ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მაგნიტოჰიდროდინამიკული არამდგრადობის კვლევა დიფერენციალურად მბრუნავ ცილინდრულ ასტროფიზიკურ პლაზმაში

სერგო ლომინეიშვილი

სამაგისტრო ნაშრომი:
ფუნდამენტური და გამოყენებითი ფიზიკა:
მოდული ასტროფიზიკა და პლაზმის ფიზიკა
ხელმძღვანელი: ა. თევზაძე

მბრუნავი ასტროფიზიკური დინებები

ფართოდ გავრცელებული ობიექტები ასტროფიზიკაში

მაგალითები:

გალაქტიკური, აკრეციული და პროტოპლანეტური დისკები.

ძირითადი თვისებები:

დიფერენციალური ბრუნვა: $\Omega = \Omega(r)$

(კეპლერული ბრუნვა $\Omega \sim r^{-3/2}$)

მაღალი ტემპერატურა და იონიზაცია: მაგნიტური ველი - B

აკრეციული დისკები:
მატერიის მორევი გრავიტაციულად კომპაქტური ობიექტის გარშემო. მაღალენერგეტიკული გამოსხივების წყაროები.

მასის გადატანა ცენტრისაკენ და გრავიტაციული ენერგიის გამოთავისუფლება.

კინემატიკური სიბლანტე: მცირეა (Re >> 10^{10})
ანომალური სიბლანტე: ტურბულენტობა

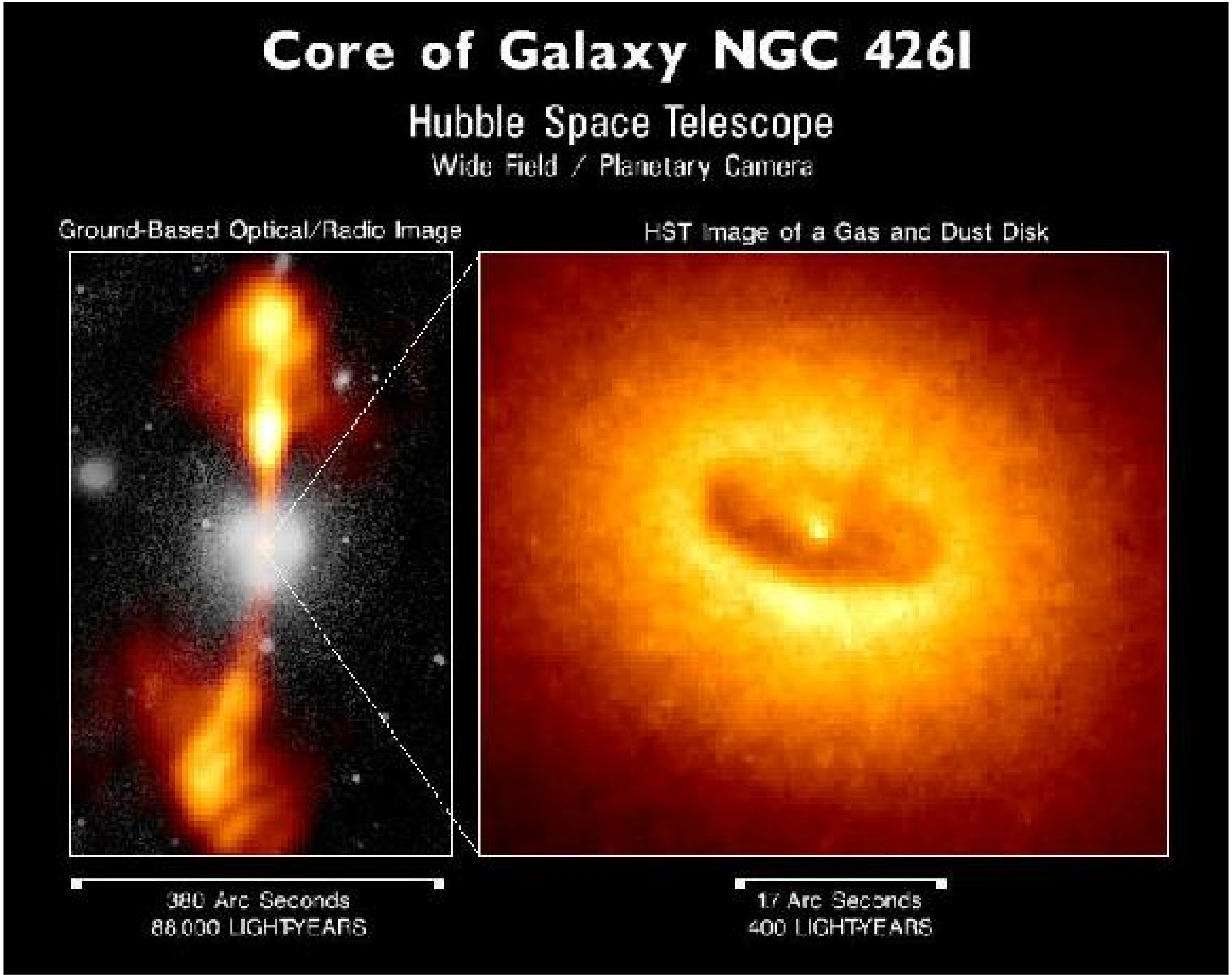
ანომალურად დიდი დისიპაცია ქაოსური მოძრაობების გამო

ტურბულენტობის მიზეზი: **არამდგრადობა**

არამდგრადობების კვლევა დამაგნიტებულ დიფერენციალურად მბრუნავ დისკებში.

დაკვირვებები

აქტიური გალაქტიკური ბირთვები (გალაქტიკა NGC 4261)



ტურბულენტობის მიზეზი დამაგნიტებულ აკრეციულ დისკებში:

მაგნიტობრუნვითი არამდგრადობა
(Balbus and Hawley, 1992)

სუსტი აზიმუტალური მაგნიტური ველის და დიფერენციალური ბრუნვის ურთიერთქმედება იწვევს დინების დესტაბილიზაციას და ძლიერ ქაოსს (ტურბულენტობას)

თეორიული მოდელი:

$B = B_\phi$

$\Omega(r) = \Omega_0 r^{-3/2}$,

რადიალურად ერთგვაროვანი თერმოდინამიკური პარამეტრები:

$$P, \rho = \mathrm{constant}$$

რეალურ აკრეციულ დისკებში წნევა და სიმკვრივე მატულობს ცენტრთან მიახლოებისას

$$P = P(r)$$

$$\rho = \rho(r)$$

ამოცანა:

შევისწავლოთ წნევისა და სიმკვრივის რადიალური არაერთგვაროვნების (სტრატიფიკაციის) ზეგავლენა კლასიკურ მაგნიტობრუნვით არამდგრადობაზე

რადიალურად სტრატიფიცირებული კეპლერული დისკების მ.ჰ.დ. მდგრადობის *რიცხვითი* ანალიზი:
(Van der Swaluw, Blokland and Keppens, 2005)

მდგრადობის ანალიზისათვის საჭიროა მჰდ სისტემის რადიალურად არაერთგვაროვანი ამონახსნი.

$$\rho(r) = \rho_0 (r/r_0)^{-\frac{3+a}{2}}$$

$$P(r) = P_0 (r/r_0)^{-\frac{5+a}{2}}$$

$$V_\varphi(r) = r \cdot \Omega(r)$$

$$B_\varphi(r) = B_{\varphi 0} (r/r_0)^{-\frac{5+a}{4}}$$

ცილინდრული სიმეტრიის რადიალურად არაერთგვაროვანი დიფერენციალურად მბრუნავი დამაგნიტებული დისკი

3-განზ. მ.ჰ.დ. განტოლებები ცილინდრულ კოორდინატებში:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{V}\vec{\nabla})\right\}\rho+\rho(\vec{\nabla}\vec{V})=0$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{V}\vec{\nabla})\right\}V_r-\frac{V_\varphi^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(p+\frac{B^2}{8\pi}\right)+\frac{1}{4\pi\rho}\left(\vec{B}\vec{\nabla}\right)B_r-\frac{B_\varphi^2}{4\pi\rho r}-\frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{V}\vec{\nabla})\right\}V_\varphi+\frac{V_r V_\varphi}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(p+\frac{B^2}{8\pi}\right)+\frac{1}{4\pi\rho}\left(\vec{B}\vec{\nabla}\right)B_\varphi+\frac{B_r B_\varphi}{4\pi\rho r}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{V}\vec{\nabla})\right\}V_z=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(p+\frac{B^2}{8\pi}\right)+\frac{1}{4\pi\rho}\left(\vec{B}\vec{\nabla}\right)B_z-\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{V}\vec{\nabla})\right\}B_r=\left(\vec{B}\vec{\nabla}\right)V_r-B_r(\vec{\nabla}\vec{V})$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{V}\vec{\nabla})\right\}B_\varphi=\left(\vec{B}\vec{\nabla}\right)V_\varphi-B_\varphi(\vec{\nabla}\vec{V})+\frac{V_r B_\varphi-V_\varphi B_r}{r}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{V}\vec{\nabla})\right\}B_z=\left(\vec{B}\vec{\nabla}\right)V_z-B_z(\vec{\nabla}\vec{V})$$

$$(\vec{\nabla}\vec{B})=0.$$

წრფივ შეშფოთებათა ანალიზი

ფიზიკური სიდიდეების გაყოფა შეუშფოთებელ და შეშფოთებულ ნაწილებად:

$$\boxed{\begin{gathered}\rho = \overline{\rho} + \rho' \\ V = \overline{V} + V' \\ p = \overline{p} + p' \\ B = \overline{B} + B'\end{gathered}}$$

$(\overline{\rho}\ ,\ \overline{p}\ ,\ \overline{B}\ ,\ \overline{V}\,)$ - შეუშფოთებელი ამონახსნი

$(\rho'\ ,\ p'\ ,\ B'\ ,\ V'\,)$ - წრფივი შეშფოთებები

მდგრადობის ანალიზი:

იზრდებიან თუ არა წრფივი შეშფოთებები?

შეუშფოთებელი კონფიგურაცია

$$\overline{V}_{\varphi}(r) = \overline{\Omega}(r) r \,, \qquad \overline{V}_{r,z}(r) = 0 \,,$$

$$\overline{B}_{\varphi}(r) = B_{0\varphi}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta_B} , \qquad \overline{B}_{r,z}(r) = 0 \,,$$

$$\overline{\rho}(r) = \rho_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta_\Sigma} , \qquad \overline{p}(r) = p_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta_p} ,$$

დიფერენციალური ბრუნვა: $\overline{\Omega}(r) = \Omega_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-q}$

ხარისხობრივი სტრატიფიკაციის პარამეტრები: $\beta_P \,, \beta_\rho \,, \beta_B \,.$

წრფივი შეშფოთებები

რადიალური ხარისობრივი ნორმირება (Tevzadze et al. 2010):

$$p'(\vec{r}) = \hat{p}(\vec{r})\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\delta_p}$$

$$\rho'(\vec{r}) = \hat{\rho}(\vec{r})\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\delta_\Sigma}$$

$$\vec{V}'(\vec{r}) = \hat{\vec{V}}(\vec{r})\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\delta_v}$$

$$B'_{r,\varphi,z}(\vec{r}) = \hat{B}_{r,\varphi,z}(\vec{r})\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\delta_B}$$

სადაც δ -ები ნორმირების თავისუფალი პარამეტრებია.

ფიზიკური მიახლოებები

1. ღერძულად სიმეტრიული შეშფოთებები;

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$$

2. ლოკალური მიახლოება;

$$\frac{r - r_0}{r} << 1$$

3. სიმრუდის უგულვებელყოფა;

წრფივი შეშოთებების ფურიე გაშლა:

$$\sim \exp(i\omega t - ik_r r - ik_z z)$$

ზოგადი დისპერსია

განტოლებათა სისტემის ამოხსნით ვიღებთ დისპერსიის განტოლებას:

$$\boxed{\omega^4 + \left(a_1 + ib_1\right)\omega^2 + a_2 + ib_2 = 0}$$

დისპერსიის განტოლების ამონახსნები აღწერენ წრფივ შეშფოთებათა მდგრადობის თვისებებს

ამოცანა: თავისუფალი ნორმირების პარამეტრების (δ–ების) შერჩევით მოვახდინოთ კომპლექსური წევრების განულება.

რადიალური ნორმირების პარამეტრების მნიშვნელობები:

$$\boxed{\delta_B = -\frac{3}{2}\beta_B + \frac{1}{2}\beta_\rho - \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\delta_P = -\frac{3}{2}\beta_B + \frac{1}{2}\beta_\rho + \frac{\beta_P}{\gamma} - \frac{3}{2}}$$

$$\boxed{\delta_V = \frac{1}{2} - \frac{\beta_\rho}{2} + \frac{\beta_B}{2}}$$

$$\boxed{\delta_\Sigma = \delta_P}$$

წრფივი შეშფოთებების რადიალური ნორმირების წესი ითვლება შეუშფოთებელი მდგომარეობის თვისებებიდან.

გამარტივებული დისპერსია:

$$\boxed{\omega^4 - a_1\omega^2 + a_2 = 0}$$

$$a_1 = \Omega_0^2 + \left(V_A^2 + c_s^2\right)\left(k^2 - \frac{3}{4r_0^2}\right) + \frac{V_A^2}{4r_0^2}(3\beta_B^2 + \beta_\rho^2 - 4\beta_B\beta_\rho - 5)$$

$$a_2 = k_z^2\Omega_0^2\left(V_A^2 + c_s^2\right).$$

სადაც

$$V_A^2 = \frac{B_{\varphi 0}^2}{4\pi\rho_0}$$ ალვენის სიჩქარე

$$c_s^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$$ ბგერის სიჩქარე

მდგრადობის ანალიზი

დისპერსიის განტოლების ამონახსნები: $$\omega^2 = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

ექსპონენციალური არამდგრადობა: $\omega^2 < 0$

ამონახსნის თვისება: $\omega^2 > 0$

შერეული ტიპის არამდგრადობისათვის საჭიროა ფესქვეშა გამოსახულების უარყოფითობა:

$$\boxed{\frac{a_1^2}{4} < a_2}$$

სიხშირის კომპონენტები ($\omega_1, \sigma \in \mathrm{Re}$):

$$\boxed{\omega \equiv \omega_1 - i\sigma},$$

$$\sigma = \left(\sqrt{\frac{a_2}{4}} - \frac{a_1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{და} \quad \omega_1 = \left(\sqrt{\frac{a_2}{4}} + \frac{a_1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

არამდგრადობის პირობა: $\boxed{\sigma > 0}$

$$\Delta_r + \Omega_0^2 + \left(c_s^2 + V_A^2\right)\left(k^2 - \frac{3}{4r_0^2}\right) < 2\kappa k_z \sqrt{c_s^2 + V_A^2}$$

$$\Delta_r = -\frac{1}{4}\left(3\beta_B^2 + \beta_\rho^2 - 4\beta_B\beta_\rho - 5\right)\frac{V_A^2}{r_0^2}$$

სტრატიფიკაციით გამოწვეული მოდიფიკაცია

სტრატიფიკაციის ეფექტი მდგრადობაზე

კლასიკური მაგნიტობრუნვითი არამდგრადობა:

$$\Omega_0^2 + \left(c_s^2 + V_A^2\right)\left(k^2 - \frac{3}{4r_0^2}\right) < 2\Omega_0 k_z \sqrt{c_s^2 + V_A^2}$$

სტაბილიზაციის ეფექტი: $\Delta_r > 0$

დესტაბილიზაციის ეფექტი: $\Delta_r < 0$

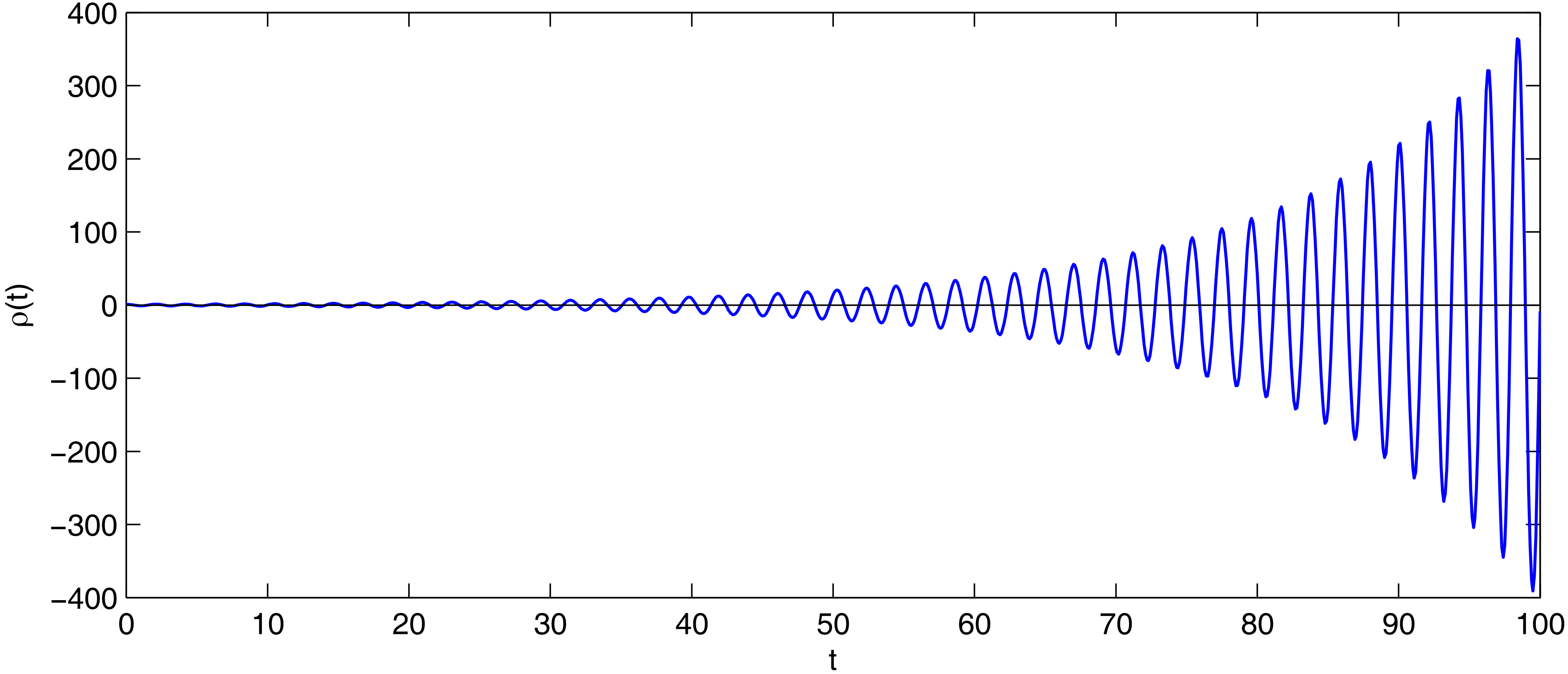
სტრატიფიკაცია (Van der Swaluw et al. 2005)-დან: $\Delta_r = \frac{(a+1)(a+9)}{16}\frac{V_A^2}{r_0^2}$

დესტაბილიზაცია: $\boxed{-9 < a < -1}$

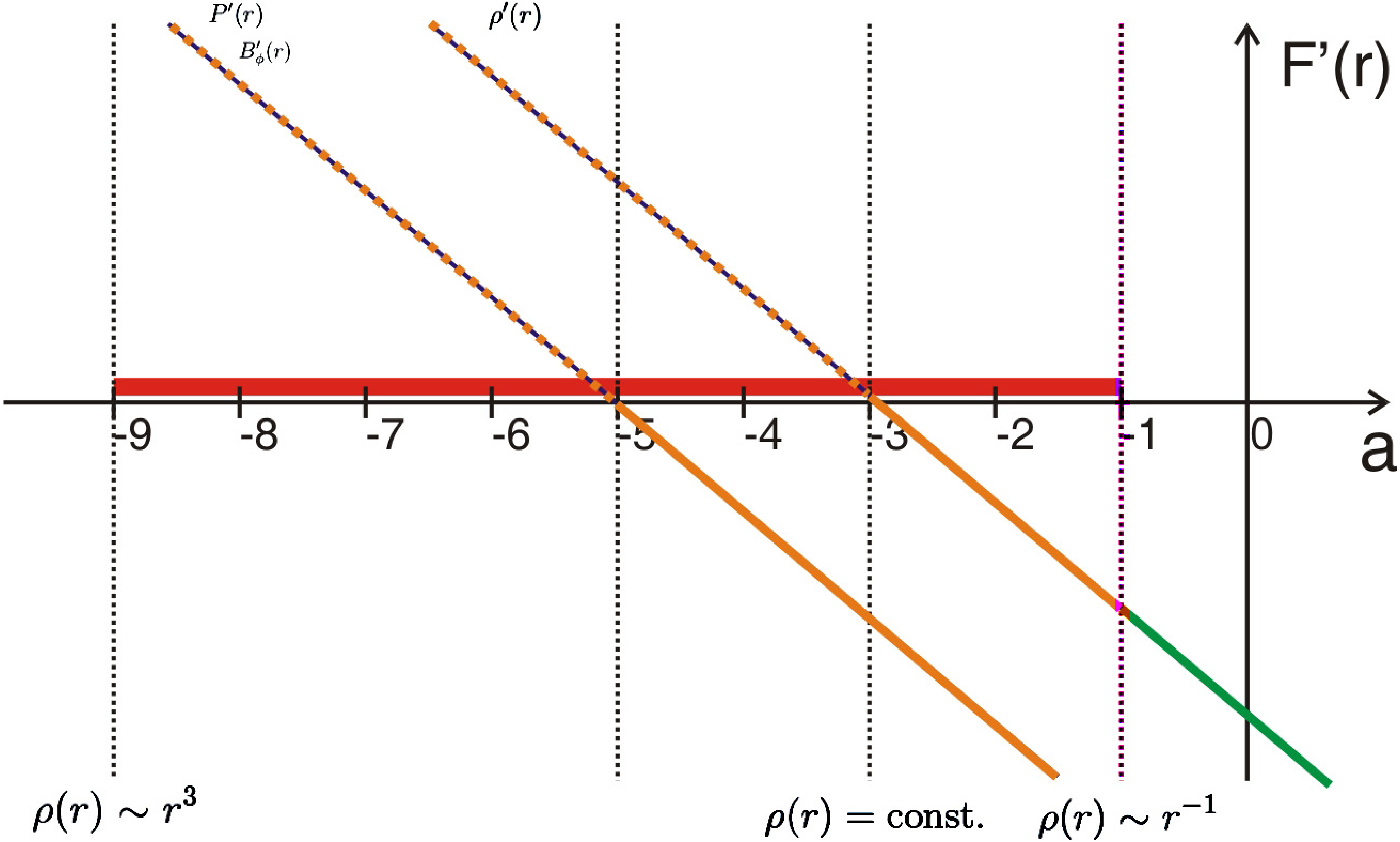
წრფივი შეშფოთებების დინამიკა:

$$\rho'(\vec{r},t) \sim \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\delta_\rho} \cos(rk_r + \varphi_r)\cos(zk_z + \varphi_z) \times \cos(\omega_1 t + \varphi_t) \cdot \exp(\sigma t)$$

ტალღური არამდგრადობა ("overstability")



დისკის რადიალური სტურქტურა და მაგნიტობრუნვითი არამდგრადობის მოდიფიკაცია



დასკვნა:

მაგნიტობრუნვითი არამდგრადობა რადიალურად არაერთგვაროვან დისკებში:

რიცხვითი ამოხსნა (Van der Swaluw et al. 2005):

- მ-ბ არამდგრადობა არსებობს არაერთგვ. დისკებში (V_A ~ Cs)
- ყველაზე არამდრგადი მოდა (ზრდის მაქს. ინკრიმენტი);

ანალიზური ამოხსნი (სადიპლომო ნაშრომი):

- სრული მ.ჰ.დ. სპექტრი ნებისმიერი პარამეტრ.: V_A, Cs, Ω_0 ;
- დისკის რადიალური სტრუქტურის ზეგავლენა არამდრგადობაზე:

☞ სუსტი და საშუალო სტრატიფიკაცია აძლიერებს მ.ბ. არამდგრადობას

☞ ძლიერი სტრატიფიკაცია ასუსტებს მ.ბ. არამდგრადობას

მადლობთ ყურადღებისათვის