ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

სალომე მჭედლიძე

ასიმეტრიული მოდების მდგრადობა და ვარსკვლავთწარმოშობა გალაქტიკის ფარული მასის ველში

სამაგისტრო პროგრამა "ფუნდამენტური ფიზიკა"

ასტროფიზიკის კათედრა

ნაშრომი შესრულებულია ფიზიკის მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი:
ალექსანდრე თევზაძე, ასოც. პროფ.
ასტროფიზიკის კათედრა, ფიზიკის დეპარტამენტი,
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

თბილისი, 2017

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Faculty of Exact and Natural Sciences

Salome Mtchedlidze

Stability of Non-radial Modes and Star Formation in the Galactic Dark Matter Field

Masters Programme "Fundamental Physics"
Chair of Astrophysics

A thesis submitted for the Masters degree in Physics

Supervisor:
Alexander Tevzadze, Asoc. Prof.
Chair of Astrophysics, Department of Physics
Faculty of Exact and Natural Sciences

Tbilisi, 2017

სარჩევი

ანოტაცია

სამაგისტრო ნაშრომში განხილულია კუმშვადი იზოთერმული გარემოს გრავიტაციული მდგრადობა გალაქტიკის ფარული მასის ველში. ამისათვის, ვარსკვლავური ნივთიერების სიმკვრივე და ფარული მასის პოტენციალი გაშლილია სფერულ ჰარმონიკებად და ჩატარებულია წრფივი მდგრადობის ანალიზი. დისპერსიული განტოლება არარადიალური მოდებისათვის მიღებულია ზოგადი შემთხვევისათვის. სფერულად სიმეტრიული მდგომარეობისათვის ნეიტრალური გრავიტაციული მდგრადობის პირობის დაშვებით კი მიღებულია მდგრადობის კრიტერიუმები მაღალი რიგის მულტიპოლებისათვის.

ნაშრომში მიღებულია კავშირი ხილული, ბარიონული ნივთიერების სიმკვრივესა და ფარული მასის გრავიტაციული პოტენციალის სფერულ ჰარმონიკებს შორის. ფარული მასის ასიმეტრია, რომელიც შეიძლება აღიწეროს დაბალი რიგის სფერული ჰარმონიკების გამოყენებით, დაკავშირებულია დაკვირვებადი მატერიის მაღალი რიგის სფერული ჰარმონიკების განაწილებასთან. ამგვარად, ბარიონული მატერიის ასიმეტრია - მაგ. გალქტიკებში ვარსკვლავური მასის განაწილების ასიმეტრია, კავშირშია ფარული მასის ჰალოს ასიმეტრიასთან, რითიც განპირობებულია ლოკალურად ჯინსის მასის კრიტერიუმის მოდიფიკაცია.

მიღებული შედეგი შეგვიძლია გამოვიყენოთ გალაქტიკებში ვარსკვლავთწარმოშობის პროცესების შესასწავლად, სადაც ფარული მასის პოტენციალი გავლენას ახდენს ლოკალური გრავიტაციული არამდგრადობის პროცესზე. მეორე მხრივ, ხილული მასის ანიზოტროპიის ცოდნა საშუალებას მოგვცემს გამოვიკვლიოთ ფარული მასის ჰალოს თვისებები.

Abstract

Gravitational stability of the compressible isothermal media is studied in the asymmetric gravitational field of the galactic dark matter. For this purpose we expand density of the stellar matter and gravitational potential into spherical harmonics and study the linear stability criteria of the non-radial modes. We derive the dispersion equation of the non-radial modes in general case. Assuming marginal gravitational stability of spherically symmetric state we derive the stability criteria for higher order multipoles.

We have shown the link between the spherical harmonics of the dark matter potential and spherical harmonics of the observed baryonic density for the non-radial modes that are unstable to the Jeans mechanics. It seems that the dark matter asymmetry that can be described using a single spherical harmonic can be linked with a sum of the higher order spherical harmonics of the observed matter distribution. Hence, any asymmetry of the baryonic matter, e.g. asymmetry of the stellar mass distribution in a galaxy can be linked to the dark matter halo asymmetry modifying the Jeans mass criterion locally.

The problem can be used to analyze the dynamics of star formation in galaxies, where local gravitational stability is significantly modified by the cold dark matter halo of the galaxy. On the other hand, any anisotropy of the stellar mass distribution can constrain dark matter halo properties that strongly differ for the different dark matter candidates.

1 შესავალი

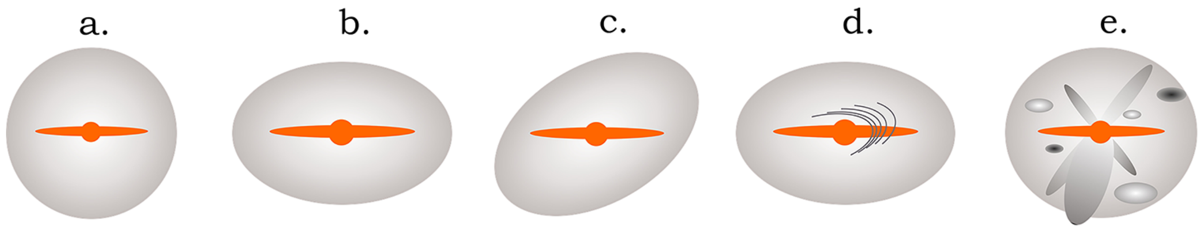
გრავიტაციული არამდგრადობა სამყაროს დიდმასშტაბოვანი სტრუქტურების წარმოშობის ძირითადი მექანიზმია. გრავიტაციული კლასტერიზაციის შედეგად ჩამოყალიბდნენ გალაქტიკები და ვარსკვლავები ამ გალაქტიკებში. ამ პროცესში თვითგრავიტაციის ძალები ძლევენ რა თერმოდინამიკურ ძალებს, იწვევენ დიფუზიური ობიექტების საკუთარი სიმძიმის ქვეშ კოლაფსს და მასიური ობიექტების ფორმირებას. პროცესის აღწერა უწყვეტი გარემოს მიახლოებაში შესაძლებელია ჯინსის არამდგრადობის საშუალებით (Jeans 1902), როდესაც შეშფოთებათა ანალიზის საშუალებით ხდება კუმშვადი შეშფოთებების თვითგრავიტაციის ძალებით მოდიფიკაციის ანალიზური შესწავლა (იხ. მაგ. Binney & Tremaine 2007).

გალაქტიკებში ვარსკვლავების წარმოშობის პროცესი დამოკიდებულია გალაქტიკური გრავიტაციული პოტენციალის ფორმაზე, რომელიც ყალიბდება როგორც ხილული კომპონენტის (ვარსკვლავების, სფერული გროვების, ვარსკვლავშორისი გარემოს), ასევე ფარული მასის ზეგავლენით. ცნობილია, რომ ფარული მასის გრავიტაციული პოტენციალი დომინირებს ხილული მასის ზეგავლენაზე. დღეისათვის, ფარული მასის დაკვირვების ერთადერთ გზას წარმოადგენს მისი არაპირდაპირი დაკვირვება, ანუ იმ ზემოქმედების შესწავლა, რასაც ფარული მასა ახდენს მაგალითად ვარსკვლავების დაბადებაზე.

ფარული მასა გრავიტაციულად ზემოქმედებს გალაქტიკაში ვარსკვლავთწარმოშობის პროცესზე: მოლეკულური ღრუბლის კრიტიკული მასა, რომელიც აუცილებელია გრავიტაციული კოლაფსის დასაწყებად (ჯინსის მასა) დამოკიდებულია გალაქტიკაში გრავიტაციული პოტენციალის ლოკალურ მნიშვნელობაზე. ამ მხრივ, შებრუნებული ამოცანის ფორმულირებით, შესაძლებელია ხილული ვარსკვლავების მასების განაწილებაზე დაკვირვებით ვივარაუდოთ გრავიტაციული პოტენციალის ლოკალური მნიშვნელობა, ანუ შესაძლებელია დავადგინოთ ფარული მასის განაწილების ფუნქცია.

ფარული მასის გრავიტაციული ველის ზეგავლენა ხილული მასის ჯინსის არამდგრადობაზე შესწავლილია სხვადასხვა მიახლოებაში (იხ. Das & Jog 1999, Jog 2013, Ghosh & Jog, 2014, Freundlich et al 2014, მჭედლიძე 2015). ნაშრომებში ნაჩვენებია, რომ გარეშე მიმოქცევითი ველი შეიძლება იყოს დამრღვევი, რაც ხელს უშლის ჯინსის არამდგრადობის განვითარებას, და კუმშვადი, რაც ხელს უწყობს მას. დამრღვევი ველის პირობებში გრავიტაციული კოლაფსისათვის საჭიროა სუპერ ჯინსის მასა, ხოლო კუმშვადი ველისათვის კოლაფსი მიმდინარეობს ჯინსის მასაზე ნაკლები მასის პირობებშიც. ნაჩვენებია, რომ გარეშე ველის ლოკალური ზემოქმედება დამოკიდებულია გარეშე პოტენციალის ფორმაზე: ველი დამრღვევია, თუკი პოტენციალი ჩაზნექილია, და კუმშვადია, თუკი ამოზნექილია. გალაქტიკის ველში ჯინსის არამდგრადობა აღწერს ვარსკვლავების ჩამოყალიბების პროცესს. ამ მხრივ, გალაქტიკის ცენტრალურ უბნებში, სადაც გრავიტაციული პოტენციალი ამოზნექილია, ვარსკვლავების მასა უნდა აღემატებოდეს სტანდარტული ჯინსის მასას, ხოლო გალაქტიკის პერიფერიაში სადაც პოტენციალი ჩაზნექილია, შესაძლებელი უნდა იყოს ჯინსის მასაზე ნაკლებად მასიური ვარსკვლავების წარმოშობა.

უკანასკნელი დაკვირვებები გვიჩვენებენ, რომ გალაქტიკების ფარული მასის ჰალოს არ გააჩნია სფერულად სიმეტრიული განაწილება. ფარული მასის ადრეული მოდელები განიხილავდნენ ჰალოს ელიფსოიდურ, ბიაქსიალურ ან ტრიაქსიალურ ასიმეტრიებს. დაკვირვებები მიგვანიშნებენ, რომ ფარული მასის განაწილებას შეიძლება გააჩნდეს გაცილებით უფრო რთული სტრუქტურა. ირმის ნახტომის მაგალითზე განიხილება ფარული მასის ჰალო, რომელსაც გააჩნია კაუსტიკური რგოლები ან სხვა შიდა, დღემდე დაუკვირვებელი ფარული სტრუქტურები (Duffy & Sikivie 2008, Dolag et al. 2012, Bonnivard et al. 2015, Svensmark et al. 2015). საინტერესოა, რომ ჩვეულებრივ, ფარული მასის სხვადასხვა კანდიდატებს შეუძლიათ გამოიწვიონ სხვადასხვა ტიპის ასიმეტრია: მაგალითად კაუსტიკური რგოლების დადასტურება იქნება ახალი არგუმენტი აქსიონური ფარული მასის მოდელისათვის (Sikivie 2011). ამ მხრივ, ფარული მასის ასიმეტრიის თვისებების დადგენა დაგვეხმარება არა მხოლოდ გალაქტიკების გრავიტაციული პოტენციალის უკეთესად შესწავლაში, არამედ თავად ფარული მასის ბუნების გარკვე-



სურ 1: გალაქტიკის ფარული მასის განაწილების თეორიული მოდელები. ნახაზზე a) ნაჩვენებია გალაქტიკის ფარული მასის ჰალოს კლასიკური სურათი, როდესაც ითვლება, რომ ფარული მასა ქმნის სფერულ ჰალოს, რომლის ზომაც მნიშვნელოვნად აღემატება გალაქტიკის ზომას. ნახაზზე b) ნაჩვენებია ფარული მასის ელიფსოიდური ასიმეტრია, ხოლო ნახაზი c) გვიჩვენებს ფარული მასის განაწილებას, როდესაც გააჩნია სამი განსხვავებული ელიფსოიდური ასიმეტრია: ე.წ. ტრიაქსიალური ასიმეტრია. ნახაზი d) გვიჩვენებს ფარული მასის აქსიონურ მოდელს, როდესაც გალაქტიკის ბრუნვის მრუდში შესაძლებელია გამოჩნდეს ფარული მასის კაუსტიკური რგოლების ზეგავლენა, ხოლო ნახაზი e) გვიჩვენებს ზოგადი ასიმეტრიის შემთხვევას, როდესაც ფარული მასის ჰალოს შეიძლება გააჩნდეს როგორც გლობალური დაბალი რიგის მულტიპოლური ასიმეტრია, ასევე ლოკალური ფარული სტრუქტურები.

ვაში.

სამაგისტრო ნაშრომში წარმოდგენილი კვლევის ამოცანაა ჯინსის არამდგრადობის თვისებების შესწავლა ფარული მასის გრავიტაციული პოტენციალის ნებისმიერი შესაძლო ასიმეტრიის პირობებში. ამისათვის საჭიროა არასფერულად სიმეტრიული შეშფოთებების განხილვა და გრავიტაციული მდგრადობის დისპერსიული განტოლების მიღება. ზოგად შემთხვევაში, ასიმეტრიული შეშფოთებების მულტიპოლური გაშლის გამოყენებით შესაძლებელია დისპერსიული განტოლების მიღება დიფერენციალური ფორმით, რომელიც დააკავშირებს ჯინსის არამდგრადობის მახასიათებელ ზრდის ინკრიმენტს სიმკვრივის შეშფოთებების ასიმეტრიის პარამეტრებთან. სამაგისტრო ნაშრომში გამოყენებული მათემატიკური მიდგომა ხელსაყრელია მაღალი რიგის ასიმეტრიების საკვლევად, თუმცა განსხვავდება გალაქტიკების დინამიკის კვლევის კლასიკური მიდგომებისაგან. ერთი მხრივ, ეს იწვევს ამოცანის მათემატიკური აღწერის გართულებას, თუმცა მეორე მხრივ მიღებული შედეგები უკეთესად აღწერენ მაღალი რიგის მულტიპოლურ ასიმეტრიებს გალაქტიკურ ფარული მასის ველში.

გრავიტაციული პოტენციალისა და სიმკვრივის განაწილების ერთმანეთთან კავშირი გალაქტიკების ფიზიკის კლასიკური ამოცანაა. თუმცა ჩვენ მიერ განხილული ამოცანა არ წარმაოდგენს სტატიკური წყვილის პოვნის ანალიზურ პრობლემას. სტატიკურ შემთხვევაში გრავიტაციული ველის ნებისმიერი ასიმეტრია დაკავშირებული უნდა იყოს სიმკვრივის ზუსტად ანალოგიურ ასიმეტრიასთან. ჩვენ მიერ განხილული ამოცანა დინამიური ხასიათისაა და დაკავშირებულია გალაქტიკის ევოლუციისა და ვარსკვლავთწარმოშობის პროცესის ისტორიასთან. თანამედროვე კოსმოლოგიური მოდელი წინასწარმეტყველებს ცივი ფარული მასის მოდელს (λCDM). ამ წარმოდგენით ფარული მასის სითხეს თითქმის არ გააჩნია "ტემპერატურა"და შესაბამისად არ არის ფარული "წნევა". ფარული მასის ჰალო გალაქტიკის ჩამოყალიბებისას და დღეს უნდა იყოს თითქმის უცვლელი სახით. მეორე მხრივ, ფარული მასის ასიმეტრია ადრეულ გალაქტიკაში გამოიწვევდა გრავიტაციული პოტენციალის ასიმეტრიას. ეს ასიმეტრია თამაშობს წყაროს როლს თვითგრავიტაციის ტალღურ განტოლებაში, რომელიც განსაზღვრავს ჯინსის არმადგრადობის თვისებებს და ვარსკვლავთწარმოშობის დინამიკას. შესაბამისად ხილული მასის განაწილებაში, მაგ. ვარსკვლავების მასის განაწილებაში შესაძლებელია გაჩნდეს ფარული მასის ასიმეტრიისაგან განსხვავებული არარადიალური მოდები. სწორედ ამ მოდების კვლევას ეძღვნება სა-

მაგისტრო ნაშრომი.

სამაგისტრო ნაშრომის მეორე თავში განხილულია ჯინსის არამდრადობის თვისებები გარეშე გრავიტაციულ ველში გალაქტიკის ვარსკვლავთწარმოშობის კონტექსტში. ფიზიკური სიდიდეები გაშლილია სფერულ ჰარმონიკებად და დისპერსიული განტოლება არარადიალურად სიმეტრიული შეშფოთებებისათვის. მესამე თავში გამოყვანილია სფერულად სიმეტრიული გრავიტაციული მდგრადობის პირობა. მეოთხე თავში ზოგადი დისპერსიული განტოლებიდან ამოხსნილია დაბალი რიგის მულტიპოლების დინამიკის აღმწერი განტოლებები. ნაჩვენებია რამდენიმე კერძო შემთხვევა დიპოლური და კვადრუპოლური ასიმეტრიისა. ნაშრომი შეჯამებულია მეხუთე თავში. ნაშრომში გამოყენებული სფერული ჰარმონიკების ზოგიერთი ანალიზური თვისება მოცემულია დანართში A, ხოლო დანართი B-ში გამოთვლილია ასოცირებული ლეჟანდრის პოლინომების ზოგიერთი ინტეგრალი, რომელთა აღება საჭირო გახდა დისპერსიული განტოლების ანალიზური ფორმის მისაღებად.

2 ჯინსის არამდგრადობა გარეშე ველში

კუმშვადი იზოთერმული გარემოს გრავიტაციული მდგრადობა გარეშე გრავიტაციული ველის გათვალისწინებით შესაძლებელია აღიწეროს შემდეგი მეორე რიგის განტოლებით ხილული მასის სიმკვრივის წრფივი შეშფოთებებისათვის (იხ. მაგ. მჭედლიძე 2015, Jog 2013):

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \nabla^2 \left(c_s^2 \rho' \right) - 4\pi G \rho_0 \rho' = \rho' \nabla^2 \Phi_{\text{ext}} + \nabla \Phi_{\text{ext}} \cdot \nabla \rho'. \tag{1}$$

ამ შემთხვევაში გრავიტაციული პოტენციალი გაყოფილია ხილული მასის წონასწორულ (Φ_0), შეშფოთებულ (Φ') და ფარული მასის გრავიტაციულ პოტენციალად (Φ_{ext}):

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi' + \Phi_{\text{ext}} \ ,$$

ხოლო ხილული მასის სიმკვრივე წონასწორულ და შეშფოთებულ კომპონენტებად:

$$\rho = \rho_0 + \rho'.$$

(1) განტოლების მარცხენა მხარე აღწერს გარემოს სიმკვრივის შეშფოთებების ევოლუციას თვითგრავიტაციისა და კუმშვადი ძალების ზეგავლენით, ხოლო განტოლების მარჯვენა მხარე აღწერს პროცესზე გარეშე ფარული მასის ველის ზეგავლენას. აღებულ ფიზიკურ მოდელში იგულისხმება მუდმივი, დროში უცვლელი ფარული მასის გრავიტაციული პოტენციალი, წონასწორული ხილული (ბარიონული) მასის გრავიტაციული პოტენციალი და სიმკვრივე, და დროში ცვლადი გრავიტაციული ველისა და სიმკვრივის შეშფოთებები. ამ მიახლოებაში შესაძლებელია დროითი ფურიე გაშლის გამოყენება და სხვადასხვა სიხშირის ჰარმონიკების მდგრადობის ამოცანის შესწავლა:

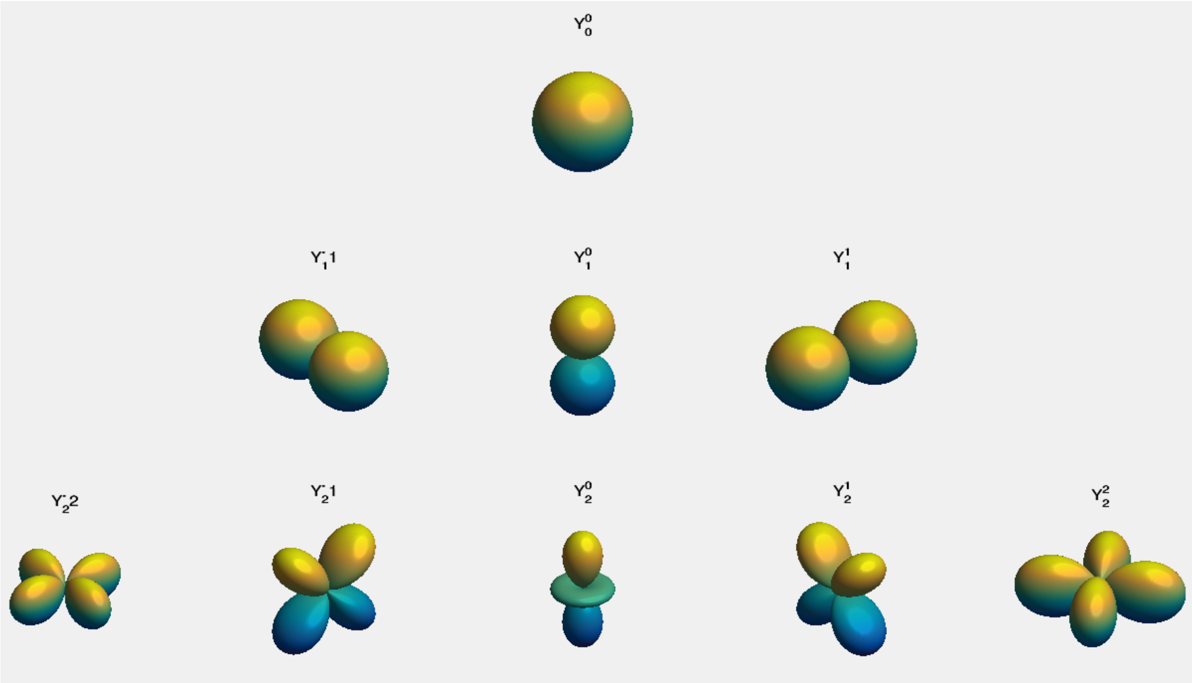
$$\begin{pmatrix} \rho' \\ \Phi' \end{pmatrix} \propto \exp\left(i\omega t\right) \ .$$

შესაბამისად, (1) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\nabla^2 \left(c_s^2 \rho' \right) + \left(\omega^2 + 4\pi G \rho_0 \right) \rho' + \rho' \nabla^2 \Phi_{\text{ext}} + \nabla \Phi_{\text{ext}} \cdot \nabla \rho' = 0 \tag{2}$$

მიღებული განტოლებით მდგრადობის ამოცანა კლასიკური მეთოდებით ჩატარებულია ნაშრომში Jog 2013. თუმცა, ავტორების მიერ გამოყენებულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და უგულვებელყოფილია ფარული ველის პოტენციალის გრადიენტი. ფარული ველის რადიალური განაწილების ფუნქციის ზოგიერთი ფორმა გამოკვლეულია საბაკალავრო ნაშრომში მჭედლიძე 2015, თუმცა ამ ნაშრომშიც უგულებელყოფილია სიმრუდისა და ასიმეტრიის ეფექტები და ამოცანა განხილულია სრული სფერული სიმეტრიის მიახლოებაში.

სამაგისტრო ნაშრომის ამოცანაა ასიმეტრიული მოდების მდგრადობის მახასიათებლების შესწავლა გალაქტიკების ფარული მასის ველში. ამ ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა ა) ფარული მასისა და გალაქტიკის ხილული მასის სიმკვრივის რადიალური განაწილების გათვალისწინება, რაც გამორიცხავს გრადიენტული წევრების უგულებელყოფას, და ბ) ასიმეტრიული ეფექტების შესწავლას, რაც მოითხოვს სფერული სიმეტრიიდან გადახრას. ვარსკვლავთწარმოშობა გალაქტიკურ გარემოში ძლიერად ასიმეტრიული პროცესია, რადგანაც მოლეკულური ღრუბლების ზომა, სადაც მიმდინარეობს ვარსკვლავების



სურ 2: სურათზე ნაჩვენებია სხვადასხვა რიგის სფერული ჰარმონიკები (Y_l^m). $m = 0$ შეესაბამება ღერძულად სიმეტრიულ ჰარმონიკებს (შუა ვერტიკალური სვეტი). პოლოიდალური l რიცხვის ზრდა (ზევიდან ქვევით) საშუალებას გვაძლევს აღვწეროთ უფრო მაღალი რიგის არა-რადიალური ასიმეტრიული სტრუქტურები. სურათზე ნაჩვენებია დაბალი რიგის ჰარმონიკები - ზევიდან ქვევით: $l = 0, 1, 2$.

ფორმირება, მნიშნელოვნად ნაკლებია გალაქტიკის რადიუსზე. ამ ტიპის პროცესების აღსაწერად საჭირო იქნება ძლიერად ასიმეტრიული შეშფოთებების მდგრადობის თვისებების შესწავლა.

ასიმეტრიული მდგრადობის შესასწავლად ვიყენებთ მულტიპოლურ გაშლას, როდესაც შესაძლებელია ცვლადების გაშლა სფერულ ფუნქციებად. დასახული ამოცანიდან გამომდინარე საჭიროა როგორც წრფივი შეშფოთებული სიდიდეების მულტიპოლური გაშლა

$$\rho'\left(\mathbf{r}\right) = \rho'\left(r, \varphi, \theta\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \varrho_{lm}\left(r\right) Y_l^m\left(\varphi, \theta\right)$$

ასევე ხილული მასის სიმკვრივის წონასწორული ფუნქციის გაშლა:

$$\rho_0\left(\mathbf{r}\right) = \rho_0\left(r, \mathbf{\Omega}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \overline{\varrho}_{lm}\left(r\right) Y_l^m\left(\mathbf{\Omega}\right) \ .$$

ვთვლით, რომ შესაძლებელია ხილული მასის შეშფოთებების ზემოქმედების უგულებელყოფა ფარული მასის ჰალოზე და ვიყენებთ სტატიკური ფარული მასის გრავიტაციული პოტენციალის მულტიპოლურ გაშლას:

$$\Phi_{\text{ext}}\left(\mathbf{r}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \Phi_{lm}\left(r\right) Y_l^m\left(\varphi, \theta\right)$$

მულტიპოლური გაშლებისას გამოყენებულია სფერული ჰარმონიკები Y_l^m, სადაც l და m ინდექსები აღწერენ აქსიალურ და პოლოიდალურ თვისებებს:

$$Y_l^m(\varphi,\theta)=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos(\theta))\,\mathrm{e}^{im\varphi}\ . \tag{3}$$

სფერული ფუნქციები წარმოდგენილია ასოცირებული ლეჟანდრის პოლინომების სახით P_l^m ხოლო ვექტორული ოპერატორებისათვის სფერულ კოორდინატებში გამოყენებულია შემდეგი განტოლებები:

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\mathbf{\Omega}}\right)$$

და

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\equiv\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{\Omega}^2}$$

გამოვიყენოთ იზოთერმული მიახლოება, რომელშიც ბგერის სიჩქარე მუდმივი სიდიდეა ($c_s^2=const.$) და გადავწეროთ ტალღური განტოლება (2) სფერული ჰარმონიკების გამოყენებით. რადგანაც განტოლების წევრები არაწრფივია მულტიპოლური გაშლის მიმართ, გამოვთვალოთ წევრები რიგ-რიგობით. იზოთერმულ შემთხვევაში (2) განტოლების პირველი წევრისათვის მივიღებთ:

$$\mathrm{c_s^2}\nabla^2\varrho'=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{c_s^2}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varrho_{lm}}{\partial r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\varrho_{lm}\right]Y_l^m(\mathbf{\Omega})$$

მიღებული წევრის ინტეგრებით სრულ სხეულოვან კუთხეზე გვექნება:

$$\int\mathrm{c_s^2}\nabla^2\varrho'\mathrm{d}\mathbf{\Omega}=\sqrt{4\pi}\mathrm{c_s^2}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varrho_{00}(r)}{\partial r}\right)\right] \tag{4}$$

(2) განტოლების მეორე წევრისათვის სრული კუთხით ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\int\left(\omega^2+4\pi G\rho_0\right)\rho'\mathrm{d}\mathbf{\Omega}&=\sqrt{4\pi}\varrho_{00}\omega^2+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(-1)^m\,4\pi G\bar{\varrho}_{lm}\varrho_{l,-m}\\&=\sqrt{4\pi}\varrho_{00}\omega^2+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(-1)^m\,4\pi G\bar{\varrho}_{l,-m}\varrho_{l,m}\end{aligned} \tag{5}$$

გარეშე ველის გრავიტაციული პოტენციალის ლაპლასიანის სფერულ ჰარმონიკებში გადაწერით

$$\nabla^2\Phi_{\text{ext}}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-l(l+1)\right]\Phi_{lm}(r)\,Y_l^m(\mathbf{\Omega})$$

შესაძლებელია (2) განტოლების მესამე წევრის გამოთვლა შემდეგი სახით:

$$\int\rho'(\mathbf{r})\,\nabla^2\Phi_{\text{ext}}\mathrm{d}\mathbf{\Omega}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(-1)^m\,\frac{\varrho_{lm}(r)}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-l(l+1)\right]\Phi_{lm}(r) \tag{6}$$

(2) განტოლების უკანასკნელი წევრის გამოთვლა კი შესაძლებელია შემდეგი სახით:

$$\int \nabla\rho' \cdot \nabla\Phi_{\mathrm{ext}} \mathrm{d}\mathbf{\Omega} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{m'=-l'}^{l'} \frac{\partial \varrho_{lm}}{\partial r}\frac{\partial \Phi_{l'm'}}{\partial r}\int Y_l^m Y_{l'}^{m'} d\mathbf{\Omega}$$
$$+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{m'=-l'}^{l'} \frac{\varrho_{lm}\Phi_{l'm'}}{r^2}\int \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi}\frac{\partial Y_{l'}^{m'}}{\partial \varphi} d\mathbf{\Omega}$$
$$+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{m'=-l'}^{l'} \frac{\varrho_{lm}\Phi_{l'm'}}{r^2}\int \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta}\frac{\partial Y_{l'}^{m'}}{\partial \theta} d\mathbf{\Omega}$$

ასოცირებული ლეჟანდრის ფუნქციების კვადრატული ინტეგრალური ფუნქციების შემოტანით: $\mathcal{I}_{ll'}^m$, $\mathcal{J}_{ll'}^m$, $\mathcal{K}_{ll'}^m$ (იხ. განტოლებები დანართიდან A.11, A.14 და A.18) შესაძლებელია მიღებული წევრის მულტიპოლური წარმოდგენის გამარტივება:

$$\begin{aligned}
&\int \nabla\rho' \cdot \nabla\Phi_{\mathrm{ext}} \mathrm{d}\mathbf{\Omega} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} (-1)^m \frac{\partial \varrho_{lm}}{\partial r}\frac{\partial \Phi_{l,-m}}{\partial r} + \\
&+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{m'=-l'}^{l'} \frac{\varrho_{lm}\Phi_{l'm'}}{r^2} 2\pi\left(-mm'\right)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}\frac{(l'-m')!}{(l'+m')!}}\delta_{m'm}\mathcal{J}_{ll'}^m \\
&+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{m'=-l'}^{l'} \frac{\varrho_{lm}\Phi_{l'm'}}{r^2}\frac{\pi}{2}\delta_{m'm}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}\frac{(l'-m')!}{(l'+m')!}} \\
&\times\left[(l+m)(l-m+1)(l'+m)(l'-m+1)\mathcal{I}_{ll'}^{m-1} \quad - \quad (l+m)(l-m+1)\mathcal{K}_{ll'}^m\right. \\
&\left. -(l'+m)(l'-m+1)\mathcal{K}_{l'l}^m + \mathcal{I}_{ll'}^{m+1}\right]
\end{aligned} \tag{7}$$

მიღებული წევრების ჩასმით (2) განტოლებაში, მივიღებთ სიმკვრივის შეშფოთებების მდგრადობის აღმწერ განტოლების ფორმას სფერულ ჰარმონიკებში:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{c}_\mathrm{s}^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varrho_{00}}{\partial r}\right) + \omega^2\varrho_{00} + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(-1)^m 4\pi G\frac{\overline{\varrho}_{l,-m}}{\sqrt{4\pi}}\varrho_{l,m} \\
&+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(-1)^m\frac{\varrho_{lm}}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - l(l+1) + \frac{r^2}{\varrho_{lm}}\frac{\partial \varrho_{lm}}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\Phi_{l,-m}}{\sqrt{4\pi}} \\
&+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{m'=-l'}^{l'} \frac{\varrho_{lm}\Phi_{l'm'}}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{8r^2}\delta_{m'm}\sqrt{\frac{1}{2l+1}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\frac{1}{2l'+1}\frac{(l'-m')!}{(l'+m')!}}\times \\
&\times\left\{\left[l(l+1) + l'(l'+1) - 2m^2\right](2l+1)(2l'+1)\mathcal{I}_{ll'}^m + 4(-mm')(2l+1)(2l'+1)\mathcal{J}_{ll'}^m - \right. \\
&-2(l-m+1)(l'-m+1)\left(m^2 - ll'\right)\mathcal{J}_{l+1,l'+1}^m - 2(l-m+1)(l'+m)\left(l(l'+1)+m^2\right)\mathcal{J}_{l+1,l'-1}^m \\
&-2(l+m)(l'-m+1)\left(l'(l+1)+m^2\right)\mathcal{J}_{l-1,l'+1}^m \\
&\left.+2(l+m)(l'+m)\left((l'+1)(l+1)-m^2\right)\mathcal{J}_{l-1,l'-1}^m\right\} = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

განტოლების ამ ფორმის მისაღებად გამოყენებულია დამხმარე ფუნქციის ზოგიერთი თვისება (იხ. A12 და A13). მიღებულ განტოლებაში შესაძლებელია გამოვყოთ სფერულად სიმეტრიული და ასიმეტრიული ნაწილი. ამისათვის განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{c}_{\mathrm{s}}^{2}}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial\varrho_{00}}{\partial r}\right)+\omega^{2}\varrho_{00}+4\pi G\frac{\overline{\varrho}_{00}}{\sqrt{4\pi}}\varrho_{00}+\frac{\varrho_{00}}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\Phi_{00}}{\sqrt{4\pi}}+\frac{\partial\varrho_{00}}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Phi_{00}}{\sqrt{4\pi}}\right)\\
&+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\varrho_{lm}T_{lm}=0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

სადაც T_{lm} ანიზოტროპიის ტენზორია, რომლის გამოთვლაც შესაძლებელია ხილული მასის წონასწო-რული განაწილებისა ($\bar{\rho}_{lm}$) და ფარული მასის გრავიტაციული ველის (Φ_{lm}) კონკრეტული სიდიდეები-სათვის:

$$
\begin{aligned}
&T_{l,m}=(-1)^{m}\sqrt{4\pi}G\overline{\varrho}_{l,-m}+(-1)^{m}\frac{1}{r^{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial}{\partial r}\right)-l(l+1)+r^{2}\frac{\partial}{\partial r}\ln\left(\varrho_{lm}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\Phi_{l,-m}}{\sqrt{4\pi}}\\
&+\sum_{l'=1}^{\infty}\sum_{m'=-l'}^{l'}\frac{\Phi_{l'm'}}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{8r^{2}}\delta_{m'm}\sqrt{\frac{1}{2l+1}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\frac{1}{2l'+1}\frac{(l'-m')!}{(l'+m')!}}\times\\
&\times\Big\{\left[l\left(l+1\right)+l'\left(l'+1\right)-2m^{2}\right]\left(2l+1\right)\left(2l'+1\right)\mathcal{I}_{ll'}^{m}+\Big[4\left(-mm'\right)\left(2l+1\right)\left(2l'+1\right)\\
&-2\left(l-m+1\right)\left(l'-m+1\right)\left(m^{2}-ll'\right)\frac{(k+m+1)}{(k-m+1)}\\
&+2\left(l+m\right)\left(l'+m\right)\left(\left(l'+l\right)\left(l+1\right)-m^{2}\right)\frac{(k-m)}{(k+m)}\Big]\mathcal{J}_{ll'}^{m}\\
&-2\left(l-m+1\right)\left(l'+m\right)\left(l\left(l'+1\right)+m^{2}\right)\mathcal{J}_{l+1,l'-1}^{m}-2\left(l+m\right)\left(l'-m+1\right)\left(l'\left(l+1\right)+m^{2}\right)\mathcal{J}_{l-1,l'+1}^{m}\Big\}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ამ ფორმის მისაღებად გამოყენებულია ფორმულები (B4), (B5) დანართიდან და $k\equiv\mathrm{Min}(l,l')$. ასო-ცირებული ლეჟანდრის ფუნქციების ინტეგრალების თვისებების გამოყენებით (იხ. A11, A15, B6 და B8 - B15) და იმის გათვალისწინებით, რომ $\mathcal{E}\left(l+1,l'-1\right)=\mathcal{E}\left(l-1,l'+1\right)=\mathcal{E}\left(l,l'\right)$ შესაძლებელია ანიზოტროპიის ტენზორის T_{lm} ფორმის გამარტივება:

$$
\begin{aligned}
T_{l,m} &= (-1)^m \sqrt{4\pi} G \overline{\varrho}_{l,-m} + (-1)^m \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - l(l+1) + r^2\frac{\partial}{\partial r}\ln\left(\varrho_{lm}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\Phi_{l,-m}}{\sqrt{4\pi}} \\
&+ \frac{\Phi_{lm}}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{2r^2}\left[l\left(l+1\right)-m^2\right] + \sum_{l'=1}^{\infty}\frac{\Phi_{l'm}}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{8r^2}\sqrt{\frac{1}{2l+1}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\frac{1}{2l'+1}\frac{(l'-m)!}{(l'+m)!}}\times \\
&\left\{\Big[-4m^2\left(2l+1\right)\left(2l'+1\right) - 2\left(l-m+1\right)\left(l'-m+1\right)\left(m^2-ll'\right)\frac{(k+m+1)}{(k-m+1)}\right. \\
&+ 2\left(l+m\right)\left(l'+m\right)\left(\left(l'+l\right)\left(l+1\right)-m^2\right)\frac{(k-m)}{(k+m)}\Big]\frac{(k+m)!}{m\left(k-m\right)!} \\
&- 2\left(l-m+1\right)\left(l'+m\right)\left(l\left(l'+1\right)+m^2\right)\frac{(p+m)!}{m\left(p-m\right)!} \\
&\left.- 2\left(l+m\right)\left(l'-m+1\right)\left(l'\left(l+1\right)+m^2\right)\frac{(q+m)!}{m\left(q-m\right)!}\right\}\mathcal{E}\left(l,l'\right) + \\
&+ \sum_{l'=1}^{\text{odd}}\frac{\Phi_{l'0}}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{8r^2}\sqrt{\frac{1}{2l+1}}\sqrt{\frac{1}{2l'+1}}\left\{2ll'\left(l+1\right)\left(l'+1\right)\left[\mathcal{L}_{k+1,k+2}-\mathcal{L}_{p,p+1}-\mathcal{L}_{q,q+1}+\mathcal{L}_{k-1,k}\right]\right\} \\
&+ \sum_{l'=2}^{\text{even}}\frac{\Phi_{l'0}}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{8r^2}\sqrt{\frac{1}{2l+1}}\sqrt{\frac{1}{2l'+1}}\left\{2ll'\left(l+1\right)\left(l'+1\right)\left[\mathcal{L}_{k+1,k+1}-\mathcal{L}_{pp}-\mathcal{L}_{qq}+\mathcal{L}_{k-1,k-1}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

სადაც $p \equiv \mathrm{Min}(l+1, l'-1)$, $q \equiv \mathrm{Min}(l-1, l'+1)$.

განტოლება (11) აღწერს სისტემის როგორც სფერულად სიმეტრიული, ასევე ასიმეტრიული მდგრადობის მახასიათებლებს. გალაქტიკაში ასიმეტრიული მდგრადობის შესასწავლად დავუშვათ, რომ გალაქტიკაში სფერულად სიმეტრიული წონასწორობაა. ამ მოდელში ვუშვებთ, რომ გალაქტიკების ასაკი საკმარისია, იმისათვის რომ ნებისმიერი სფერული არამდგრადობა, რომელიც შეიძლება გამოწვეული ყოფილიყო ხილული ან ფარული მასის რადიალურ კოორდინატზე დამოკიდებულებით განვითარდა და მიაღწია სფერულად სიმეტრიულ წონასწორულ მდგომარეობას. ამ პროცესის დროს მასის რადიალური გადანაწილებით გალაქტიკა უნდა მოვიდეს ნეიტრალური წონასწორობის მდგომარეობაში. სფერულ წონასწორობაში შესაძლებელია არარადიალური მოდების მდგრადობის თვისებების დადგენაც.

სფერულად სიმეტრიულ ზღვარში ($l=0$) განტოლება (9) იღებს შემდეგ სახეს:

$$
\frac{c_s^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varrho_{00}}{\partial r}\right) + \omega^2\varrho_{00} + 4\pi G\frac{\overline{\varrho}_{00}}{\sqrt{4\pi}}\varrho_{00} + \frac{\varrho_{00}}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\Phi_{00}}{\sqrt{4\pi}} + \frac{\partial\varrho_{00}}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Phi_{00}}{\sqrt{4\pi}}\right) = 0\,. \tag{12}
$$

ნეიტრალური მდგრადობის მდგომარეობაში $\omega=0$ განტოლება იღებს შემდეგ სახეს:

$$
\frac{c_s^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varrho_{00}}{\partial r}\right) + 4\pi G\frac{\overline{\varrho}_{00}}{\sqrt{4\pi}}\varrho_{00} + \frac{\varrho_{00}}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\Phi_{00}}{\sqrt{4\pi}} + \frac{\partial\varrho_{00}}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Phi_{00}}{\sqrt{4\pi}}\right) = 0\,. \tag{13}
$$

მიღებული განტოლება ერთმანეთთან აკავშირებს წონასწორული და შეშფოთებული სიმკვრივისა და ფარული მასის სიმკვრივის სფერულად სიმეტრიულ კომპონენტებს. როგორც ჩანს, სფერულად სიმეტრიული მდგომარეობის ცხადი სახით ჩაწერის გარეშეც შესაძლებელია არარადიალური წონასწორობის პირობის ჩაწერა:

$$
\varrho_{00}\omega^2 + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\varrho_{lm}T_{lm} = 0\,. \tag{14}
$$

ხილული მასის ასიმეტრიის პარამეტრის შემოყვანით:

$$\alpha_{lm} = \frac{\varrho_{lm}}{\varrho_{00}}$$

შესაძლებელია მივიღოთ ასიმეტრიული შეშფოთებების დისპერსიული განტოლება:

$$\omega^2 = -\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\alpha_{lm}T_{lm} \tag{15}$$

სადაც ანიზოტროპიის ტენზორი ზოგად შემთხვევაში მოიცემა შემდეგი ფორმით:

$$\begin{aligned}
T_{l,m} &= (-1)^m\sqrt{4\pi}G\overline{\varrho}_{l,-m} + (-1)^m\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - l(l+1) + r^2\frac{\partial}{\partial r}\left[\ln(\alpha_{lm}) + \ln(\varrho_{00})\right]\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\Phi_{l,-m}}{\sqrt{4\pi}}\\
&+ \frac{\Phi_{lm}}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{2r^2}\left[l(l+1) - m^2\right] + \sum_{l'=1}^{\infty}\frac{\Phi_{l'm}}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{8r^2}\sqrt{\frac{1}{2l+1}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\frac{1}{2l'+1}\frac{(l'-m)!}{(l'+m)!}}\times\\
&\left\{\Big[-4m^2(2l+1)(2l'+1) - 2(l-m+1)(l'-m+1)\left(m^2 - ll'\right)\frac{(k+m+1)}{(k-m+1)}\right.\\
&+ 2(l+m)(l'+m)\left((l'+l)(l+1) - m^2\right)\frac{(k-m)}{(k+m)}\Big]\frac{(k+m)!}{m(k-m)!}\\
&- 2(l-m+1)(l'+m)\left(l(l'+1) + m^2\right)\frac{(p+m)!}{m(p-m)!}\\
&\left.- 2(l+m)(l'-m+1)\left(l'(l+1) + m^2\right)\frac{(q+m)!}{m(q-m)!}\right\}\mathcal{E}(l,l') +\\
&+ \sum_{l'=1}^{\text{odd}}\frac{\Phi_{l'0}}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{8r^2}\sqrt{\frac{1}{2l+1}}\sqrt{\frac{1}{2l'+1}}\left\{2ll'(l+1)(l'+1)\left[\mathcal{L}_{k+1,k+2} - \mathcal{L}_{p,p+1} - \mathcal{L}_{q,q+1} + \mathcal{L}_{k-1,k}\right]\right\}\\
&+ \sum_{l'=2}^{\text{even}}\frac{\Phi_{l'0}}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{8r^2}\sqrt{\frac{1}{2l+1}}\sqrt{\frac{1}{2l'+1}}\left\{2ll'(l+1)(l'+1)\left[\mathcal{L}_{k+1,k+1} - \mathcal{L}_{pp} - \mathcal{L}_{qq} + \mathcal{L}_{k-1,k-1}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

დავუშვათ, რომ ასიმეტრიის პარამეტრი არ არის დამოკიდებული რადიალურ კოორდინატზე:

$$\alpha_{lm} = constant\ .$$

ამ მიახლოებაში ვუშვებთ, რომ მაღალი რიგის მულტიპოლების რადიალური განაწილება $\varrho_{lm}(r)$ ემთხვევა სფერულად სიმეტრიული შეშფოთებების რადიალურ პროფილს $\varrho_{00}(r)$. ამ შემთხვევაში ანიზოტროპიის ტენზორი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$
\begin{aligned}
T_{l,m} &= (-1)^m \sqrt{4\pi} G \overline{\varrho}_{l,-m} + (-1)^m \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - l(l+1) + r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\ln \left(\varrho_{00} \right) \right] \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\Phi_{l,-m}}{\sqrt{4\pi}} \\
&+ \frac{\Phi_{lm}}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{2r^2} \left[l \left(l+1 \right) - m^2 \right] + \sum_{l'=1}^{\infty} \frac{\Phi_{l'm}}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{8r^2} \sqrt{\frac{1}{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \sqrt{\frac{1}{2l'+1} \frac{(l'-m)!}{(l'+m)!}} \times \\
&\Bigg\{ \Big[-4m^2 \left(2l+1 \right) \left(2l'+1 \right) - 2 \left(l-m+1 \right) \left(l'-m+1 \right) \left(m^2 - ll' \right) \frac{(k+m+1)}{(k-m+1)} \\
&+ 2 \left(l+m \right) \left(l'+m \right) \left(\left(l'+1 \right) \left(l+1 \right) - m^2 \right) \frac{(k-m)}{(k+m)} \Big] \frac{(k+m)!}{m \left(k-m \right)!} \\
&- 2 \left(l-m+1 \right) \left(l'+m \right) \left(l \left(l'+1 \right) + m^2 \right) \frac{(p+m)!}{m \left(p-m \right)!} \\
&- 2 \left(l+m \right) \left(l'-m+1 \right) \left(l' \left(l+1 \right) + m^2 \right) \frac{(q+m)!}{m \left(q-m \right)!} \Bigg\} \mathcal{E} \left(l, l' \right) + \\
&+ \sum_{l'=1}^{\text{odd}} \frac{\Phi_{l'0}}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{8r^2} \sqrt{\frac{1}{2l+1}} \sqrt{\frac{1}{2l'+1}} \left\{ 2ll' \left(l+1 \right) \left(l'+1 \right) \left[\mathcal{L}_{k+1,k+2} - \mathcal{L}_{p,p+1} - \mathcal{L}_{q,q+1} + \mathcal{L}_{k-1,k} \right] \right\} \\
&+ \sum_{l'=2}^{\text{even}} \frac{\Phi_{l'0}}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{8r^2} \sqrt{\frac{1}{2l+1}} \sqrt{\frac{1}{2l'+1}} \left\{ 2ll' \left(l+1 \right) \left(l'+1 \right) \left[\mathcal{L}_{k+1,k+1} - \mathcal{L}_{pp} - \mathcal{L}_{qq} + \mathcal{L}_{k-1,k-1} \right] \right\}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

განტოლებები (15) და (17) აღწერენ გრავიტაციული მდგრადობის პირობას ასიმეტრიული შეშფოთებებისათვის, მუდმივი, ასიმეტრიული ფარული მასის გარეშე ველში მოთავსებული სფერულად წონასწორულ მდგომარეობაში მყოფ გალაქტიკაში.

(17) განტოლება გვიჩვენებს, რომ ანიზოტროპიის ტენზორი შეიძლება გაჩნდეს შემდეგი მიზეზების გამო - პირველი მიზეზი არის ხილული მასის ასიმეტრიული განაწილების არანულოვანი კომპონენტი ($\bar{\rho}_{lm}$), ხოლო მეორე არის ფარული მასის ასიმეტრია: Φ_{lm}, $l \geq 1$. თუკი გვეცოდინება ფარული მასის ასიმეტრია, შევძლებთ ხილული მასის სიმკვრივის ასიმეტრიის გამოთვლას. ეს ნიშნავს, რომ ვარსკვლავების მასის განაწილებაში მულტიპოლური ასიმეტრიის აღმოჩენით შესაძლებელია ფარული მასის ასიმეტრიის პარამეტრების დადგენა. ანიზოტროპიის ტენზორის რთული ფორმა მიგვანიშნებს, რომ ეს კავშირი არ არის ტრივიალური: მაგალითად, ფარული მასის დიპოლურ ასიმეტრიას შეუძლია გააჩინოს ხილული მასის სიმკვრივის არა მხოლოდ დიპოლური კომპონენტი. მეორე მხრივ, სამართლიანია შებრუნებული ამოცანაც: ხილული მასის დიპოლური ასიმეტრია შეიძლება გამოწვეული იყოს ფარული მასის არადიპოლური კომპონენტით.

არარადიალური მოდების დისპერსიული განტოლება საშუალებას გვაძლევს მულტიპოლური სახით დავაკავშიროთ ხილული და ფარული მასის ასიმეტრიები. თუკი მომავალ დაკვირვებებში მოხერხდება გალაქტიკაში ვარსკვლავების მასების განაწილებაში მულტიპოლური სპექტრის აგება, ჩვენ მიერ მიღებული განტოლება ამ მონაცემებზე დაყრდნობით შეძლებს ფარული მასის ასიმეტრიის თვისებების შეზღუდვას.

3 სფერულად სიმეტრიული წონასწორობა

სფერულად სიმეტრიული მდგომარეობის ($l = 0$) განტოლება (13), გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{\varrho_{00}}\frac{\partial^2\varrho_{00}}{\partial r^2}+\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{\mathrm{c}_\mathrm{s}^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Phi_{00}}{\sqrt{4\pi}}\right)\frac{1}{\varrho_{00}}\frac{\partial\varrho_{00}}{\partial r}+\frac{1}{\mathrm{c}_\mathrm{s}^2}\left(4\pi G\frac{\overline{\varrho}_{00}}{\sqrt{4\pi}}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\Phi_{00}}{\sqrt{4\pi}}\right)=0 \tag{18}$$

სადაც იგულისხმება, რომ გალაქტიკა იმყოფება ნეიტრალური მდგრადობის მდგომარეობაში: $\omega^2 = 0$. სფერული სიმეტრია და ნეიტრალური მდგრადობა ერთმანეთთან დაკავშირებული თვისებებია და ზოგადი დაშვების შედეგია. რადგანაც გალაქტიკა მილიარდობით წელია არსებობს, ვუშვებთ, რომ დღეს იგი სფერულად წონასწორულ მდგომარეობაშია. თუკი სფერულად სიმეტრიული მასისა და გრავიტაციული პოტენციალის განაწილება იქნებოდა გრავიტაციულად არამდგრადი, ჯინსის არამდგრადობა გამოიწვევდა მასის ისეთ გადანაწილებას რომ გაებათილებინა არამდგრადობის გამომწვევი რადიალური გრადიენტები. თუმცა შესაძლებელია, რომ სფერულად სიმეტრიულ მდგომარეობაში სიხშირეს გააჩნდეს დადებითი მნიშვნელობა, რაც აღწერს რადიალურ სფერულად სიმეტრიულ ფუნდამენტური მოდის რხევებს. რადგანაც გალაქტიკა წარმოადგენს "ვარსკვლავების სითხეს'', ცნობილია, რომ ლოკალური "სითხის ტემპერატურა"არ არის აბსოლუტურად იზოტროპული. ანუ ვარსკვლავების არარეგულარული ქაოსური სიჩქარის კომპონენტს გააჩნია გამოხატული ასიმეტრია დისკის სიბრტყეში. ამ ტიპის გარემოები განიცდიან სხვადასხვა ტიპის კინეტიკურ არამდგრადობებს, რომლებიც თამაშობენ დისიპაციის როლს და მიმართული რხევების ენერგია გადაჰყავთ ქაოსური მოძრაობის ენერგიაში. ანუ, სფერულად სიმეტრიული რხევები განიცდიან დისიპაციას რასაც ასევე მივყავართ ვარსკვლავების რადიალური გადანაწილებასა და სიმკვრივის პროფილის ნეიტრალური მდგრადობის პროფილისკენ.

შემდეგი აღნიშვნის შემოტანით:

$$\frac{1}{\varrho_{00}}\frac{\partial\varrho_{00}}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\varrho_{00}\right)\equiv f_{00}$$

შესაძლებელია განტოლება (18)-ის გადაწერა შემდეგი ფორმით:

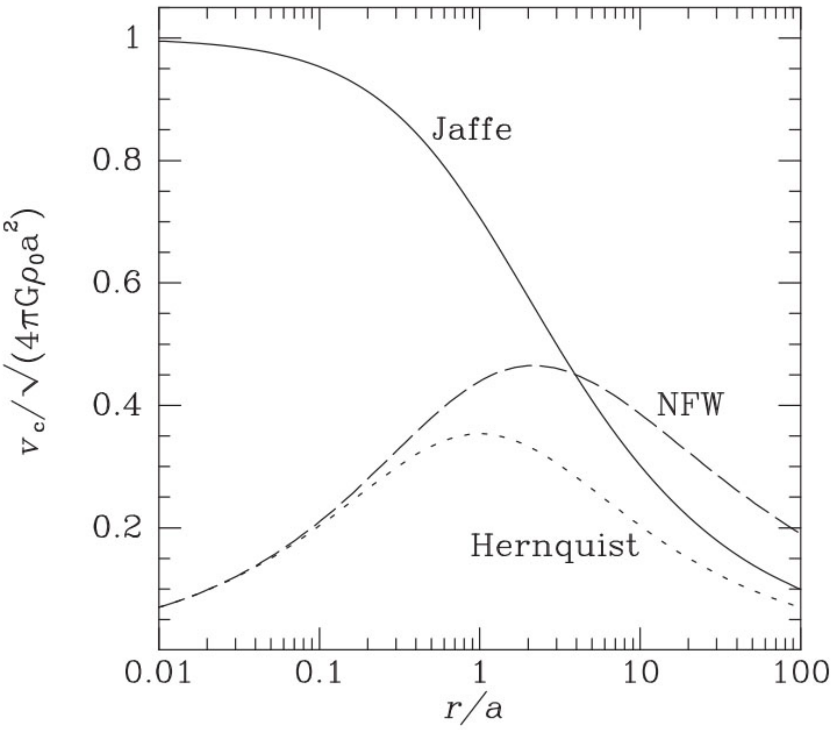
$$\frac{\partial f_{00}}{\partial r}+\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{\mathrm{c}_\mathrm{s}^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Phi_{00}}{\sqrt{4\pi}}\right)f_{00}+f_{00}^2=-\frac{1}{\mathrm{c}_\mathrm{s}^2}\left(4\pi G\frac{\overline{\varrho}_{00}}{\sqrt{4\pi}}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\Phi_{00}}{\sqrt{4\pi}}\right) \tag{19}$$

მიღებული განტოლების მარცხენა ნაწილი აღწერს ხილული მასის სიმკვრივის სფერულ შეშფოთებას, ხოლო მარჯვენა მხარე წონასწორული ხილული მასის სიმკვრივის განაწილებასა და ფარული მასის პოტენციალის სფერულად სიმეტრიული ნაწილს. როგორც ჩანს, სფერული შეშფოთებების პროფილი ცალსახად განისაზღვრება ფონური სიდიდეების განაწილებით ნეიტრალური მდგრადობის მდომარეობაში. მუდმივი ასიმეტრიის პარამეტრის განხილვა გულისხმობს, რომ ასიმეტრიული მოდების სიმკვრივის შეშფოთების რადიალური პროფილი ემთხვევა სიმეტრიული შეშფოთებების რადიალურ პროფილს. შედეგად, (19) განტოლება რომელიც მიღებულია სფერულად სიმეტრიულ შემთხვევაში განსაზღვრავს როგორც სიმეტრიული, ასევე ასიმეტრიული მოდების რადილური განაწილების თვისებებს. ასიმეტრიის თვისებების დასადგენად საჭიროა მხოლოდ მულტიპოლური ასიმეტრიების თვისების დადგენა (l, m).

რადიალური განაწილების პროფილის გამოთვლა შესალებელია გალაქტიკების სხვადასხვა სტანდარტული მოდელის შემთხვევაში (იხ. Binney and Tremaine 2007).

ცნობილი პროფილებიდან უმარტივესია ე.წ. Jaffe-ს პროფილი, რომლისთვისაც განტოლება (20) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial f_{00}}{\partial r}+\left[\frac{2}{r}+\frac{4\pi G\rho_0^d}{\mathrm{c}_\mathrm{s}^2}\frac{a^3}{r^2\left(1+\frac{a}{r}\right)}\right]f_{00}+f_{00}^2=-\frac{4\pi G\rho_0^b}{\mathrm{c}_\mathrm{s}^2\left(1+\frac{a}{r}\right)}\left[\frac{r}{a}+\frac{\rho_0^d}{\rho_0^b}\frac{a^4}{r^4\left(1+\frac{a}{r}\right)}\right]. \tag{20}$$



სურ 3: სფერულად სიმეტრიული პოტენციალის რადიალური განაწილების ანალიზური მოდელები. ნაჩვენებია ვარსკვლავების ორბიტალური სიჩქარეების გალაქტიკის Jaffe, Hernquist და NFW პოტენციალის მოდელებში (იხ. Binney and Tremaine 2007).

სფერული გალაქტიკებისა და სპირალური გალაქტიკის ცენტრალური ბირთვებისათვის შესაძლებელია Hernquist-ის განაწილების გამოყენება. ამ შემთხვევაში სიმკვრივის რადიალური განაწილება აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{\partial f_{00}}{\partial r}+\left[\frac{2}{r}+\frac{4\pi G\rho_0^d}{\mathrm{c}_\mathrm{s}^2}\frac{a}{2\left(1+\frac{a}{r}\right)^2}\right]f_{00}+f_{00}^2=-\frac{4\pi G\rho_0^b}{\mathrm{c}_\mathrm{s}^2\left(1+\frac{a}{r}\right)^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2+\frac{\rho_0^d}{\rho_0^b}\frac{a}{r\left(1+\frac{a}{r}\right)}\right] \tag{21}$$

სფერულად სიმეტრიული გალაქტიკებისა და სფერული ჰალოების თანამედროვე მოდელია ე.წ. Navarro–Frenk–White (NFW) ფუნქცია. ამავე განაწილებას აჩვენებს თანამედროვე რიცხვითი მოდელირებით მიღებული სინთეტური გალაქტიკების რადიალური პროფილი. NFW განაწილებისთვის რადიალური განაწილების ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{00}}{\partial r}+\left[\frac{2}{r}-\frac{4\pi G\rho_0^d}{\mathrm{c}_\mathrm{s}^2}\left(\frac{1}{r\left(1+\frac{r}{a}\right)}-\frac{a}{r^2}\ln\left(1+\frac{r}{a}\right)\right)\right]f_{00}+f_{00}^2=&\\ -\frac{4\pi G\rho_0^b}{\mathrm{c}_\mathrm{s}^2}\left[\ln\left(1+\frac{r}{a}\right)-\frac{r}{a\left(1+\frac{r}{a}\right)}+\frac{\rho_0^d}{\rho_0^b}\frac{1}{ar\left(1+\frac{a}{r}\right)^2}\right]&\end{aligned} \tag{22}$$

განტოლებება (22) წარმოადგენს კლასიკურ რიკატის არაწრფივ განტოლებას ხარისხობრივი და ლოგა-

რითმული კოეფიციენტებით. სიმკვრივის რადიალური პროფილების მისაღებად საჭირო იქნება განტოლების რიცხვითი მეთოდებით ამოხსნა. თუმცა, როგორც სამაგისტრო ნაშრომში ვაჩვენებთ, რადიალური განაწილების ცხადი სახით ცოდნა არ არის აუცილებელი ასიმეტრიის თვისებების გამოსათვლელად. ეს შესაძლებელია როდესაც ასიმეტრიის პარამეტრი α_{lm} არ არის რადიალური კოორდინატის ფუნქცია. ამ ტიპის მიახლოება სამართლიანია ინდივიდუალური გალაქტიკებისათვის, როდესაც სიმკვრივის შეშფოთებაზე მოქმედებს საკუთარი გალაქტიკის ფარული მასის ჰალო. ცხადია, ამ ტიპის მიახლოება დაირღვევა გალაქტიკების მჭიდრო გროვის, ან ურთიერთქმედი გალაქტიკების შემთხვევაში, როდესაც ხილულ მასაზე მოქმედებს როგორც საკუთარი, ასევე მეზობელი გალაქტიკის ფარული მასის გრავიტაციული ველი.

4 დაბალი რიგის მულტიპოლები

განტოლება (17) გვაძლევს ანიზოტროპიის ტენზორის სახეს ზოგად შემთხვევაში. საინტერესოა, რომ ანიზოტროპიის ტენზორში ფორმალურად მონაწილეობას იღებს ფარული მასის ჰალოს მაღალი რიგის ჰარმონიკებიც. ილუსტრაციისათვის სასარგებლოა ანიზოტროპიის ტენზორის დაბალი რიგის ელემენტების ცხადი სახით მიღება.

დიპოლური ასიმეტრიის შემთხვევაში შეგვიძლია გამოვიყვანოთ ტენზორის ღერძულად სიმეტრიული (1,0) კომპონენტი:

$$\begin{aligned} T_{10} = 4\pi G \frac{\overline{\varrho}_{10}}{\sqrt{4\pi}} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - 1 + r^2\frac{\partial}{\partial r}\ln\left(\varrho_{00}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\frac{\Phi_{10}}{\sqrt{4\pi}} \\ + \frac{\Phi_{10}}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{3r^2}\Big[\mathcal{L}_{23} - \mathcal{L}_{01}\Big] + \frac{\Phi_{20}}{\sqrt{4\pi}}\frac{3}{r^2}\frac{1}{\sqrt{15}}\Big[\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{11}\Big]\ . \end{aligned} \tag{23}$$

თუკი გალაქტიკის სიმკვრივის განაწილების ფონურ მნიშვნელობად ავიღებთ სფერულად სიმეტრიულ განაწილებას ($\overline{\varrho}_{10} = 0$) მივიღებთ, რომ დიპოლური ასიმეტრიის მიზეზი შეიძლება გამოწვეული იყოს ფარული მასის პოტენციალის როგორც დიპოლური, ასევე კვადრუპოლური ასიმეტრიით:

$$T_{10} = f\left(\Phi_{10}, \Phi_{20}\right)\ .$$

დიპოლური ასიმეტრიისა და აზიმუტალური ასიმეტრიის შემთხვევაში (1,1) ტენზორის კომპონენტი იღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} T_{11} = -4\pi G \frac{\overline{\varrho}_{1,-1}}{\sqrt{4\pi}} - \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - 2 + r^2\frac{\partial}{\partial r}\ln\left(\varrho_{00}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\frac{\Phi_{1,-1}}{\sqrt{4\pi}} \\ - \frac{1}{r^2}\frac{\Phi_{11}}{\sqrt{4\pi}} - \sum_{l'=3}^{\text{odd}}\frac{\sqrt{6}}{r^2}\frac{\Phi_{l',1}}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\left(2l'+1\right)\frac{(l'-1)!}{(l'+1)!}}\ . \end{aligned} \tag{24}$$

საინტერესოა, რომ კენტი აზიმუტალური რიცხვისათვის დიპოლური ასიმეტრიის ტენზორში წვლილი შეაქვს არა მხოლოდ დიპოლურ, არამედ ყველა შემდეგ კენტი l რიგის ფარული მასის გრავიტაციული პოტენციალის ჰარმონიკებს:

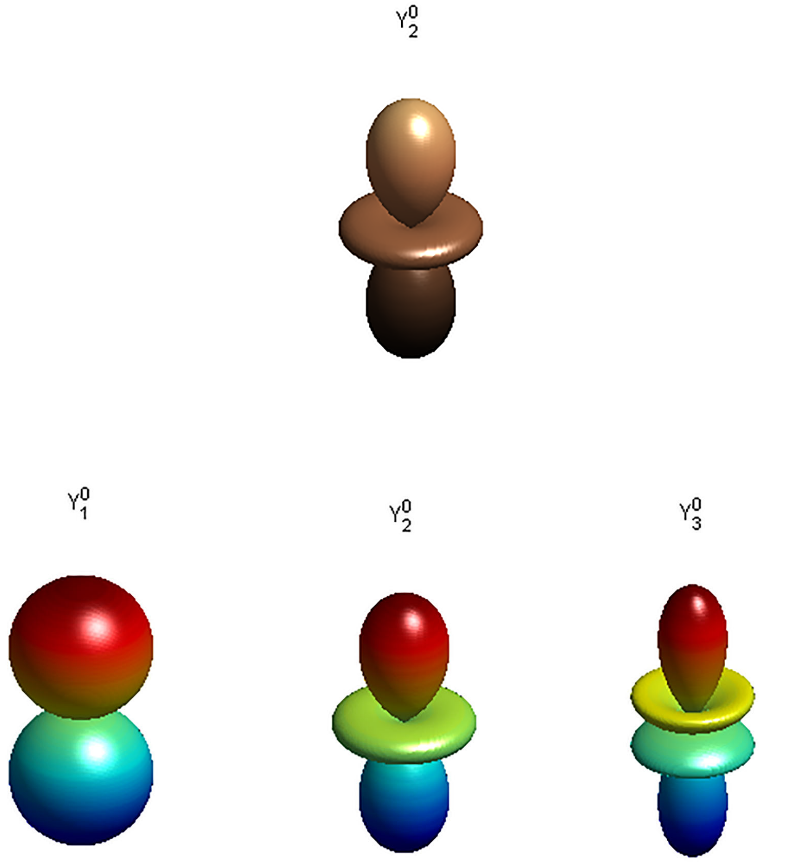
$$T_{11} = f\left(\Phi_{1,-1}, \Phi_{11}, \Phi_{31}, \Phi_{51}, ...\right)\ .$$

ანალოგიურად გამოითვლება აზიმუტალურად სიმეტრიული კვადრუპოლური ასიმეტრიის წევრი:

$$\begin{aligned} T_{20} = 4\pi G \frac{\overline{\varrho}_{20}}{\sqrt{4\pi}} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - 3 + r^2\frac{\partial}{\partial r}\ln\left(\varrho_{00}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\frac{\Phi_{20}}{\sqrt{4\pi}} \\ + \frac{3}{r^2}\frac{\Phi_{10}}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{15}}\Big[\mathcal{L}_{23} - \mathcal{L}_{12}\Big] + \frac{18}{r^2}\frac{\Phi_{30}}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{35}}\Big[\mathcal{L}_{34} - \mathcal{L}_{23}\Big] + \frac{9}{5r^2}\frac{\Phi_{20}}{\sqrt{4\pi}}\Big[\mathcal{L}_{33} - \mathcal{L}_{11}\Big] \end{aligned} \tag{25}$$

სადაც:

$$T_{20} = f\left(\Phi_{10}, \Phi_{20}, \Phi_{30}\right)\ .$$



სურ 4: ანიზოტროპიის ტენზორის ღერძულად სიმეტრიული დიპოლური კომპონენტი T_{10} (ზედა რიგში) და მისი გამომწვევი ფარული მასის პოტენციალის სფერული ჰარმონიკები (ქვედა რიგში).

ხოლო ღერძულად სიმეტრიული ოქტუპოლისათვის:

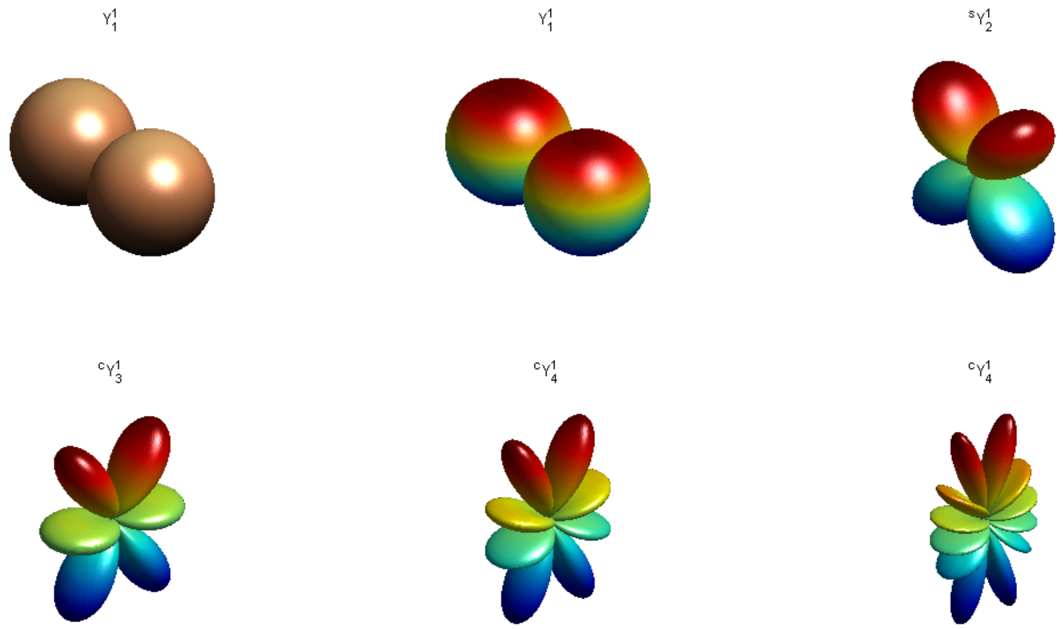
$$
\begin{aligned}
T_{30} &= 4\pi G \frac{\overline{\varrho}_{30}}{\sqrt{4\pi}} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) - 6 + r^2 \frac{\partial}{\partial r}\ln\left(\varrho_{00}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\frac{\Phi_{30}}{\sqrt{4\pi}} \\
&+ \frac{36}{7r^2}\frac{\Phi_{30}}{\sqrt{4\pi}}\Big[\mathcal{L}_{45} - \mathcal{L}_{23}\Big] + \frac{18}{r^2}\frac{\Phi_{20}}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{35}}\Big[\mathcal{L}_{33} - \mathcal{L}_{22}\Big] + \frac{20}{\sqrt{7}r^2}\frac{\Phi_{40}}{\sqrt{4\pi}}\Big[\mathcal{L}_{44} - \mathcal{L}_{33}\Big]
\end{aligned}
\tag{26}
$$

მივიღებთ რომ:

$$T_{30} = f\left(\Phi_{20}, \Phi_{30}, \Phi_{40}\right)\ .$$

დაბალი რიგის მულტიპოლების შედეგების განზოგადოებით შეგვიძლია მივიღოთ მარტივი წესი, თუ ფარული მასის პოტენციალის რომელი რიგის ჰარმონიკები მონაწილეობენ ასიმეტრიის ტენზორის ღერძულად სიმეტრიული ($m = 0$) და ასიმეტრიული კომპონენტების ($m = 1$) ფორმირებაში:

$$T_{l,0} = f\left(\Phi_{l-1,0}, \Phi_{l,0}, \Phi_{l+1,0}\right)\ .$$



სურ 5: ანიზოტროპიის ტენზორის ასიმეტრიული დიპოლური კომპონენტი T_{11} (მარცხენა ზედა კუთხეში) და მისი გამომწვევი ფარული მასის პოტენციალის სფერული ჰარმონიკები. ნაჩვენებია ჰარმონიკები მხოლოდ $l = 5$ რიგამდე.

$$T_{l,1} = f\left(\Phi_{l,\pm1}, \Phi_{l+1,1}, \Phi_{l+2,1}, ...\right) \ .$$

მიღებული მარტივი გამოსახულებები მიგვითითებენ ინტერფერენციის ხასიათზე სხვადასხვა ასიმეტრიის შემთხვევაში. როგორც ჩანს, ინტერფერენციული სურათი განსაკუთრებით მრავალფეროვანია კენტი აზიმუტალური რიცხვებისათვის (ნაჩვენებია შემთხვევა $m = 1$).

5 ფარული მასის კვადრუპოლური ველი

წარმოვიდგინოთ მოდელური ფარული მასის გრავიტაციული ველის ასიმეტრია, როდესაც გალაქტიკე-ბის ფარული მასის ჰალოს არარადიალურ ნაწილში გააჩნია მხოლოდ კვადრუპოლური ასიმეტრია:

$$\Phi_{lm} = 0, \qquad \text{როცა} \quad \mathrm{l} \neq 2, \mathrm{m} \neq 0, \tag{27}$$

და

$$\Phi_{20} \neq 0. \tag{28}$$

ასევე ვთვლით, რომ ბარიონული მასის განაწილება წონასწორულ მდგომარეობაში სფერულად სიმეტ-რიულია, ხოლო ასიმეტრიული ნაწილს ვითვალისწინებთ სიმკვრივის შეშფოთების ნაწილში:

$$\overline{\varrho}_{lm} = 0, \qquad \text{და} \tag{29}$$

$$\varrho_{00} \neq 0. \tag{30}$$

ამ შემთხვევისთვის, (23)-(26) განტოლებებიდან შესაძლებელია ასიმეტრიის ტენზორის არანულო-ვანი კომპონენტების გამოთვლა. ამგვარად დიპოლური კომპონენტისთვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$T_{10} = \frac{\Phi_{20}}{\sqrt{4\pi}} \frac{3}{r^2} \frac{1}{\sqrt{15}} \Big[\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{11}\Big], \tag{31}$$

კვადრუპოლისათვის:

$$T_{20} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - 3 + r^2\frac{\partial}{\partial r}\ln\left(\varrho_{00}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\frac{\Phi_{20}}{\sqrt{4\pi}} + \frac{9}{5r^2}\frac{\Phi_{20}}{\sqrt{4\pi}}\Big[\mathcal{L}_{33} - \mathcal{L}_{11}\Big], \tag{32}$$

და ოქტუპოლისათვის:

$$T_{30} = \frac{18}{r^2}\frac{\Phi_{20}}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{35}}\Big[\mathcal{L}_{33} - \mathcal{L}_{22}\Big]. \tag{33}$$

ანალოგიურად შეიძლება მაღალი რიგის მულტიპოლების გამოთვლაც. შესაბამისად ბარიონული ნივ-თიერების გრავიტაციული მდგრადობისათვის მივიღებთ შემდეგი სახის დისპერსიულ განტოლება:

$$A_1\alpha_{10} + A_2\alpha_{20} + A_3\alpha_{30} + ... = -\frac{4\pi}{|\Phi_{20}|}\omega^2 \;, \tag{34}$$

სადაც ასიმეტრიის ამპლიტუდური კოეფიციენტები გამოისახება როგორც:

$$A_1 \equiv \frac{4\pi T_{10}}{|\Phi_{20}|} \;,$$

$$A_2 \equiv \frac{4\pi T_{20}}{|\Phi_{20}|} \;,$$

$$A_3 \equiv \frac{4\pi T_{30}}{|\Phi_{20}|} \ ,$$

...

$$A_l \equiv \frac{4\pi T_{l0}}{|\Phi_{20}|} \ .$$

ყოველი მომდევნო მულტიპოლი დისპერსიულ განტოლებაში შედის კლებადი ამპლიტუდით, ამიტომ ჯინსის არამდგრადობისათვის განსაკუთრებული შემთხვევების გათვალისწინების გარეშე ყველაზე მნიშვნელოვან ზეგავლენას ახდენენ დაბალი რიგის მულტიპოლები. ბარიონული მასის სხვადასხვა ასიმეტრიას (α_{lm}) სხვადასხვა წვლილი შეაქვს დისპერსიაში და შესაბამისად დამოკიდებულია ფარული მასის პოტენციალის სახეზე (ასიმეტრიაზე).

ანალოგიურად შესაძლებელია ჯინსის არამდგრადობის დისპერსიული განტოლების მიღება როდესაც ფარული მასის ჰალოს გააჩნია ნებისმიერი სირთულის ასიმეტრია. ამ შემთხვევაში ამპლიტუდური კოეფიციენტები დისპერსიულ განტოლებაში გამოითვლება განტოლება (17)-ის გამოყენებით.

6 დასკვნა

სამაგისტრო ნაშრომში შესწავლილია კუმშვადი თვითგრავიტირებადი იზოთერმული გარემოს გრავიტაციული მდგრადობის თვისებები გარეშე სტატიკური გრავიტაციული ველის ზემოქმედების ქვეშ. ამოცანის მიზანია გალაქტიკებში ფარული მასის გრავიტაციული ველის ასიმეტრიის თვისებების დაკავშირება ხილული ბარიონული მასის ასიმეტრიასთან.

ხილული ნივთიერების სიმკვრივის ფონური სიდიდე და შეშფოთებები გაშლილია სფერულ ჰარმონიკებად და ჩატარებულია წრფივი მდგრადობის ანალიზი. ჯინსის არამდგრადობა შესწავლილია არარადიალურ მიახლოებაში. ამ მიახლოებაში იგულისხმება, რომ გალაქტიკა იმყოფება სფერულად ნეიტრალური წონასწორობის მდგომარეობაში. წონასწორობის პირობა აკავშირებს ხილული მასის სიმკვრივის ფონურ, შეშფოთებულ და ფარული მასის გრავიტაციული პოტენციალის სფერულად სიმეტრიულ კომპონენტებს.

ამ სფერულად სიმეტრიულ წონასწორობის ფონზე შესწავლილია გრავიტაციულად არამდგრადი მოდების სფერული ჰარმონიკების თვისებები. მიღებულია ზოგადი სახის დისპერსიული განტოლება მულტიპოლური ფორმით. ჩატარებულია დამატებითი გამოთვლები ასოცირებული ლეჟანდრის პოლინომების კვადრატული ფორმების ინტეგრალების გამოსათვლელად. შემოღებული აღნიშვნები და მათემატიკური გამოთვლების შედეგები მოცემულია დანართებში.

მიღებული შედეგები გვიჩვენებენ, რომ ფარული მასის ასიმეტრიასა და ხილული მასის განაწილებას შორის არსებობს არატრივიალური კავშირი. ვარსკვლავთწარმოშობის ჯინსის მექანიზმი მიგვანიშნებს, რომ ღერძულად სიმეტრიული l პოლოიდალური რიცხვის ასიმეტრია ხილული მასის განაწილებაში შეიძლება იყოს ფარული მასის $l-1$, l და $l+1$ რიგის ასიმეტრიებით გამოწვეული. მეორე მხრივ, ღერძულად ასიმეტრიული კენტი აზიმუტალური რიცხვის ასიმეტრია ხილულ მასაში (მაგ. $m=1$) შეიძლება გამოწვეული იყოს $m=1$ რიცხვის ნებისმიერი l რიგის ასიმეტრიით ფარული მასის განაწილებაში. ამოხსნილია შებრუნებული ამოცანაც: დისპერსიული განტოლება მიღებულია იმ შემთხვევაში, თუკი ფარული მასის ჰალოს გააჩნია მხოლოდ ღერძულად სიმეტრიული კვადრუპოლური ასიმეტრია.

მიღებული შედეგი შეგვიძლია გამოვიყენოთ გალაქტიკებში ვარსკვლავთწარმოშობის პროცესების შესასწავლად, სადაც ფარული მასის პოტენციალი გავლენას ახდენს ლოკალური გრავიტაციული არამდგრადობის პროცესზე. მეორე მხრივ, ხილული მასის ანიზოტროპიის ცოდნა საშუალებას მოგვცემს გამოვიკვლიოთ ფარული მასის ჰალოს თვისებები. გალაქტიკაში ვარსკვლავების სივრცული განაწილების დაზუსტებული მონაცემები საშუალებას მოგვცემენ დავადგინოთ გალაქტიკის ფარული მასის ჰალოს უხილავი სტრუქტურა, რაც თავის მხრივ მნიშვნელოვანი ნაბიჯი იქნება ფარული მასის ბუნების შესწავლაში.

ნაშრომში მოცემული კვლევა დაფინანსებულია რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის მაგისტრანტთა სასწავლო-კვლევითი გრანტით.

გამოყენებული ლიტერატურა

მჭედლიძე სალომე, ``*ჯინსის არამდგრადობა გარეშე გალაქტიკური ჰალოს ასიმეტრიულ ველში*'', საბაკალავრო ნაშრომი, თსუ (2015).

Binney, J., and Tremaine, S., ``*Galactic Dynamics*'', (Princeton University Press, 2007).

Bonnivard, V., Combet, C., Maurin, D., and Walker, M. G., ``*Spherical Jeans analysis for dark matter indirect detection in dwarf spheroidal galaxies - Impact of physical parameters and triaxiality*'', Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **446**, 3002 (2015).

Bradt, H., ``*Astrophysics Processes*'', (Cambridge University Press, 2002).

Das, M., Jog, C. J., ``*Tidally compressed gas in centres of early-type and ultraluminous galaxies*'', Astrophys. J. **527**, 600 (1999).

Dolag, K., Dolgov, A. D., and Tkachev, I. I., ``*Resolving infall caustics in dark matter halos*'', JETP Letters, **96**, 754 (2013).

Duffy, L., Sikivie, P., ``*Caustic ring model of the MilkyWay halo*'', Phys. Rev. D **78**, 063508 (2008).

Freundlich J., Jog, C. J., and Combes, F., ``*Local stability of a gravitating filament: a dispersion relation*'', Astron. Astrophys., **564**, A7 (2014).

Ghosh, S., and Jog, C., ``*Suppression of gravitational instabilities by dominant dark matter halo in low-surface-brightness galaxies*'', Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **439**, 929 (2014).

Jeans J. H., ``*The Stability of a Spherical Nebula*'', Phil. Tran. Roy. Soc. London, **199**, 1 (1902).

Jog C. J., ``*Jeans instability criterion modified by external tidal field*'', Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **434**, L56 (2013).

Pringle, J., and King, A., ``*Astrophysical Flows*'', (Cambridge University Press, 2002).

Sammadar, S. M., ``*Some integrals involving associated Legendre functions*'', Math. Comp. **28**, 257 (1974).

Sikivie, P., ``*The emerging case for axion dark matter*'', Phys. Lett. B **695**, 22 (2011).

Svensmark, J., Wojtak, R., Hansen, S., ``*Effect of asphericity in caustic mass estimates of galaxy clusters*'', Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **448**, 1644 (2015).

A სფერული ფუნქციები

ფიზიკური სიდიდეების მულტიპოლური გაშლისათვის ჩვეულებრივ გამოიყენება სფერული ფუნქციები:

$$Y_l^m(\varphi,\theta)=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos(\theta))\,\mathrm{e}^{im\varphi} \tag{A.1}$$

რომლებიც გამოისახებიან ასოცირებული ლეჟანდრის პოლინომების საშუალებით P_l^m, ხოლო ნორმირება ემთხვევა გრავიტაციული ველის პოტენციალისათვის მულტიპოლური გაშლის მიღებულ წესს.

სფერული ფუნქციების ორთოგონალობის თვისება საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ მთელი რიგი ინტეგრალები, რომლებიც შეიცავენ ორ სხვადასხვა რიგის სფერულ ფუნქციას:

$$\int\left[Y_l^m(\mathbf{\Omega})\,Y_{l'}^{m'*}(\mathbf{\Omega})\right]d\mathbf{\Omega}=\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\left[Y_l^m(\varphi,\theta)\,Y_{l'}^{m'*}(\varphi,\theta)\right]d\varphi=\delta_{ll'}\delta_{mm'}\ . \tag{A.2}$$

სფერული ფუნქციების ნორმირების წესიდან მივიღებთ:

$$\int Y_l^m(\mathbf{\Omega})\,d\mathbf{\Omega}=\sqrt{4\pi}\delta_{l0}\delta_{m0}\ . \tag{A.3}$$

ცნობილია პოლოიდალური რიცხვის ნიშნის ცვლილების წესიც:

$$Y_l^{-m}(\mathbf{\Omega})=(-1)^m\,Y_l^{m*}(\mathbf{\Omega})\,. \tag{A.4}$$

სფერული ფუნქციის მეორე რიგის კუთხური წარმოებულისათვის მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2Y_l^m(\mathbf{\Omega})}{\partial\mathbf{\Omega}^2}=-l\,(l+1)\,Y_l^m(\mathbf{\Omega})\,. \tag{A.5}$$

ქვემოთ მოყვანილია ზოგიერთი ცნობილი რეკურენტული თანაფარდობები ასოცირებული ლეჟანდრის პოლინომებისათვის, რომლებიც გვჭირდება ფორმალურ გამოთვლებში:

$$\sqrt{1-x^2}\frac{\partial P_k^m}{\partial x}=\frac{1}{2}\left[(k+m)\,(k-m+1)\,P_k^{m-1}(x)-P_k^{m+1}(x)\right], \tag{A.6}$$

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}P_k^{m+1}(x)=(k+m+1)\,xP_k^m(x)-(k-m+1)\,P_{k+1}^m(x)\,, \tag{A.7}$$

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}P_k^{m-1}(x)=\frac{\left[P_{k+1}^m(x)-xP_k^m(x)\right]}{(k+m)}, \tag{A.8}$$

$$(k-m+1)\,P_{k+1}^m(x)=(2k+1)\,xP_k^m-(k+m)\,P_{k-1}^m(x)\,. \tag{A.9}$$

სფერული ფუნქციების ორთოგონალობის პირობის გამოყენებით მარტივი სანახავია, რომ:

$$\int Y_l^mY_{l'}^{m'}d\mathbf{\Omega}=\int Y_l^m(-1)^{-m'}\,Y_{l'}^{-m'*}d\mathbf{\Omega}=(-1)^{-m'}\,\delta_{l,l'}\delta_{m,-m'}. \tag{A.10}$$

შემოვიღოთ ორი ლეჟანდრის პოლინომის ნამრავლის ინტეგრალის ფორმალური აღნიშვნა, რომელიც ცნობილია ორთოგონალობის პირობიდან:

$$\mathcal{I}_{ns}^m=\int_{-1}^1P_n^m(x)\,P_s^m(x)\,dx=\frac{2\,(s+m)!}{(2s+1)\,(s-m)!}\delta_{n,s}. \tag{A.11}$$

მარტივი სანახავია, რომ ჩვენ მიერ შემოღებულ ფუნქციას გააჩნია ორი მარტივი თვისება:

$$\mathcal{I}_{ns}^{m-1}=\frac{\mathcal{I}_{ns}^m}{(s+m)\,(s-m+1)}\ , \tag{A.12}$$

$$\mathcal{I}_{ns}^{m+1}=\mathcal{I}_{ns}^m\,(s-m)\,(s+m+1)\ \ . \tag{A.13}$$

შემოვიღოთ ორი ლეჟანდრის პოლინომის ნამრავლის შემდეგი ინტეგრალური ფუნქცია:

$$\mathcal{J}_{ns}^{m}=\int_{-1}^{1}\frac{P_{n}^{m}\left(x\right)P_{s}^{m}\left(x\right)}{\left(1-x^{2}\right)}dx=\begin{cases}\frac{(n+m)!}{m(n-m)!}\delta_{s,n+2k} & \text{if } \mathrm{s}\geq\mathrm{n};\ \ \mathrm{k}=0,1,2...\ \ \ \mathrm{m}\neq 0\\ \frac{(n+m-2k)!}{m(n-m-2k)!}\delta_{s,n-2k} & \text{if } \mathrm{s}\leq\mathrm{n};\end{cases} \tag{A.14}$$

მისი ფორმა გამოთვლილია ნაშრომში Sammadar (1974). თუმცა, ჩვენი ამოცანის ფორმალიზმიდან გამომდინარე უფრო ხელსაყრელია შემოვიღოთ ამ ინტეგრალის გამარტივებული/განცალებული ფორმა აზიმუტალურად არასიმეტრიულ:

$$\mathcal{J}_{ns}^{m}=\begin{cases}\frac{(k+m)!}{m(k-m)!}\mathcal{E}\left(n,s\right)\ ; & \mathrm{k}=\mathrm{Min(n,s)}\ ;\quad \mathrm{k}=0,1,2...\quad \mathrm{m}\neq 0.\\ \quad 0; & m=0\end{cases} \tag{A.15}$$

და სიმეტრიულ კომპონენტებად:

$$\mathcal{L}_{ns}=\int_{-1}^{1}\frac{P_{n}\left(x\right)P_{s}\left(x\right)}{\left(1-x^{2}\right)}dx\ ;\quad m=0. \tag{A.16}$$

ამ გამოთვლებში შემოვიღეთ ფორმალური ლუწობის (even) ფუნქცია, რომელიც ნულია თუკი ინდექსებს შორის სხვაობა კენტი რიცხვია:

$$\mathcal{E}\left(n,s\right)=\begin{cases}1, & \left|n-s\right|=2k;\\ 0, & \left|n-s\right|=2k+1;\end{cases} \tag{A.17}$$

ხოლო აზიმუტალურად სიმეტრიული ინტეგრალი განისაზღვრება სტანდარტული ლეჟანდრის პოლინომების ნამრავლით.

ჩვენ მიერ შემოღებულ ასოცირებული ლეჟანდრის ფუნქციების მესამე კვადრატულ ინტეგრალს აქვს შემდეგი სახე:

$$\mathcal{K}_{ns}^{m}=\int_{-1}^{1}P_{n}^{m-1}P_{s}^{m+1}dx. \tag{A.18}$$

სფერული ფუნქციების ზემოთ მოცემული თვისებებისა, ჩვენ მიერ შემოღებული ინტეგრალებისა და მათი თვისებების გამოყენებით შესაძლებელია ტალღური განტოლების ცალკეული წევრების გარდაქმნა:

$$\int\frac{1}{\sin^{2}\theta}\frac{\partial Y_{l}^{m}}{\partial\varphi}\frac{\partial Y_{l'}^{m'}}{\partial\varphi}d\mathbf{\Omega}=2\pi\left(-mm'\right)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}\frac{(l'-m')!}{(l'+m')!}}\delta_{m'm}\mathcal{J}_{ll'}^{m} \tag{A.19}$$

პოლოიდალური წარმოებულის ნამრავლისათვის მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\int\frac{\partial Y_{l}^{m}}{\partial\theta}\frac{\partial Y_{l'}^{m'}}{\partial\theta}d\mathbf{\Omega}=\frac{\pi}{2}\delta_{m'm}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}\frac{(l'-m')!}{(l'+m')!}}\times\\ \times\left[\left(l+m\right)\left(l-m+1\right)\left(l'+m\right)\left(l'-m+1\right)\mathcal{I}_{ll'}^{m-1}\ -\ \left(l+m\right)\left(l-m+1\right)\mathcal{K}_{ll'}^{m}\right.\\ \left.-\left(l'+m\right)\left(l'-m+1\right)\mathcal{K}_{l'l}^{m}+\mathcal{I}_{ll'}^{m+1}\right]\end{aligned} \tag{A.20}$$

ფორმულა (A.11)-ის გამოყენებით შესაძლებელია წანაცვლებული ინდექსის ინტეგრალების სიდიდეების $\mathcal{I}_{ll'}^{m-1}$ და $\mathcal{I}_{ll'}^{m+1}$ გამოთვლა:

$$\mathcal{I}_{ll'}^{m-1}=\int P_{l}^{m-1}\left(x\right)P_{l'}^{m-1}\left(x\right)dx=\frac{2\left(l'+m-1\right)!}{\left(2l'+1\right)\left(l'-m+1\right)!}\delta_{ll'} \tag{A.21}$$

და

$$\mathcal{I}_{ll'}^{m+1}=\int P_{l}^{m+1}\left(x\right)P_{l'}^{m+1}\left(x\right)dx=\frac{2\left(l'+m+1\right)!}{\left(2l'+1\right)\left(l'-m-1\right)!}\delta_{ll'} \tag{A.22}$$

ამ ფორმულების გამოყენებით შესაძლებელია ჩვენ მიერ შემოღებული მესამე ინტეგრალური ფორმის $\mathcal{K}_{l_1 l_2}^m$ შემდეგი ფორმით გამოსახვა:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{l_1 l_2}^m &= \int_{-1}^{1} P_{l_1}^{m-1} P_{l_2}^{m+1} dx = \\
&= \frac{(l_2 - m + 1)(m - l_2)}{(2l_2 + 1)(2l_1 + 1)} \mathcal{J}_{l_1+1, l_2+1}^m + \frac{(l_2 + m + 1)(l_2 + m)}{(2l_2 + 1)(2l_1 + 1)} \mathcal{J}_{l_1+1, l_2-1}^m \\
&+ \frac{(l_2 - m + 1)(l_2 - m)}{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)} \mathcal{J}_{l_1-1, l_2+1}^m - \frac{(l_2 + m + 1)(l_2 + m)}{(2l_2 + 1)(2l_1 + 1)} \mathcal{J}_{l_1-1, l_2-1}^m
\end{aligned} \tag{A.23}$$

ჩვენ მიერ შემოყვანილი ასოცირებული ლეჟანდრის პოლინომების კვადრატული ფორმების ინტეგრალების ანალიზური ფორმა მოითხოვს დამოუკიდებელ დათვლას. სამეცნიერო ლიტერატურში ცნობილი სამი ასოცირებული ლეჟანდრის პოლინომის ნამრავლის ინტეგრალის გამოთვლის ზოგადი წესის განხორციელებადობის პირობები არ გვაძლევს საშუალებას გამოვიყენოთ ეს ზოგადი ამონახსნი ორმაგი ინტეგრალის ზღვარში.

B ასოცირებული ლეჟანდრის ფუნქციების ნამრავლის ზოგიერთი ინტეგრალი

გამოვიყვანოთ ჩვენ მიერ განსაზღვრული ასოცირებული ლეჟანდრის ფუნქციების კვადრატული ინტეგრალების მნიშვნელობები და ზოგიერთი თვისება:

$$\mathcal{J}_{ns}^{m} = \int_{-1}^{1} \frac{P_n^m(x)\,P_s^m(x)}{(1-x^2)}dx \tag{B.1}$$

ჩვენ მიერ შემოღებული ფორმით:

$$\mathcal{J}_{ns}^{m} = \begin{cases} \frac{(k+m)!}{m(k-m)!}\mathcal{E}(n,s)\ ; \quad \mathrm{k=Min(n,s)}\ ; \quad \mathrm{k}=0,1,2... \quad \mathrm{m}\neq 0. \\ \qquad 0; \qquad\qquad m=0 \end{cases} \tag{B.2}$$

შესაძლებელია ინტეგრალის ქვედა პოლოიდალური ინდექსების წანაცვლებების ფორმის გამოთვლა:

$$\mathcal{E}(n,s) = \begin{cases} 1, & |n-s| = 2k; \\ 0, & |n-s| = 2k+1; \end{cases} \tag{B.3}$$

$$\mathcal{J}_{n+1,s+1}^{m} = \mathcal{J}_{ns}^{m}\frac{(k+m+1)}{(k-m+1)}\ ; \quad \mathrm{k=Min(n,s)}\ ; \quad \mathrm{k}=0,1,2... \quad \mathrm{m}\leq \mathrm{n}+1,\mathrm{s}+1 \tag{B.4}$$

აზიმუტალურად სიმეტრიულ ზღვარში ინტეგრალი დადის შემდეგ ფორმაზე:

$$\mathcal{J}_{n-1,s-1}^{m} = \mathcal{J}_{n,s}^{m}\frac{(k-m)}{(k+m)}\ ; \qquad m\leq n-1, s-1 \tag{B.5}$$

ამ ინტეგრალისათვის, ლეჟანდრის პოლინომების თვისებების გათვალისწინებით, შესაძლებელია წანაცვლებული ინდექსების თვისებების მიღება შემდეგი სახით:

$$\mathcal{L}_{ns} = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)\,P_s(x)}{(1-x^2)}dx\ ; \quad m=0. \tag{B.6}$$

$$\mathcal{L}_{ns} = \begin{cases} \mathcal{L}_{k,k} & |n-s| = \mathrm{even}; \\ \mathcal{L}_{k,k+1}, & |n-s| = \mathrm{odd}; \end{cases} \tag{B.7}$$

$$\mathcal{L}_{l+1,l'+1} = \begin{cases} \mathcal{L}_{k+1,k+1} & |l-l'| = \mathrm{even}; \\ \mathcal{L}_{k+1,k+2}, & |l-l'| = \mathrm{odd}; \end{cases} \tag{B.8}$$

$$\mathcal{L}_{l+1,l'-1} = \begin{cases} \mathcal{L}_{pp} & |l-l'| = \mathrm{even}; \\ \mathcal{L}_{p,p+1}, & |l-l'| = \mathrm{odd}; \end{cases} \tag{B.9}$$

$$\mathcal{L}_{l-1,l'+1} = \begin{cases} \mathcal{L}_{qq} & |l-l'| = \mathrm{even}; \\ \mathcal{L}_{q,q+1}, & |l-l'| = \mathrm{odd}; \end{cases} \tag{B.10}$$

$$\mathcal{L}_{l-1,l'-1} = \begin{cases} \mathcal{L}_{k-1,k-1} & |l-l'| = \mathrm{even}; \\ \mathcal{L}_{k-1,k}, & |l-l'| = \mathrm{odd}; \end{cases} \tag{B.11}$$

სადაც $k = Min(l,l')$, $p = Min(l{+}1, l'{-}1)$ და $q = Min(l{-}1, l'{+}1)$. რადგანაც კენტი და ლუწი ინდექსების ფუნქციების გარდაქმნები განსხვავებულია, საჭიროა საერთო ჯამის l, l' ინდექსების წყვილის მიმართ კენტ და ლუწ ჯამებად გაყოფა:

$$\sum_{l'=1}^{\infty} \equiv \sum_{l'=1}^{\infty}{}^{\mathrm{even}} + \sum_{l'=1}^{\infty}{}^{\mathrm{odd}} \tag{B.12}$$

ამ აღნიშვნის გამოყენებით და (B.8-11) განტოლებების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\sum_{l'=1}^{\infty}\mathcal{L}_{l+1,l'+1} = \sum_{l'=1}^{\infty}{}^{\text{even}}\ \mathcal{L}_{k+1,k+1} + \sum_{l'=1}^{\infty}{}^{\text{odd}}\ \mathcal{L}_{k+1,k+2} \tag{B.13}$$

$$\sum_{l'=1}^{\infty}\mathcal{L}_{l+1,l'-1} = \sum_{l'=1}^{\infty}{}^{\text{even}}\ \mathcal{L}_{p,p} + \sum_{l'=1}^{\infty}{}^{\text{odd}}\ \mathcal{L}_{p,p+1} \tag{B.14}$$

$$\sum_{l'=1}^{\infty}\mathcal{L}_{l-1,l'+1} = \sum_{l'=1}^{\infty}{}^{\text{even}}\ \mathcal{L}_{q,q} + \sum_{l'=1}^{\infty}{}^{\text{odd}}\ \mathcal{L}_{q,q+1} \tag{B.15}$$

$$\sum_{l'=1}^{\infty}\mathcal{L}_{l-1,l'-1} = \sum_{l'=1}^{\infty}{}^{\text{even}}\ \mathcal{L}_{k-1,k-1} + \sum_{l'=1}^{\infty}{}^{\text{odd}}\ \mathcal{L}_{k-1,k} \tag{B.16}$$