წევრს შემდეგი სახით:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\frac{ic_s^2 k^2 \Gamma_1 + ic_s^2 k_x k_y\left(2\Gamma_2 - \zeta\right) - 4i\mathrm{B}^2\left(2\Gamma_1 - \zeta\right) - ic_s^2 k_y^2 \zeta + 2\mathrm{B}\zeta\omega_0}{12B^2 - c_s^2 k^2} \tag{77}$$

თუ შევიტანთ $\omega_1 = \omega_1' + i\omega_1''$ და გამოვყოფთ წარმოსახვით ნაწილს მივიღებთ შემდეგი სახის არამდგრადობას:

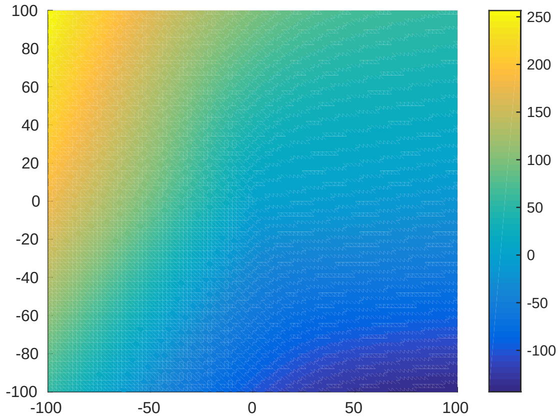
$$\omega_1'' = k_0^2\left[\frac{\omega_s^2}{\omega_0^2}\left(k^2\beta_\Sigma(1 - \beta_\Sigma) + k_x^4 + k_x^2 k_y^2 + k_y^2\beta_\eta(2 - \beta_\Sigma)\right) + \right. \\ \left. + \xi^2\left[(\beta_\eta + 2\beta_\Sigma)(\beta_\Sigma - 2) - 2k_x^2\right] + \xi\beta_\eta(k_y - k_x)\right] \tag{78}$$

სადაც:

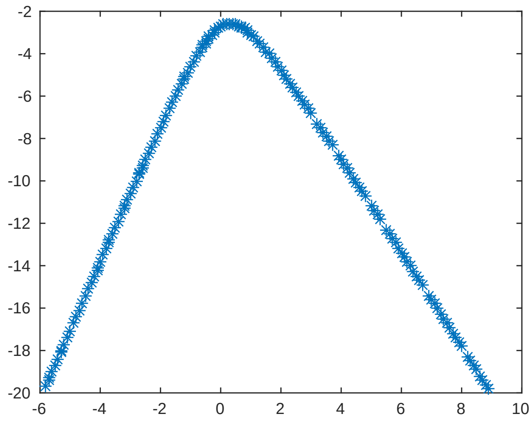
$$k \to \frac{k}{r_0}$$
$$k_o \equiv \frac{1}{r_0}$$
$$\omega_s^2 \equiv c_s^2 k_0^2$$
$$\xi \equiv \frac{2\mathrm{B}}{\omega_0}$$

ხოლო ჩვენთვის საინტერესო ამონახსნებია:

$$k_y < \frac{-\xi}{\beta_\eta}\left[(\beta_\eta + 2\beta_\Sigma)(2 - \beta_\Sigma) - 2k_x^2\right] + k_x \tag{79}$$



სურ 1: კუმშვადი რეოლოგური არამდგრადობის ზრდის ინკრიმენტის დამოკიდებულება ტალღურ რიცხვებზე, სადაც დადებითი მნიშვნელობები შეესაბამება ზრდად არამდგრადობას



სურ 2: მგდგრადობის მრუდი. არამდგრადობა ძრდადია მრუდსშიდა არეში

4 დასკვნა

ნაშრომში განხილულია წრფივ შეშფოთებათა დინამიკა ორგანზომილებიანი დიფერენციალურად მბრუნავი კუმშვადი ჰიდროდინამიკური პროტოპლანეტარული დისკში გარემოს რეოლოგიური თვისებების გათვალისწინებით.

პროტოპლანეტარული დისკის ნაკადი წარმოადგენს აირისა და მიკრო მეტრის ზომის მტვრის ნარევს. ჩვენ ვიხილავთ მტვრის ნაწილაკების დაჯახების ეფექტს რეოლოგიური მიდგომით, როდესაც გრანულარული ძალები ახდენენ დინების მიკროსკოპული დისიპაციური მახასიათებლის – სიბლანტის ცვლილებას. ეს მიდგომა გამართლებულია გრანულარული ნაწილაკების მცირე შევსების შემთხვევაშიც, თუკი ნაწილაკებს შორის დაჯახება არ არის დრეკადი. ამ მოდელში კინემატიკური სიბლანტე დამოკიდებულია მაკროსკოპულ დინამიკურ მახასიათებლებზე – წნევასა და დინების სიჩქარეზე.

ნაშრომში განხლულია პროტოპლანეტური დისკის ცილინდრული სიმეტრიის წონასწორული მდგომარეობა, როდესაც წნევას და სიმკვრივეს გააჩნიათ რადიალური ხარისხობრივი სტრატიფიკაციის კანონი. ნაპოვნია თვითშეთახმებული მდგომარეობა, რომელშიც წნევის სტრატიფიკაცია დაბალანსებულია სიბლანტის რადიალური ხარისხობრივი სტრატიფიკაციით, ხოლო ბრუნვა ემორჩილება კეპლერის კანონს. სიმკვრივის სტრატიფიკაციის კანონი აღებულია ენტროპიის ერთგვაროვანი განაწილების პირობიდან, რომელიც განხილვიდან გამორიცხავს სითბური მოდების არსებობას.

მიღებულ რადიალურად სტრათიფიცირებულ წონასწორობაში შესწავლილია წრფივ შეშფოტებათა დინამიკა. ნაჩვენებია, რომ რეოლოგიური სიბლანტის წევრის არსებობის გარეშე მიიღება სტანდარტული კუმშვადი სპირალური ტალღა, რომლის სიხშირეც განისაზღვრება ბგერის სიჩქარისა და ბრუნვის კუთხური სიჩქარის საშუალებით. რეოლოგიური წევრის არსებობა იწვევს მესამე რიგის დისპერსიის მიღებას, რომელსაც გააჩნია არამდრგადი ამონახსნი. მიახლოებაში, როდესაც სიბლანტის ეფექტები მნიშვნელოვნად ნაკლებია ბრუნვით გამოწვეულ ეპიციკლურ პროცესებთან, ვახდენთ დისპერსიის განტოლების გაშლას სიბლანტის კოეფიციენტის მიხედვით და ვინარჩუნებთ მხოლოდ პირველი რიგის წევრებს. ამ მიახლოებაში ვღებულობთ კუმშვადი სპირალური ტალღის არამდგრად ამონახსნს, რომელიც გამოწვეულია დინების რეოლოგიური ხასიათით.

ნაპოვნი სიმკვრივის სპირალური რეოლოგიური არამდგრადობა გამოწვეულია რადიალურად დინების წანაცვლების, რადიალური სტრატიფიკაციის და დინების სუსტი რეოლოგიური თვესებების კომბინაციით. მიღებულია არამდგრადობის ზრდის ინკრიმენტის ამონახსნი. არამდგრადობის ზრდის ტემპი მატულობს ბგერის სიჩქარის კლებასთან ერთად. ნაჩვენებია, რომ არამდრგადობის გაჩენის პირობა ლოკალურ მიახლოებაში არ არის დამოკიდებული რადიალური სტრატიფიკაციის პარამეტრებზე: სტრატიფიკაციის მახასიათებლები ზრდიან არამდრგადობის ტემპს. არამდგრადობა ხორციელდება უარყოფითი აზიმუტალური ტალღური რიცხვის შემთხვევაში, რაც ნიშნავს რომ აღნიშნული პროცესი შეიძლება განიცადონ მხოლოდ ბრუნვის საწინააღმდეგოდ მოძრავმა კუმშვადმა სპირალურმა ტალღებმა.

რეოლოგიური არმდგრადობა მოსალოდნელია პროტოპლანეტარული დისკის ცენტრალურ და გარე არეებში, სადაც დინების ტემპერატურა და ბგერის სიჩქარე მცირეა ცენტრალურ უბნებთან შედარებით. მეორეს მხრივ, ეს არის უბნები, სადაც უნდა ყალიბდებოდნენ პლანეტების ჩანასახები. არამდგრადობის განვითარება ხდება ბრუნვის საწინააღმდეგოდ მოძრავ სპირალურ შეშფორთებებში, სადაც შესაძლებელია აირის და მტვრის ნაწილაკების დაგროვება მზარდი ტემპით წრფივ ეტაპზე. მოსალოდნელია, რომ ამ ტიპის არამდგრადობამ უნდა გამოიწვიოს მასის სწრაფი აგლომერაცია და პლანეტების სწრაფი ჩანასახების ფორმირება.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] Y. Forterre and O. Pouliquen, *Flows of dense granular media*, Annual Review of Fluid Mechanics, 40 (2008), pp. 1–24. DOI:10.1146/annurev.fluid.40.111406.102142.

[2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, Fluid Mechanics*, vol. 6 of 10, Fizmatlit, 5 ed., 2001. ISBN:5-9221-0121-8.

[3] A. G. Tevzadze, G. D. Chagelishvili, G. Bodo, and P. Rossi, *Linear coupling of modes inc 2d stratified astrophysical discs*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 401 (2010), pp. 901–912. DOI:10.1111/j.1365-2966.2009.15723.x.

[4] A. G. Tevzadze, G. D. Chagelishvili, and J.-P. Zahn, *Hydrodynamic stability and mode coupling in kepleriaan flows: local syrato-rotational analysis*, A&A, 478 (2008), pp. 9–15. DOI:10.1051/0004-6361:20078386.

[5] A. N. Youdin and J. Goodman, *Streaming instabilities in protoplanetary discs*, The Astrophysical Journal, 620 (2005), p. 459–469.