



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ლუკა პონიატოვსკი

გრანულარული დინებების მოდელირება სამგანზომილებიან კუმშვად ასტროფიზიკურ დისკებში

სამაგისტრო პროგრამა "ფუნდამენტური ფიზიკა"

ასტროფიზიკის კათედრა

ნაშრომი შესრულებულია მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი:

ალექსანდრე თევზაძე ასოც. პროფ.

თსუ ზსმფ-ის ფიზიკის დეპარტამენტის

თბილისი 2017



Ivane Javakhisvili Tbilisi State University

Faculty of Natural and Exact Sciences

Luka Poniatowski

**Numerical Simulation of granular flows in 3D
compressible astrophysical disks**

MASTER'S PROGRAM "FUNDAMENTAL PHYSICS"

CHAIR OF ASTROPHYSICS

A thesis submitted for the Master's degree in Physics

Supervisor:

Alexander Tevzadze, Asoc. Prof.

Chair of Astrophysics, Department of Physics

Faculty on Natural and Exact Sciences

Tbilisi, 2017

შინაარსი:

1 შესავალი	6
2 ფიზიკური მოდელი	7
2.1 არანიუტონური სითხის სიბლანტის მოდელი	8
3 მდგრადობის ანალიზი	10
3.1 წონასწორული მდგომარეობა	10
3.2 წრფივი შეშფოთებები	11
3.3 ლოკალური ანალიზი	12
3.4 დისპერსიული განტოლება	14
3.5 ეპიცენტრული სიხშირის დისპერსია	15
3.6 ბლანტი-ბრუნვითი არამდგრადობა	17
3.7 კუმშვადი სპექტრი	19
4 პირდაპირი რიცხვითი მოდელირება	22
4.1 რიმან-გოდუნოვის რიცხვითი ამომხსნელი PLUTO	22
4.2 რეოლოგიური მოდული - Rheo	22
4.3 საწყისი მნიშვნელობები	24
4.4 ფიდუციური მოდელი	26
4.5 რიცხვითი თვლის შედეგები	27
5 დასკვნა	32
გამოყენებული ლიტერატურა	33

ანოტაცია

ნაშრომში შესწავლილია ცენტრალური გრავიტაციის ველში მბრუნავი გრანულარული დინება ჰიდროდინამიკურ მიახლოებაში. ამისათვის გამოყენებულია გრანულარული დინების რეოლოგიური მოდელი, როდესაც დინების დისიპაციური თვისებები აღიწერება ლოკალური მდგომარეობის განტოლებით. აღწერილი ლოკალური მოდელის ფარგლებში გრანულებს შორის ურთიერთქმედების ეფექტის გათვალისწინება შესაძლებელია სიბლანტის პარამეტრით, რომელიც დამოკიდებულია როგორც წნევაზე, ასევე დეფორმაციის ტენზორის მეორე ინვარიანტზე.

ანალიზური კვლევა დაფუძნებულია სამგანზომილებიანი უკუმშვადი გრანულარული დინების წრფივ მდგრადობის ანალიზზე წანაცვლების სიბრტყეში. ნახვენებია, რომ ეპიცენტრული სიხშირე, რომელიც ჩვეულებრივ მუდმივი სიდიდეა კეპლერულ დინებებში, რეოლოგიურ დინებაში ხდება დისპერსიული სიდიდე: წანაცვლების რეოლოგიურ პარამეტრის მიხედვით სიხშირე მატულობს ან კლებულობს დისკის თანამბრუნავ, ან მებრუნებული ტალღებისათვის. სამაგისტრო ნაშრომში ნახვენებია, რომ ამ ტიპის დინებებში შესაძლებელია განვითარდეს ახალი ტიპის არამდგრადობა რომელიც გამოწვეულია დეფორმაციის რეოლოგიითა და დიფერენციალური ბრუნვის ზედდებით. ბლანტი-ბრუნვითი არამდგრადობა შეიძლება განვიტარდეს გრანულარულ დინებაში, სადაც სიბლანტის პარამეტრი იცვლება დეფორმაციის ტენზორის კვადრატზე უფრო სწრაფად მუდმივი წნევის პირობებში.

კუმშვადი რეოლოგიური დინების მოდელირებისათვის გამოყენებულია პირდაპირი რიცხვითი მოდელირების კოდი PLUTO. კოდის სტანდარტული რიმანის ამომსწნელისათვის შექმნილია რეოლოგიური მოდული Rheo, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია სიბლანტის დეფორმაციის ტენზორსა და წნევაზე დამოკიდებულების მოდელირება. ჩატარებული გამოთვლები მიზნად ისახავდნენ ბლანტი-ბრუნვითი არამდგრადობის თვისებების დადგენას არაწრფივ ამპლიტუდებზე. თვის შედეგები გვიჩვენებენ, რომ არამდგრადობა განიცდის გაჯერებას დიდ ამპლიტუდებზე, როდესაც ყალიბდება კვაზი-სტაციონალური თვითშენარჩუნებადი ანტიციკლონური გრიგალები.

ნაშრომში ნახვენებია, რომ შემოთავაზებული ჰიდროდინამიკური მოდელი შესაძლებელია წარმატებით იყოს გამოყენებული მაღალი სიმკვრივის გრავიტირებად გრანულარულ დინებებში. ნაპოვნი ბლანტი-ბრუნვითი არამდგრადობას შეუძლია ითამაშოს გადამწყვეტი როლი მაღალი სიმკვრივის პლანეტარულ რგოლებსა და პროტოპლანეტარული დისკების გრანულარულ დინებებში.

Abstract

We present the hydrodynamic study of granular flows rotating around a central gravitating object. For this purpose we employ rheological model of the granular fluid and describe the dissipative properties of the granular flow using a local constitutive equation. In the framework of our local viscosity model effects of the granular interactions can be described using the shear and pressure rheology parameters, derived as the partial derivatives of the viscosity parameter by the pressure and the second invariant of the deformation tensor, respectively.

Analytic study is based on the linear stability analysis of the 3D incompressible granular flow in the local shearing sheet framework. We show that the epicyclic frequency that is normally a constant quantity in Keplerian flows, depends on the wave-numbers of the perturbations, showing leading-trailing asymmetry, depending on the shear rheology parameter of the flow. We have shown that such flows can exhibit new type of instability that is triggered by the interplay of the shear rheology and the differential rotation of incompressible dense granular fluids. Found visco-rotational instability sets in granular fluids, where the viscosity parameter grows faster than the square of the local shear rate (strain rate) at constant pressure.

Numerical simulation of the compressible rheological granular flows is performed using the DNS code PLUTO. The standard Riemann solver of the PLUTO code is complemented by the new Rheo module that can be used to implement the dependence of the viscosity parameter on the flow pressure and deformation tensor. Direct numerical simulations has been carried out to identify the visco-rotational instability at nonlinear amplitudes. It seems that instability growth saturates at nonlinear amplitudes leading to a quasi-stationary self-sustained anticyclonic vortices in Keplerian flows.

We have shown that hydrodynamic theory can be successfully applied to the investigation of the dense granular flows under central gravity. Found visco-rotational instability can play a crucial role in the dynamics of dense planetary rings and granular flows in protoplanetary disks.

1 შესავალი

აირისა და მყარი ნაწილაკების დინებები ცენტრალური გრავიტირებადი ობიექტის ირგვლივ წარმოადგენენ ასტროფიზიკური დინებების მნიშვნელოვან კლასს, რომელიც დაიკვირვება პლანეტარულ რგოლებსა და პროტოპლანეტარულ დისკებში. ყველა ამ ტიპის დინებას გააჩნია რამოდენიმე საერთო თვისება: აირი და მყარი ნაწილაკები ბრუნავენ თავიანთ კეპლერულ ორბიტებზე, ნაწილაკების დაჯახება არადრეკადია და კინეტიკური ენერგიის დისიპაცია ხდება დროის მცირე ინტერვალებში. მყარი ნაწილაკების დინებები კარგავენ კინეტიკურ ენერგიას და ილექებიან შედარებით მკვრივ თხელ დისკისებრ ფენებად, სადაც მათი დინება შეიძლება აღიწეროს როგორც ე.წ. „გრანულარული დინება.“

მნიშვნელოვანი პროგრესი ლაბორატორიული გრანულარული დინებების შესწავლამ განიცადა უკანასკნელ წლებში [11, 7, 5, 2]. აღმოჩნდა, რომ გრანულარული დინება შეიძლება აღიწეროს ლოკალური მდგომარეობის განტოლებით, რომელიც აისახება რეოლოგიური სიბლანტის წევრში. ამ შემთხვევაში დინების რეოლოგიური ხასიათი გამოწვეულია გრანულარული დისიპაციის ტენზორით. ექსპერიმენტებიდან განზოგადოებული თეორიული მოდელი საშუალებას იძლევა ჩაიზეროს გრანულარული დისიპაციის წევრი ტენზორული ფორმით. ყოველივე ეს საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ ასტროფიზიკური გრანულარული დინებების ჰიდროდინამიკური თეორია. ასტროფიზიკური დინებების რეოლოგიური თვისებები დღემდეც აქტიური განხილვის საგანი იყო სატურნის რგოლებისა [18, 34, 20, 22, 27] და აკრეციული დისკების კონტექსტში [17, 30, 13, 3]. თუმცა არსებული მოდელები ეფუძნებოდა ემპირიულ დაშვებას, რომ გრანულარული დინების სიბლანტე უნდა იყოს დისკის ზედაპირული სიმკვრივის ფუნქცია. გრანულარული დინების ლაბორატორიული კვლევები გვიჩვენებენ, რომ სიბლანტე არის წნევისა და დინების დეფორმაციის ტენზორის ფუნქცია [7]. სწორედ ამ განზოგადოებული კანონის საფუძველზე გვეგმავთ გრავიტირებადი გარემოს რეოლოგიური თვისებების კვლევას.

სამაგისტრო ნაშრომის ამოცანაა შევისწავლოთ ასტროფიზიკური გრანულარული დინებები ანალიზური და რიცხვითი მეთოდებით. ამისათვის ნაშრომის 2-ე თავში ამოცანა ჩამოყალიბებულია ცილინდრულ კოორდინატებში გრანულარული სიბლანტის ტენზორული ფორმის გამოყენებით. მიღებული თეორიული მოდელი შესწავლილია 3-ე თავში. ლოკალურ მიახლოებაში მიღებულია ამოცანის სამგანზომილებიანი წრფივი სპექტრი. ქრფივი სპექტრის საშუალებით შესავლილია სპირალური ტალღები და დინების მდგრადობის მახასიათებლები. 4-ე თავში ჩატარებულია პირდაპირი რიცხვითი მოდელირება, რაც საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ წრფივი პროცესების არაწრფივი ევოლუცია. რიცხვითი ანალიზით ნაჩვენებია ნაპოვნი არამდგრადობების განვითარების ხასიათი და არაწრფივი გაჯერების მექანიზმი. სამაგისტრო ნაშრომი შეჯამებულია 5-ე თავში.

2 ფიზიკური მოდელი

სამგანზომილებიანი ბლანტი სითხის დინამიკა შესაძლებელია აღიწეროს ნავიე-სტოქსის განტოლებით. არანიუტონური სითხის დინების შემთხვევაში ნავიე სტოქსის განტოლებას უნდა დაემატოს რეოლოგიური სიბლანტის განმსაზღვრელი ლოკალური მდგომარეობის განტოლება. შედეგად დგება სითხის დინამიკის აღმწერი ჩაკეტილი განტოლებათა სისტემა.

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right\} v_i = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} , \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 , \quad (2)$$

$$\frac{DP}{Dt} = \frac{\gamma P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} , \quad (3)$$

$$\frac{D}{Dt} \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right\}$$

ცვლადები V , P , η , ρ , Φ შესაბამისად აღნიშნავენ გრანულარული დინების სიჩქარეს, წნევას, რეოლოგიურ სიბლანტის, სიმკვრივისა და ცენტრალური მასიური ობიექტის გრავიტაციულ პოტენციალს. ხოლო τ_{ik} წარმოადგენს დაძაბულობის ბლანტ ტენზორს, რომელიც აღებულია გრანულარული რეოლოგიური მოდელიდან და მოიცემა შემდეგი ფორმით [11, 7]:

$$\tau_{ik} = \eta(P, \mathbf{v}) \varepsilon_{ik} , \quad (4)$$

სადაც η რეოლოგიური სიბლანტის კოეფიციენტია, ხოლო ε_{ij} დინების დეფორმაციის ტენზორია რომელიც შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} .$$

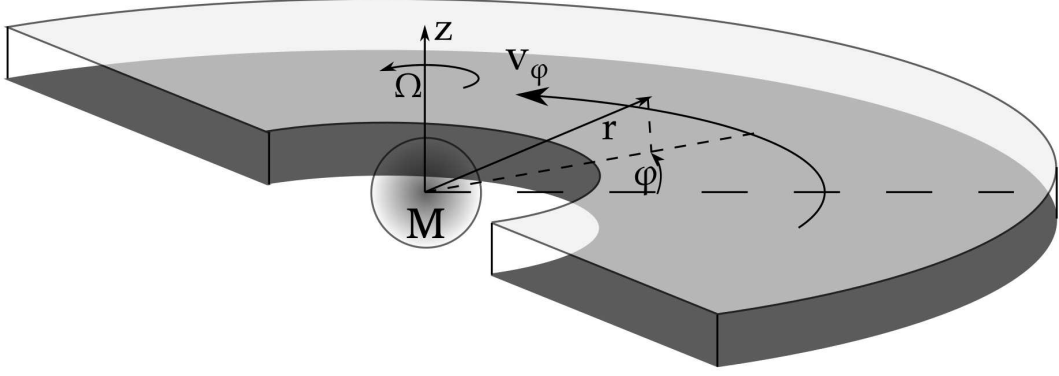
ვინაიდან ცენტრალური გრავიტირებადი ობიექტის მიმართ მბრუნავ სითხეს აქვს ღერძული სიმეტრია, მოსახერხებელი იქნება ამოცანის ცილინდრულ კოორდინატებში ფორმულირება. ამ სისტემაში მოძრაობის განტოლების რადიალური ნაწილი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_r - \frac{v_\phi^2}{r} = & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho} \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \frac{2}{\rho} \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ & + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) , \quad (5) \end{aligned}$$

აზიმუტალური ნაწილისთვის გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_\phi + \frac{v_r v_\phi}{r} = & - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \frac{\eta}{\rho} \left(\Delta v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \\ & + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \eta}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} \right) , \quad (6) \end{aligned}$$

ხოლო განტოლება z მდგენელისთვის მიიღებს შემდეგ სახეს:



სურ 1: ნახაზზე მოყვანილია M მასის მქონე ცენტრალურ გრავიტაციული ობიექტის ირგვლივ მგბუნავი დისკის და მასთან დაკავშირებული ათვლის სისტემის სქემატური ნახაზი. (პროპორციები არ შეესაბამება რეალურს)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \Delta v_z + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} \right). \quad (7) \end{aligned}$$

∇ ოპერატორი ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში მოიცმა შემდეგი სახით:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

ხოლო ლაპლასის ოპერატორს მოცემულ სისტემაში აქვს შემდეგი სახე:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

უწყვეტობის და მდგომარეობის განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho v_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial(r \rho v_z)}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v_r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\gamma P}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right). \quad (9)$$

განტოლებები (6 - 21) ქმნიან ჩაკეტილ განტოლებათა სისტემას რომლის ამოხსნაც შესაძლებელია თუკი გვეცოდინება ფიზიკური სისტემის დისიპაციური თვისებები.

2.1 არანიუტონური სითხის სიბლანტის მოდელი

ბუნებაში ფართოდაა გავრცელებული დინებები, რომელთა სიბლანტე დამოკიდებულია დინების ფიზიკურ მახასიათებლებზე. ამ ტიპის სითხეებს არანიუტონური სითხეები ეწოდებათ. არანიუტონურ სითხეებს ხშირად მოიხსენიებენ რეოლოგიური დინების სახელით. ასეთი გარემოებისთვის საერთო მახასიათებელი არის ცვალებადი სიბლანტის არსებობა.

ასტროფიზიკული ობიექტებისთვის არანიუტონური სიბლანტე შესაძლებელია გამოწვეული იყოს სხვადასხვა მიზეზით, იმისდა მიხედვით თუ რა მასშტაბზე ხდება დინების დაკვირვება.

პლანეტარულ მასშტაბზე იგი შეიძლება გამოწვეული იყოს გრანულარული დინებით, ხოლო პროტოპლანეტურ მასშტაბებზე კი დინების ტურბულენტური ხასიათით.

რეოლოგიურ სითხეებში სიბლანტე დამოკიდებულია დინების აღმწერი თერმოდინამიკურ და კინემატიკურ სიდიდეებზე. ზოგადი ფორმით შეიძლება დაიწეროს:

$$\eta = \eta(P, \xi) ,$$

სადაც ξ არის დეფორმაციის ტენზორის მეორე ინვარიანტი და მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\xi = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}/2} . \quad (10)$$

გრანულარული სითხის სიბლანტის აღწერისას მნიშვნელოვანი პარამეტრებია ნაწილაკოვანი სიმკვრივე ρ_p , რომელიც განისაზღვრება ერთ ნაწილაკზე მოსულ სივრცის მოცულობით, და ინერციის რიცხვი I , რომელიც წარმოადგენს გრანულარული გარემოს მიკრო და მაკრო მახასიებლებელ დროების ფარდობას. ის არის გრანულების გადაწყობისთვის საჭირო დროის $t_{micro} = d_0/\sqrt{P/\rho_p}$ ფარდობა დინების მახასიათებელ დროსთან $t_{macro} = 1/\varepsilon$

$$I = \frac{t_{micro}}{t_{macro}} = \frac{d_0\xi}{\sqrt{P/\rho_p}} ,$$

სადაც d_0 არის გრანულების საშუალო დიამეტრი, ξ წანაცვლების სიდიდე, P სისტემაზე მოქმედი წნევა და ρ_p ნაწილაკოვანი სიმკვრივე.

გრანულარული დინების ინერციის რიცხვი განსაზღვრავს გრანულებს შორის ხახუნის დინამიურ ხასიათს. რეოლოგიით გამოწვეული სიბლანტე გაცილებით აღემატება სითხის მუდმივ სიბლანტეს ამიტომ მსგავს პროცესებში დომინირებს არანიუტონური დაძაბულობის ტენზორი. ასეთი ტიპის პროცესები განიხილება უკუმშვადი მიახლოებაში, შესაბამისად გრანულარული რეოლოგიის შესწავლისას, ჩვენ ვსარგებლობთ უკუმშვადი ფორმალიზმით.

დიდი მასშტაბების შემთხვევაში სისტემის სიბლანტის მნიშვნელობას განსაზღვრავს ანომალური ტურბულენტური სიბლანტე. ტურბულენტური სიბლანტეც დამოკიდებული დინების მახასიათებელ სიდიდეებზე და განსხვავებით მიკრომასშტაბური გრანულარული სიბლანტისგან, ტურბულენტური სიბლანტის შესწავლისას გასათვალისწინებელია კუმშვადობაც. ორივე შემთხვევაში საგარაუდოა, დაძაბულობის ბლანტი ტენზორის ძლიერი დამოკიდებულება დეფორმაციის ტენზორზე.

$$\eta = \frac{\mu(I)P}{\xi} \quad (11)$$

განტოლება (11) ასახავს დამოკიდებულების იმ სახეს რომელიც ლაბორატორიული კვლევების შედეგად, მიიჩნევა რომ აღწერს გრანულარული ნივთიერების სიბლანტეს, ნივთიერების თხევად მდგომარეობაში ყოფნისას. აღსანიშნავია რომ ეს ფორმა არ ნიშნავს, რომ სიბლანტე წანაცვლების სიდიდის უკუპროპორციულია, რადგან თავად μ შეიძლება იყოს ξ და P ფუნქცია. გრანულარული სიბლანტის კონკრეტული ფორმა დამოკიდებული უნდა იყოს გრანულების ტიპსა, დინების მასშტაბზე და სხვა დეტალებზე.

3 მდგრადობის ანალიზი

3.1 წონასწორული მდგომარეობა

მბრუნავი დისკის წრფივ მდგრადობის შესასწავლად, საჭიროა მისი წონასწორული მდგომარეობის პოვნა. წონასწორულ ამონახსნებს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \bar{\rho}(r, z) , \\ \bar{P} &= const , \\ \bar{\eta} &= \bar{\eta}(r) , \\ \bar{\mathbf{v}} &= (0, \bar{v}_\phi, 0) ,\end{aligned}$$

თუ შევიტანთ საძიებელ სიდიდეებს გან.(5 - 7) ვიპოვით განტოლებებს, რომლებიც აღწერენ სისტემის წონასწორულ მდგომარეობას:

$$-\frac{\bar{v}_\phi^2}{r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} , \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_\phi}{\partial r} - \frac{\bar{v}_\phi}{r} \right) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial r} + \bar{\eta} \left(\Delta \bar{v}_\phi - \frac{\bar{v}_\phi}{r^2} \right) = 0 , \quad (13)$$

სადაც M მასის მქონე ცენტრალური გრავიტირებადი ობიექტის მიერ შექმნილი გრავიტაციული პოტენციალი მოიცემა როგორც:

$$\Phi(r, z) = \frac{GM}{(r^2 + z^2)^{1/2}} , \quad (14)$$

თხელი დისკის მოდელის გათვალისწინებით ($z^2/r^2 \ll 1$) შეგვიძლია უგულებელვყოთ გრავიტაციული პოტენციალი აქსიალური მიმართულებით. მოცემული პოტენციალით განსაზღვრული კეპლერული ბრუნვის პროფილი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\Omega(r) = \Omega_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-q} , \quad \Omega_0 = \left(\frac{GM}{r^3} \right)^{1/2} . \quad (15)$$

კუთხური სიჩქარის კეპლერული პროფილით ($q = 3/2$), შეგვიძლია ვიპოვოთ სიბლანტის წონასწორული რადიალური პროფილი. რომელსაც შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial \ln \bar{\eta}}{\partial \ln r} = q - 2 . \quad (16)$$

რელის მდგრადობის პირობის გათვალისწინებით, რომელიც მოიცემა როგორც:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega(r)) > 0 ,$$

შესაძლებელია გამოვიანგარიშოთ სიბლანტის რადიალური პროფილისთვის მდგრადობის კრიტერიუმი, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial r} < 0 .$$

აქედან ჩანს რომ მდგრადია რადიალურად კლებადი სიბლანტის მქონე კომფიგურაციები.

3.2 წრფივი შეშფოთებები

წრფივი მდგრადობის ანალიზისთვის საჭიროა განტოლებების გაწრფივება. ამისთვის შემოვიტანოთ წრფივი შეშფოთებები $\alpha = \bar{\alpha} + \alpha'$, ისეთი რომ შეშფოთების ამპლიტუდა გაცილებით მცირე იყოს წონასწორული სიდიდეების ამპლიტუდაზე $|\alpha'|/|\alpha| \ll 1$. შესაბამისად შეგვიძლია ჩავწეროთ ცვლადები:

$$\begin{aligned}\rho &= \bar{\rho} + \rho' , \\ P &= \bar{P} + P' , \\ \eta &= \bar{\eta} + \eta'(r) , \\ \mathbf{v} &= \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' ,\end{aligned}$$

წრფივი ცვლადების გან(6 - 21) შეტანით და არაწრფივი წევრების უგულებელყოფით მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} v'_r - 2\Omega v'_\phi = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial r} + \nu \left(\Delta v'_r - \frac{v'_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'_\phi}{\partial \phi} \right) + \frac{2}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial r} \frac{\partial v'_r}{\partial r} + \frac{1}{\bar{\rho} r} \frac{\partial \eta'}{\partial \phi} r \frac{\partial \Omega}{\partial r} , \quad (17)$$

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} v'_\phi + \left(2\Omega + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) v'_r &= -\frac{1}{\bar{\rho} r} \frac{\partial P'}{\partial \phi} + \nu \left(\Delta v'_\phi - \frac{v'_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'_r}{\partial \phi} \right) + \frac{\eta'}{\bar{\rho}} \left(r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) - \\ &- \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \bar{\eta} \left(r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial r} \left(\frac{\partial v'_\phi}{\partial r} - \frac{v'_\phi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_r}{\partial \phi} \right) - r \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{r}{\bar{\rho}} \frac{\partial \eta'}{\partial r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} , \quad (18)\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} v'_z = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial z} + \nu \Delta v'_z \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial r} \left(\frac{\partial v'_z}{\partial r} + \frac{\partial v'_r}{\partial z} \right) , \quad (19)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v'_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0 , \quad (20)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} P' = -\frac{\gamma \bar{P}}{\bar{\rho}} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial (r v'_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} \right\} \rho' . \quad (21)$$

რეოლოგიური თვისებების აღსაწერად შემოვიღოთ G_P და G_S პარამეტრები, რომელთა მემ-ვეობითაც შეგვიძლია გადავწეროთ მდგომარეობის განტოლება ლოკალური ფორმით:

$$\frac{\eta'}{\bar{\rho}} = G_P \frac{P'}{\bar{\rho}} + G_S \left(\frac{\partial v'_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_r}{\partial \phi} \right) , \quad (22)$$

სადაც G_P არის წნევით გამოწვეული რეოლოგიის პარამეტრი რომელიც აღწერს სიბლანტის ცვლილებას, გამოწვეულს წნევის ცვლილებით, მუდმივი დეფორმაციის შემთხვევაში,

$$G_P = \left(\frac{\partial \eta}{\partial P} \right)_\xi ,$$

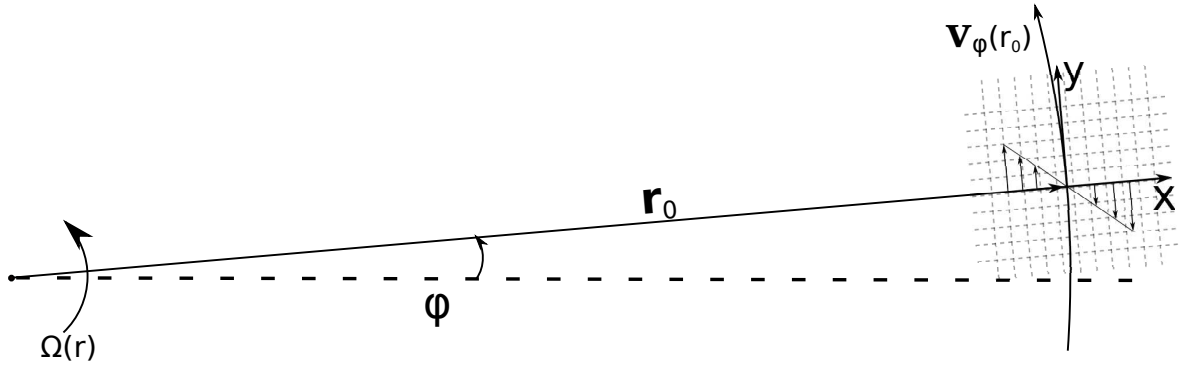
ხოლო G_S არის დეფორმაციით გამოწვეული სიბლანტის ცვლილება, მუდმივი წნევის შემთხვევაში:

$$G_S = \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_P .$$

აღსანიშნავია რომ G_P და G_S პარამეტრების შემოყვანა შესაძლებელია იმ შემთხვევაში როდესაც გრანულარული მდგომარეობის განტოლებას გააჩნია ლოკალური ფორმა.

3.3 ლოკალური ანალიზი

გამოთვლების გასამარტივებლად შესაძლებელია მრუდწირული სისტემის ნაცვლად გადავიდეთ ლოკალურ თანამბრუნავ სისტემაში. დავუშვათ რომ სისტემის მახასიათებელი ზომა (L) გაცილებით დიდია ვიდრე ძირითადი გრადიენტების მახასიათებელი ზომები ($\nabla \sim \lambda^{-1}$), ანუ $\lambda^2/L^2 \ll 1$. წარმოვიდგინოთ r_0 წარმოუსახვით რადიუსზე კვლევრული სიჩქარით მბრუნავი ახალი საკორდინატო დეკარტული სისტემა (x, y, z) .



სურ 2: ლოკალური თანამბრუნავი დეკარტული სისტემა, ნაჩვენებია z ღერძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში

გავშალოთ $\Omega(r)$ მოცემული წერტილის სიახლოვეში როგორც:

$$\Omega(r) \approx \Omega(r_0) + \Omega'(r)|_{r_0} (r - r_0) , \quad (23)$$

და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\Omega(r_0) = \Omega_0 , \quad A = \frac{1}{2} r_0 \Omega'(r)|_{r_0} , \quad B = -\frac{1}{2} r_0 \Omega'(r)|_{r_0} - \Omega . \quad (24)$$

ახალი ცვლადები (x, y, z, t) გამოისახება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} x &\equiv r - r_0 , \quad y \equiv r_0 (\phi - \Omega_0 t) , \quad z \equiv , \quad t \equiv t \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial r} , \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \phi} , \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} , \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - r_0 \Omega_0 \end{aligned} \quad (25)$$

დაშვების გათვალისწინებით შეგვიძლია ვაჩვენოთ რომ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial (r V'_r)}{\partial r} &= \frac{1}{x + r_0} \frac{\partial ((x + r_0) V'_x)}{\partial x} \sim \frac{1}{r_0} (\epsilon - 1) \frac{1}{\epsilon} (r_0 (\epsilon + 1) V) = \\ &\frac{1}{r_0} (\epsilon^2 - 1) \frac{1}{\epsilon} (r_0 V) \sim -\frac{1}{r_0} \frac{1}{\epsilon} (r_0 V) \Rightarrow \frac{1}{r_0} \frac{\partial (r_0 V'_x)}{\partial x} = \frac{V'_x}{r_0} + \frac{\partial V'_x}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V'_\phi}{\partial \phi} = \frac{r_0}{x+r_0} \frac{\partial V'_y}{\partial y} \sim \frac{1}{\epsilon+1} \frac{1}{\epsilon} V = \frac{1}{\epsilon^2+\epsilon} V \sim \frac{1}{\epsilon} V \Rightarrow \frac{\partial V'_y}{\partial y},$$

V'_x/r_0 -ს, რომელიც არის გლობალური სიმრუდის ნაკვალევი ლოკალურ სისტემაში და ვუგულებელვყოფთ, რის შედეგადაც განტოლებები (21 - 17) გაადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2Ax \frac{\partial}{\partial y} \right\} v'_x + 2[A+B]v'_y = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial x} + \nu \Delta v'_x + \frac{\nu}{r_0} \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{2A}{\bar{\rho}} \frac{\partial \eta'}{\partial y}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2Ax \frac{\partial}{\partial y} \right\} v'_y - 2Bv_x = & -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial y} + \nu \Delta v'_y + \\ & + \frac{A}{\bar{\rho}r_0} \eta' - 2 \frac{A\nu}{r_0} \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{\nu}{2r_0} \left(\frac{\partial v'_y}{\partial x} + \frac{\partial v'_x}{\partial y} \right) + \frac{2A}{\bar{\rho}} \frac{\partial \eta'}{\partial x}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2Ax \frac{\partial}{\partial y} \right\} v'_z = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial z} + \nu \Delta v_z + \frac{\nu}{2r_0} \left(\frac{\partial v'_z}{\partial x} + \frac{\partial v'_x}{\partial z} \right), \quad (28)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2Ax \frac{\partial}{\partial y} \right\} \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0, \quad (29)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2Ax \frac{\partial}{\partial y} \right\} P = -\frac{\gamma \bar{P}}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} \right), \quad (30)$$

$$\frac{\eta'}{\bar{\rho}} = G_P \frac{P'}{\bar{\rho}} + G_S \left(\frac{\partial v'_y}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_x}{\partial y} \right). \quad (31)$$

გამოთვლების გასამარტივებლად ბლანტი წევრებისთვის დავუშვათ რომ რეოლოგიური ეფექტების მახასიათებელი ზომა (λ_{visc}) გაცილებით მცირეა ლოკალური სისტემის მახასიათებელი წარმოსახვით რადიუსზე (r_0), რაც იგივეა რომ $\lambda_{visc} \ll r_0$ ამ დაშვების გათვალისწინებით შეგვიძლია წევრების წყვილ-წყვილად შედარება და განტოლებების გამარტივება. შესაბამისად გან.(26 - 28) გვექნება:

$$\frac{\nu}{r_0} \frac{\partial v'_x}{\partial x} \ll \nu \Delta v'_x$$

$$2 \frac{A\nu}{r_0} \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \ll \frac{2A}{\bar{\rho}} \frac{\partial \eta'}{\partial x}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2Ax \frac{\partial}{\partial y} \right\} v'_x + 2[A+B]v'_y = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial x} + \nu \Delta v'_x + \frac{2A}{\bar{\rho}} \frac{\partial \eta'}{\partial y}, \quad (32)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2Ax \frac{\partial}{\partial y} \right\} v'_y - 2Bv_x = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial y} + \nu \Delta v'_y + \frac{2A}{\bar{\rho}} \frac{\partial \eta'}{\partial x}, \quad (33)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2Ax \frac{\partial}{\partial y} \right\} v'_z = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial z} + \nu \Delta v_z. \quad (34)$$

მიღებულ კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა აღწერს წრფივ შემფოტებათა დინამიკას ლოკალურ სანაცვლებითი სიპრტყის სისტემაში.

3.4 დისპერსიული განტოლება

სივრცითი ფურიე გაშლის გამოყენებით:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}'(\mathbf{r}, t) \\ P'(\mathbf{r}, t)/\bar{\rho} \\ \rho(\mathbf{r}, t)/\bar{\rho} \\ \eta'(\mathbf{r}, t)/\bar{\rho} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \\ -i\tilde{p}(\mathbf{k}, t) \\ i\rho(\mathbf{k}, t) \\ -i\mu(\mathbf{k}, t) \end{pmatrix} \times \exp(i(k_x(t)x + k_y y + k_z z)) \quad (35)$$

სადაც $k_x(t) = k_x(0) - 2Atk_y$ არის სიხერის ფონური წანაცვლებით გამოწვეული k_x -ს დრეიფი, შესაძლებელია (30 - 34), სისტემის გადაწერა შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) &= -k_x(t)u_x - k_y u_y - k_z u_z \\ \dot{u}_x(t) &= 2\Omega u_y - k_x(t)p - \nu k^2 u_x - \nu k_x(k_x(t)u_x + k_y u_y + k_z u_z) + 2Ak_y \mu \\ \dot{u}_y(t) &= 2Bu_x - k_y p - \nu k^2 u_y - \nu k_y(k_x(t)u_x + k_y u_y + k_z u_z) + 2Ak_x(t)\mu \\ \dot{u}_z(t) &= -k_z p - \nu k^2 u_z - \nu k_z(k_x(t)u_x + k_y u_y + k_z u_z) \\ \dot{p}(t) &= c_s^2 \dot{\rho} \\ \mu(t) &= G_P p - G_S(k_x(t)u_y + k_y u_x) \end{aligned} \quad (36)$$

მდგრადობის შესასწავლად ადიაბატურ მიახლოებაში შესაძლებელია განტოლებათა სისტემის (36) დროითი ფურიე გაშლაც, როდესაც მოდების სიხშირული დამოკიდებულება შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც: $\psi(t) \propto \exp(-i\omega(t)t)$. ამ მიახლოებაში ვგულისხმობთ, რომ სიხშირე არის დროზე დამოკიდებული ტალღური რიცხვის ნელა ცვლადი ფუნქცია $\omega = \omega(\mathbf{k}(t))$. ეს სამართლიანია WKB მიახლოებაში, ან როდესაც $k_x(t)/k_y > 1$.

განვიხილოთ სამგანზომილებიანი უკუმშვადი შემთხვევა. უკუმშვადობიდან გამომდინარე ($\rho = const$) უწყვეტობის განტოლება შეიცვლის სახეს და ჩაიწერება როგორც $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$ შესაბამისად მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$\det \begin{bmatrix} -i\omega + \nu k^2 & -2\Omega & 0 & k_x & -2Ak_y \\ -2B & -i\omega + \nu k^2 & 0 & k_y & -2Ak_x \\ 0 & 0 & -i\omega + \nu k^2 & k_z & 0 \\ k_x & k_y & k_z & 0 & 0 \\ G_S k_y & G_S k_x & 0 & G_P & 1 \end{bmatrix} = 0, \quad (37)$$

რომელის ამონახსნიც გვაძლევს მეორე რიგის დისპერსიას, შემდეგი ამონახსნებით:

$$\omega = \pm(\bar{\kappa}^2 - W^2)^{1/2} + i(W - \nu k^2). \quad (38)$$

სადაც $\bar{\kappa}$ - ეპიციკლური სიხშირის რეოლოგიური შესწორებაა:

$$\bar{\kappa} \equiv (-4B\Omega - 4A^2 G_S k_x k_y) \frac{k_z^2}{k^2 - 4AG_P k_x k_y} \quad (39)$$

ხოლო $W \equiv \sigma_A + \sigma_P + \sigma_S$ და გამოისახება როგორც:

$$\sigma_A = \frac{Ak_x k_y}{k^2 - 4AG_P k_x k_y}, \quad (40)$$

$$\sigma_P = 2AG_P \frac{(\Omega k_x^2 + Bk_y^2)}{k^2 - 4AG_P k_x k_y}, \quad (41)$$

$$\sigma_S = -AG_S \frac{(k_x^2 - k_y^2)^2 + k_\perp^2 k_z^2}{k^2 - 4AG_P k_x k_y}. \quad (42)$$

σ_A აღწერს სპირალური ტალღის ტრანზიენტულ ცვლილებას ფონური დიფერენციალური ბრუნვის გამო. σ_P და σ_S აღწერენ წნევისა და დეფორმაციის რეოლოგიით გამოწვეულ ეფექტებს.

აღსანიშნავია რომ ნიუტონური სითხისთვის ($G_P = G_S = 0$) მყარტანოვანი ბრუნვის მიახლოებაში ($A = 0$) ეს თანაფარდობა გადადის კარგად ცნობილ მიღევადი სპირალური ტალღის დისპერსიაში:

$$\omega = \pm \Omega_0 \left| \frac{k_z}{k} \right| - i\nu k^2. \quad (43)$$

ხოლო არანიუტონური დიფერენციალურად მბრუნავი სითხის შემთხვევაში, არსებობს ორი ტიპის ზრდადი მოდა, სპექტრული და პულსაციური არამდგრადობა.

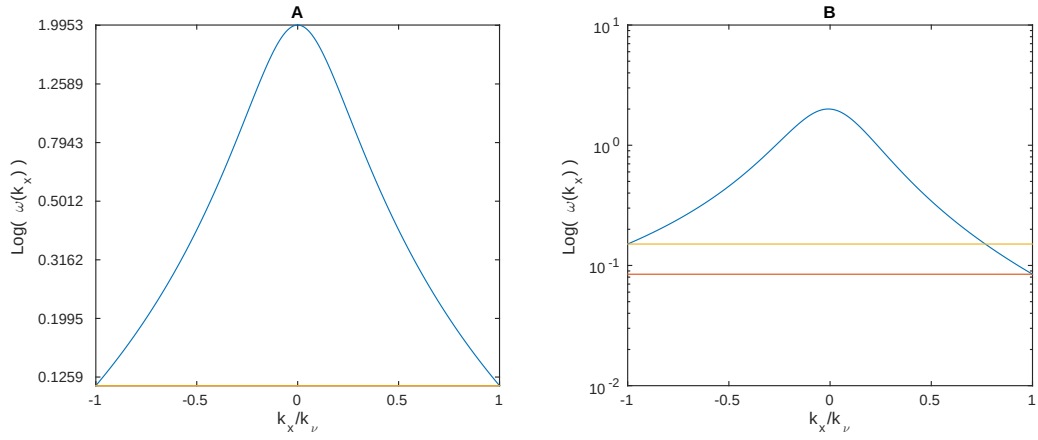
3.5 ეპიციკლური სიხშირის დისპერსია

ნიუტონური სითხის შემთხვევაში ეპიციკლური სიხშირე დამოკიდებულია ბრუნვის სიხშირესა და დიფერენციალური ბრუნვის მახსიათებლებზე. დაგალითად მყარტანოვანი ბრუნვის დროს $\kappa^2 = -4B\Omega = \Omega^2$, ხოლო კეპლერულ დისკებში $\kappa^2 = \Omega^2$ რეოლოგიური სიბლანტის შემთხვევაში, როგორც ჩანს გან.(39) ეპიციკლური სიხშირე ხდება დისპერსიული. იგი ხდება ტალღურ ვექტორზე დამოკიდებული.

ეპიციკლური სიხშირის რეოლოგიური მოდიფიკაცია იწვევს ციკლონუს-ანტიციკლონურ ასიმეტრიას რომელიც გამოწვეულია დეფორმაციის რეოლოგიით. ამ შემთხვევაში κ^2 სიდიდის განსაძღვრებაში მნიშვნელობა აქვს $k_x k_y$ სიდიდის ნიშანს. სურათი (3 A) გვიჩვენებს სპირალური ტალღის სიხშირის დამოკიდებულებას რადიალურ ტალღურ რიცხვზე, რომელიც მიიღება მიდმივი ეპიციკლური სიხშირისას. განსხვავებით პირველი შემთხვევისა სურათ (3 B) ჩანს მოდიფიცირებული ეპიციკლური სიხშირის დროს იგივე დისპერსია. აქ ცხადად ჩანს რომ გაჩნდა ასიმეტრია, რომელიც გამოწვეულია დეფორმაციის რეოლოგიით. გან.(39) გვიჩვენებს რომ G_S პარამეტრი წრფივად წაანაცვლებს ეპიციკლური სიხშირეს და ხდის მას ასიმეტრიული k_x -ის ნიშნის მიმართ, ციკლონურ-ანტიციკლონური ასიმეტრია.

მოერესმხრივ სურ.(4 A) გვიჩვენებს რომ წნევითი რეოლოგია აჩენს რეზონანსებს, რის გამოც სპირალური ტალღის გავრცელებისას შეიძლება გაჩნდეს აკგრძალული ზონები. განსხვავებით დეფორმაციის რეოლოგიისა წნევითი რეოლოგია არ იწვევს ეპიციკლური სიხშირის დისპერსიას, არამედ მოდიფიკაციას უკეთებს სპირალური ტალღის დისპერსიის.

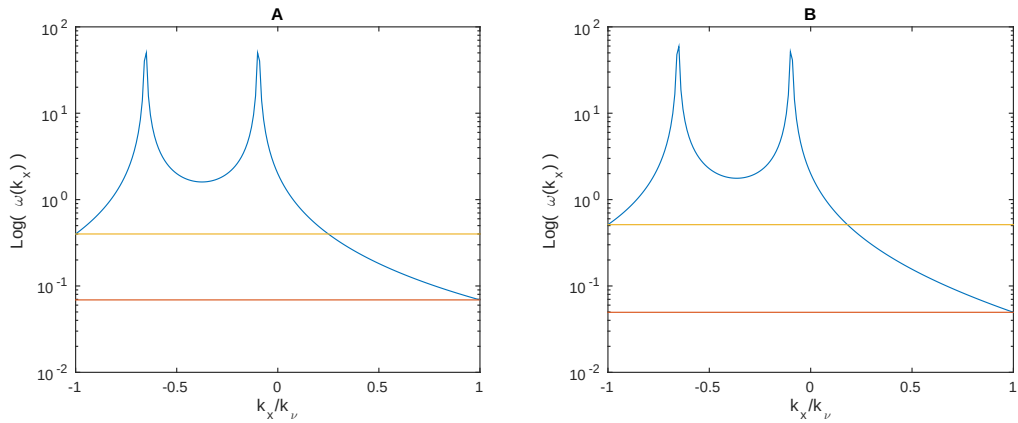
შერეულ შემთხვევაში () ცხადად ჩანს როგორც დეფორმაციის რეოლოგიით გამოწვეული ასიმეტრია ასევე წნევითი რეოლოგიის მიერ სპირალური ტალღის დისპერსიაში შემოტანილი რეზონანსის ადგილები. სურათ (4 B)-ზე ჩანს, რომე სიხშირის საწყის და საბოლოო მინიმუმ-ლობებს შორის სხვაობა გაცილებით დიდია (A) გრაფიკთან შედარებით, რაც გამოწვეულია G_S არანულოვანი მნიშვნელობით.



სურ 3: გრაფიკზე მოყვანილია სპირალური ტალღის სიხშირის, რეოლოგიის გარეშე და სანაცვლების რეოლოგიით

A) $g_s = 0$, $g_P = 0$

B) $g_s = 1$, $g_P = 0$



სურ 4: გრაფიკზე მოყვანილია სფირალური ტალღის სიხშირის ლოგარითმი, წნევიით რეოლოგიით გამოწვეული რეზონანსების საილუსტრაციოდ, დეფორმაციის რეოლოგიის გაუთვალისწინებლად და გათვალისწინებით

A) $g_s = 0$, $g_P = 1$

B) $g_s = 1$, $g_P = 1$

3.6 ბლანტი-ბრუნვითი არამდგრადობა

წრფივი შემფოთების მდგრადობის თვისებების აღმწერი დისპერსიული განტოლება (38) სიხშირის კომპლექსური ამონახსნები მიუთითებენ შემფოთების დროში ექსპონენციალური ზრდის შესაძლებლობზე ჰარმონიული რხევების ნაცვლად (იხ. გან. 35). მართლაც, აღმოჩნდა რომ ჩვენს მიერ მიღებული დისპერსიული განტოლება, რომელიც მოდიფიცირებულია დინების გრანულარული რეოლოგიის თვისებებით, გვიჩვენებს [24] ახალი ტიპის არამდგრადობას.

დიფერენციალურად მბრუნავ რეოლოგიურ სითხეში არსებული არამდგრადობებიდან ერთერთი არის პულსაციური არამდგრადობა, ანუ ზრდადი ამპლიტუდის მქონე პერიოდული რხევები. ამ არამდგრადობის ჩამოყალიბებისთვის აუცილებელია რომ დაკმაყოფილდეს შემდეგი პირობა:

$$\bar{\kappa}^2 > W^2, \quad W > \nu k^2, \quad (44)$$

მეორე ტიპის არამდგრადობა რომელიც შეიძლება ასეთ დინებებში განვითარდეს არის სპექტრული არამდგრადობა, ანუ ექსპონენციალურად ზრდადი მოდა, რომლითსვისაც გვექნება შემდეგი პირობა:

$$\bar{\kappa}^2 < W^2, \quad W + \sqrt{W^2 - \bar{\kappa}^2} > \nu k^2. \quad (45)$$

არამდგრადობის ეფექტის დასაანახად და გამოთვლების გასამარტივებლად განვიხილოთ ღერძულად სიმეტრიული შემფოთებების დროს ($k_y = 0$) ორი ზღვრული შემთხვევა. პირველი, როდესაც ვუგულებელვყოფთ დინების კინემატიკური პარამეტრებით გამოწვეულ რეოლოგიურ ეფექტებს და საწინააღმდეგო ზღვარი, როდესაც უგულებელვყოფილია თერმოდინამიკური პარამეტრებით გამოწვეული ეფექტები.

პირველ შემთხვევაში ($G_S = 0$), როდესაც ვუგულებელვყოფთ სიბლანტის დეფორმაციის ტენზორის მეორე ინვარიანტზე დამოკიდებულებას, გვეძლევა შესაძლებლობა შევადაროთ მიღებული შედეგი უკვე არსებულს. ასეთ შემთხვევაში არამდგრადობის განვითარებისთვის საჭირო პირობა მარტივად გადაიწერება როგორც:

$$G_P < 0$$

თუ შევადარებთ მანამდე ჩაწერილ პულსაციური არამდგრადობის არსებობისთვის პირობას ($G_P > 0$) [34], ვნახავთ რომ ისინი განსხვავდებიან. ეს მიუთითებს რომ ადრე ცნობილი არამდგრადობის მექანიზმი არის თვისობრივად კუმშვადი და უკუმშვად მიახლოებაში ის არ დაიკვირვება.

თუ განვიხილავთ საწინააღმდეგო ზღვარს ($G_P = 0$), მაშინ არამდგრადობის განვითარებისთვის საჭირო პირობა შეიძლება გადაიწეროს როგორც:

$$\sigma_S = -AG_S k_x^2 > \nu(k_x^2 + k_z^2)$$

ეს არის ახალი ტიპის ბლანტი-ბრუნვითი არამდგრადობა, რომელიც გამოწვეულია წანაცვლებითი დინებით. მისთვის დამახასიათებელია თითქმის ერთგვაროვანი ვერტიკალური სტრუქტურა $|k_z/k_x| \ll 1$. დინების სიჩქარის კვლევრულ პროფილს გავითვალისწინებთ გან(4,10)-ში, შეგვიძლია გამოვთვალოთ დეფორმაციის ტენზორის ლოკალური $\xi(r_0) = -2A$ მნიშვნელობა, მისი მეშვეობით შესაძლებელია მდგრადობის კრიტერიუმის განზოგადებულად ჩაწერა, როგორც:

$$\left(\frac{\partial \ln \eta}{\partial \ln \xi} \right)_P > 2. \quad (46)$$

ზოგადად არამდგრადობისთვის შეიძლება ზოგადი პირობის ჩაწერა $\sigma_P + \sigma_S > \nu k^2$. შეგვიძლია შემოვიღოთ k_ν ტალღური რიცხვი რომელიც შეესაბამება ერთ ბრუნში დისიპირებად ტალღებს,

$$\Omega_0 = \nu k_\nu^2. \quad (47)$$

არამდგრადი მოდეები ლოკალიზებული იქნება სპექტრალური სივრცის უბანში რომელიც შემოი-საზღვრება დისიპაციური ტალღის სიგრძეებით.

გამოსახულება (5) გვიჩვენებს შემფოთებების ზრდის ინკრემენტს. გრაფიკებიდან ჩანს რომ წნევით გამოწვეული ეფექტები უარყოფითი რეოლოგიური პარამეტრებისას ხელს უწყობს დიდი ზომის სტრუქტურების ჩამოყალიბებას ($k_x/k_\nu \ll 1$ გრაფიკი (A)) და ყალიბდება უარყოფითი რეოლოგიური პარამეტრებისას. დეფორმაციული რეოლოგიის ეფექტები ეხმარება მცირემასშტაბიანი სტრუქტურების ჩამოყალიბებას ($k_x \sim k_\nu$ გრაფიკი (B)), გრაფიკიდან ჩანს რომ ზრდის ინკრემენტის მაქსიმალური მნიშვნელობები მიიღწევა k_ν დისიპაციური ტალღის სიგრძეების მახლობლობაში, თუმცა გასათვალისწინებელია რომ არსებობს გრანულარული რეოლოგიის გამოყენების ზღვარი, რომლის მიღმაც მოცემული მოდელი არასწორია. აღსანიშნავია ის რომ ბლანტ-ბრუნვით არამდგრადობას ახასიათებს თითქმის ერთგვაროვანი ვერტიკალური სტრუქტურა $k_z/k_\nu \ll 1$.

დერძულად არასიმეტრიული შემფოთებების შემთხვევაში შესაძლებელია რიცხვითად ამოხსნა. გან.(36) არის საწყისი პირობის ამოცანა. გამოსახულება (6) გვიჩვენებს შემფოთებების ზრდის ინკრემენტს, რომელიც მსგავსად წინა შემთხვევისა შემოსაზღვრულია ბლანტი დისიპაციური ტალღის სიგრძით k_ν . გრაფიკებზე ნაჩვენებია ისრები მიუთითებენ მოდეების დრეიფის მიმართულებას ($k_x = k_x(t)$) და სიდიდეს. დრეიფის გამო დერძულად არა-სიმეტრიულ მოდეებს აქვს სასრული დრო სანამ ისინი მიაღწევენ დისიპაციური ტალღის სიგრძეებს, რის შემდეგაც ისინი სწრაფად მიიღვეიან.

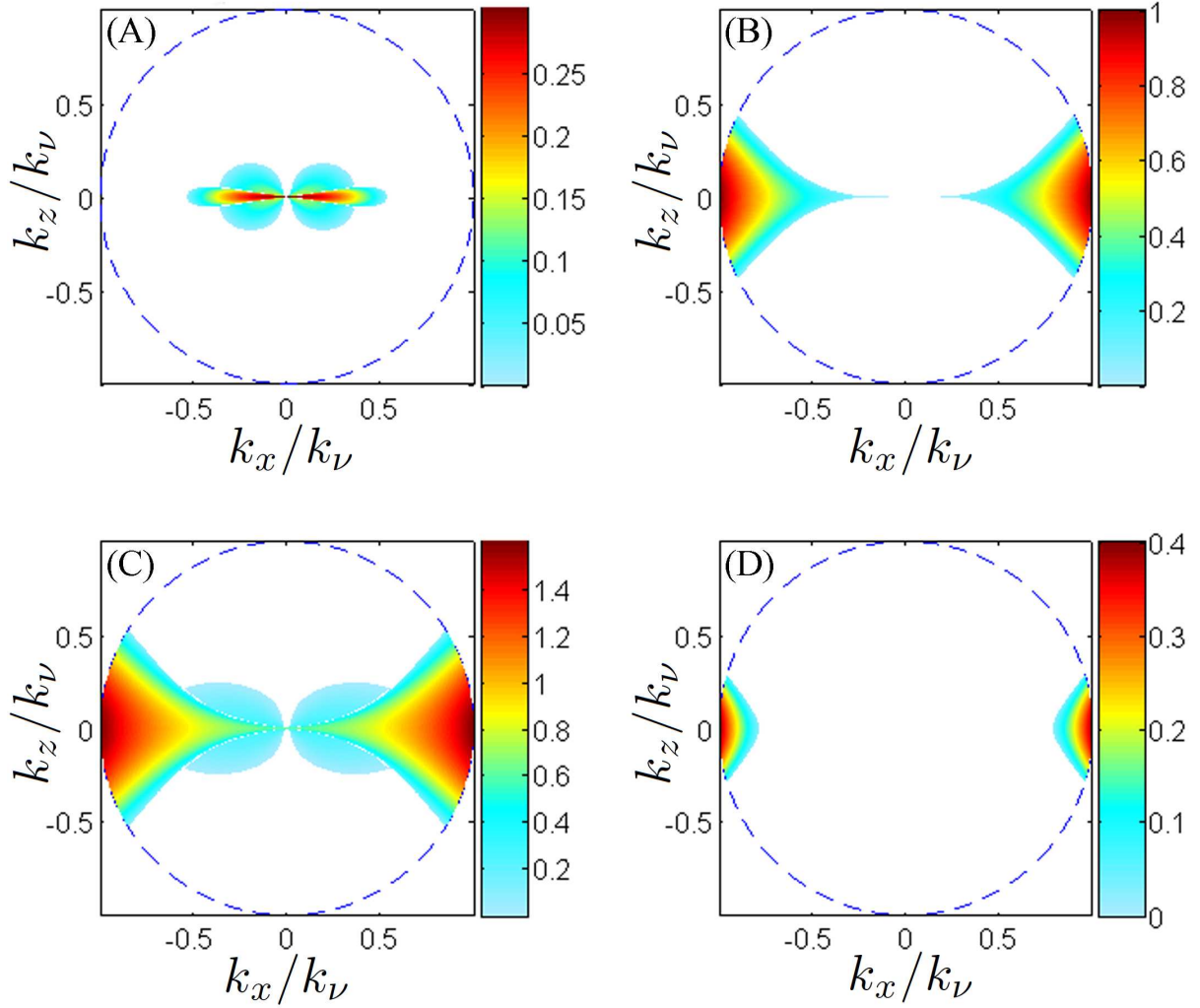
გრაფიკებიდან ჩანს რომ მოდეების დრეიფის გამო, რომელიც გამოწვეულია წანაცვლებითი დინებით, წნევითი რეოლოგიური მოდეები განიცდიან ასიმეტრიას. ჩანს რომ წინმსწრები მოდეები იზრდებიან უფრო სწრაფად დადებითი წნევითი რეოლოგიური პარამეტრისთვის $G_P > 0$, ხოლო ჩამომრჩენი მოდეები უარყოფითისას $G_P < 0$.

ასევე შესაძლებელია გან.(36) რიცხვითი ამონახსნებით დავთვალოთ ენერგიის ცვლილება განსხვავებული აზიმუტალური რიცხვებისთვის. აქ კარგად ჩანს არასიმეტრიული მოდეების ზრდის ტრანზიენტული ხასიათი.

არამდგრადობის ხასიათის უკეთ შესასწავლად შეგვიძლია განვიხილოთ სიჩქარის როტორის ვერტიკალური მდგენელი $\text{curl}(\mathbf{u})_z$ ვერტიკალურად ერთგვაროვან ($k_z = 0$) შემთხვევაში, თუ ვუგულვებლავყოფთ წნევით რეოლოგიას $G_P = 0$ მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\frac{d}{dt} [\ln (\text{curl}(\mathbf{u})_z)] = q G_S \Omega_0 \frac{(k_x(t)^2 - k_y^2)^2}{k(t)^2} - \nu k(t)^2, \quad (48)$$

განტოლება ცხადყოფს ნაპოვნი არამდგრადობის ფიზიკურ ხასიათს. ბლანტი-ბრინვითი არამდგრადობის ფირობების შესრულებისას ზრდას განიცდის გრიგალის მოდული, როდესაც რეოლოგიის პარამეტრი სძლევს ბლანტი დისიპაციის ზემოქმედებას.



სურ 5: ღერუულად სიმეტრიული შემფოთების ზრდის ინკრემენტის $I(\omega(k_x, k_y))/\Omega_0$ ნორმირებული მნიშვნელობები (k_x, k_y) სიბრტყეში, განსხვავებული რეოლოგიური პარამეტრებისა და დინებისთვის. აქ მოყვანილია უგანზომილებო სიდიდეები $g_S = \Omega_0 G_S / \nu$ და $g_P = \Omega_0 G_P$

(A) $g_P = -0.1$, $g_S = 0$ (B) $g_P = 0$, $g_S = 1$

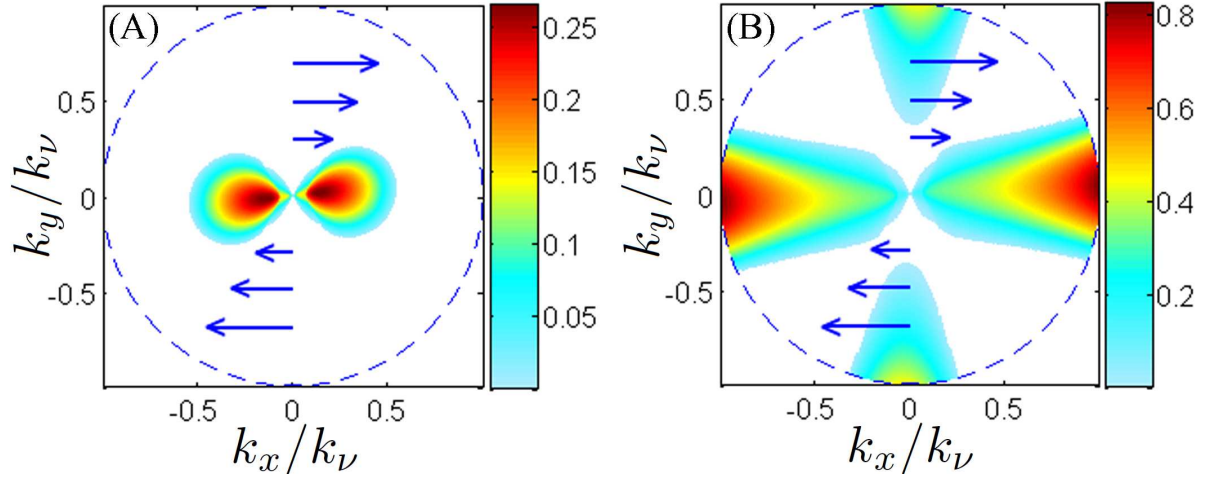
(C) $g_P = -0.1$, $g_S = 1$ (D) $g_P = 0.1$, $g_S = 1$

განტოლება მიგვითითებს, რომ არამდგრადობის განვითარება კეპლერულ დინებებში ($q > 0$) ხდება დადებითი წინაცვლების გეოლოგიის ჭემათხვევაში $G_S > 0$, ხოლო თუ წარმოვიდგენთ რეოლოგიურ დინებას, რომელიც დამატებითი ფაქტორების გამო წონასწორულია $q < 0$ პროფილის შემთხვევაში, ბლანტი-ბრუნვითი არამდგრადობა განვითარდება $G_S < 0$ შემთხვევაში.

3.7 კუმშვადი სპექტრი

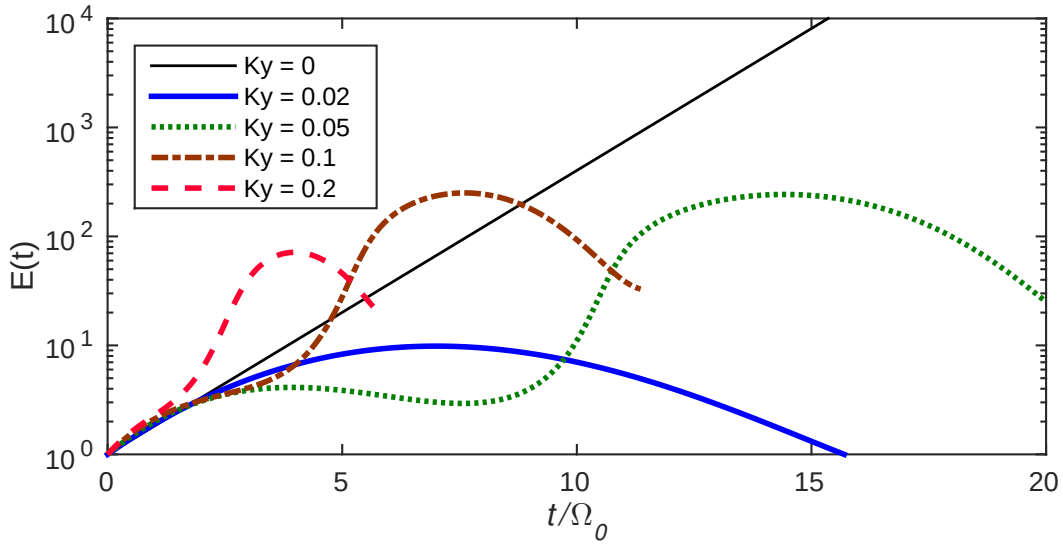
კუმშვადი ამოცანის ამოხსნამდე, მივიღოთ წრფივი სპექტრის ანალიზური ფორმა. რეოლოგიური ეფექტების შესწავლისას სავარაუდოა რომ, სითხის სიბლანტე გაცილებით უფრო ძლიერ დამოკიდებულებას ავლენს სიჩქარის დეფორმაციაზე, ვიდრე სითხის წნევაზე. მაშასადამე გამარტივებისთვის შეგვიძლია განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც წნევითი რეოლოგია უგულვებელყოფილია ($G_P = 0$).

მინიმალური ამონახსნის საპოვნელად შესაძლებელია განვიხილოთ მყარტანოვანი ბრუნვის



სურ 6: ღერძულად არა-სიმეტრიული შემფოთების ზრდის ინკრემენტის $I(\omega(k_x, k_y))/\Omega_0$ ნორმირებული მნიშვნელობები (k_x, k_y) სიბრტყეში, განსხვავებული რეოლოგიური პარამეტრებისას დინებისთვის. აქ მოყვანილია უგანზომილებო სიდიდეები $g_S = \Omega_0 G_S / \nu$ და $g_P = \Omega_0 G_P$

(A) $g_P = -0.2$, $g_S = 0$ (B) $g_P = -.2$, $g_S = 1.5$



სურ 7: გრაფიკზე ასახულია უკუმშვად შემთხვევაში ენერგიის დროში ცვლილება განსხვავებული აზიმუტალური ტალღური რიცხვებისთვის. ენერგიის მრუდებზე აღინიშნება როგორც ტრანზიენტული ზრდა ასევე რეოლოგიური ეფექტებით გამოწვეული მატება.

შემთხვევა, როდესაც სითხის წანაცვლება უგულვებელყოფილია. როგორც ჩანს გან.(36) წანაცვლების უგულვებელყოფისას, სითხის დეფორმაციის რეოლოგიური სიბლანტით გამოწვეული ეფექტები არ უნდა გამოჩნდნენ. იმ შემთხვევაში როდესაც უგულვებელყოფილია სითხის წნევით გამოწვეული რეოლოგიური ეფექტები, ჩვენ უნდა მივიღოთ სპირალური ტალღის სიბლანტით მოდიფიცირებული დისპერსია. მიღებულ დისპერსიას ექნება შემდეგი სახე:

$$\left[\left(\omega + i \frac{\nu k^2}{2} \right)^2 - \left(c_s^2 k^2 - \frac{\nu^2 k^4}{4} \right) \right] [(\omega + i \nu k^2)^2 - 4\Omega^2] - 4\Omega^2 c_s^2 k_\perp^2 = 0. \quad (49)$$

შეგვიძლია ეს განტოლება განვიხილოთ დაბალსიხშირულ მიახლოებაში, როდესაც $\omega^2 / c_s^2 k^2 \ll 1$. ასეთ მიახლოებაში შეგვიძლია განტოლებაში უგულვებელყოთ $(\omega - i \nu k^2 / 4)^2$

წვერი და ვახვენოთ თუ როგორია კუმშვად შემთხვევაში მიღებული სპირალური ტალღის დისპერსია.

$$\omega = \pm 2\Omega \frac{|k_z|}{|k|} \left(1 + \frac{\nu^2 k^4}{4c_s^2 k^2} \right)^{1/2} - i\nu k^2 \quad (50)$$

აქ ჩვენ ვხედავთ რომ განსხვავებით უკუმშვად შემთხვევაში მიღებული დისპერსიისა გან.(43) გაჩნდა დამატებითი მცირე შესწორება $\nu^2 k^4 / c_s^2 k^2 \ll 1$. მარტვი საჩვენებელია რომ ეს დისპერსია პირდაპირ გადადის უკუმშვად შემთხვევიშთვის მიღებულ დისპერსიაში, საკმარისია მხოლოდ იმის გახსენება რომ უკუმშვად შემთხვევაში $c_s \rightarrow \infty$, თუ შევიტანთ ამას გან.(50) მივიღებთ ზღვრულ უკუმშვად შემთხვევას.

4 პირდაპირი რიცხვითი მოდელირება

რეოლოგიური ამოცანების მოდელირებისათვის საჭიროა არსებობდეს რიცხვითი ამომხსნელი, რომელშიც იქნება გათვალისწინებული სიბლანტის რეოლოგიური წვერი. ამ ამოცანისთვის ჩვენ ავირჩიეთ პირდაპირი რიცხვითი სიმულაციების (DNS) პარალელური კოდი PLUTO. მისი მოდულარული სტრუქტურა შესაძლებელს ხდის, კოდის ძირითადი ტანისა და სტრუქტურის შეუცვლელად დაემატოს რეოლოგიური მოდელისთვის დამატებითი მოდული, როელშიც დანერგილი იქნება სიბლანტის რეოლოგიური ხასიათი.

4.1 რიმან-გოდუნოვის რიცხვითი ამომხსნელი PLUTO

PLUTO წარმოადგენს კუმშვადი ასტროფიზიკური დინებების პირდაპირი რიცხვითი მოდელირების (DNS) პარალელურ კოდს. იგი დაფუძნებულია რიმან/გოდუნოვის ამომხსნელზე და შექმნილია მოდულარული სახით, მასში გათვალისწინებულია როგორც ჰიდროდინამიკა, ასევე მაგნიტოჰიდროდინამიკა. თვლისთვის გამოიყენება სასრულ-მოცულობით/სასრულ სხვაობათა მეთოდი შენახვის განტოლებათა სისტემის ინტეგრებისთვის. შესაბამისად, ჩვენს შემთხვევაში გვექნება ჰიდროდინამიკის განტოლებათა სისტემა, რომელიც გადაწერილია კონსერვატიული ფორმით. სიბლანტის გასათვალისწინებლად კი განტოლებებში დამატებულია წყაროს წვერი, რომელიც განისაზღვრება შესაბამისად პლუტოსთვის ჩვენ მიერ დაწერილი ახალი მოდულის **Rheo**-ს მიერ.

PLUTO იყენებს სტრუქტურირებული ბადის მიდგომას, იმისთვის რომ ამოხსნას შენახვის განტოლებათა სისტემა. ნაკადის დამახასიათებელი სიდიდეები ლოკალურად კვადრატულ ბადეზე არის დისკრეტიზირებული, რომელიც არის შემოსაზღვრული და გარშემორტყმული დამატებითი, ფიქტიური წერტილებით. ფიქტიური წერტილები გამოიყენება სასაზღვრო პირობების იმპლემენტაციისთვის მოცემულ სტენსილზე. გამოთვლები ხორციელდება 64 ბიტისანი ორმაგი სიზუსტის მცურავწერტილიან ცვლადებში.

PLUTO ძირითადი მოდულები დაწერილია C-ზე რაც ამარტივებს მის კომპილირებას განსხვავებულ პლათფორმებზე. თუმცა ბადის ადაპტური გაუმჯობესების (AMR) მოდულში გამოიყენება როგორც C++ ასევე Fortran. დამატებითი მოდულები ასევე მოიცავენ კვლევითი თანამბრუნავი სისტემის მოდულს FARGO და წანაცვლებითი დინების მოდულ ShearingBox.

4.2 რეოლოგიური მოდული - Rheo

ბლანტი ძალები ემატება ჰიდროდინამიკის განტოლებებს ორი პარაბოლური დიფუზიური წვერით, ენერგიისა და იმპულსის შენახვის განტოლებებში. სიბლანტის ძალის ტენზორის დამატება იმპულსის შენახვის განტოლებაში გვაძლევს შერეულ ჰიპერბოლურ/პარაბოლურ სისტემას, ღომელშიც გათვალისწინებულია $[\tau_{lm}]_{ijk}^n$ ბლანტი ძალის ტენზორის ნაკადი. აქ და ამ თავის ყველა მომდევნო გამოსახულებებში კვადრატული ფრჩხილების შიგნით ინდექსები ემთხვევა აინშტაინის ინდექსებს, ხოლო კვადრატულ ფრჩხილებს გარეთ ინდექსები აღნიშნავენ ბადის დისკრეტულ ინდექსებს, ხოლო ზედა ინდექსი არის დისკრეტული დროითი ინდექსი. ასევე სიჩქარის ვექტორი ჩაწერის გამარტივებისთვის შემოღებულია როგორც $\mathbf{V} = (U, V, W)$

დისკრეტული სახით დაძაბულობის ბლანტი ტენზორის გამოსახვისთვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ გან.(4) რომელშიც შემავალი დეფორმაციის ტენზორის დისკრეტული სახე სასრულსხვა-

ობებიანი წარმოებულის სახით.

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{xx}]_{ijk}^n &= 2 \frac{U_{ijk}^n - U_{i+1,jk}^n}{x_i - x_{i+1}} \\ [\varepsilon_{yy}]_{ijk}^n &= 2 \frac{V_{ijk}^n - V_{i,j+1,k}^n}{y_j - y_{j+1}} \\ [\varepsilon_{zz}]_{ijk}^n &= 2 \frac{W_{ijk}^n - W_{ij,k+1}^n}{z_k - z_{k+1}} \end{aligned}$$

ვინაიდან პლუტოს ესაჭიროება ნაკადები ბადის წერტილების საზღვრებს, რათა გამოთვალოს სრული წყაროს წვერი განტოლებებში, ამიტომ შერეული წვერების სახე რთულდება და წარმოებულის ადებისას ავტომატურად აიღება ნაკადებიც, რომლებიც პლუტოში წრფივ მიახლოებაში ანგარიშდება ($flux(U_i) = 0.5(U_i + U_{i+1})$), შესაბამისად წარმოებულის ადებისას ანგარიშდება ნაკადები და შემდეგ გამოიანგარიშება ნაკადის წარმოებული. x მიმართულებით გამოთვლის შაბლონი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{xy}]_{ijk}^n &= \frac{1}{2(y_j - y_{j+1})} \left(\frac{U_{k,j+1,i}^n + U_{k,j+1,i+1}^n}{2} - \frac{U_{k,j-1,i}^n + U_{k,j-1,i+1}^n}{2} \right) + \frac{V_{ijk}^n - V_{i+1,jk}^n}{x_i - x_{i+1}} \\ [\varepsilon_{xz}]_{ijk}^n &= \frac{1}{2(z_k - z_{k+1})} \left(\frac{W_{k+1,j,i}^n + W_{k+1,j,i+1}^n}{2} - \frac{U_{k-1,j,i}^n + U_{k-1,j,i+1}^n}{2} \right) + \frac{W_{ijk}^n - W_{i+1,jk}^n}{x_i - x_{i+1}} \\ [\varepsilon_{yz}]_{ijk}^n &= \frac{1}{2(y_j - y_{j+1})} \left(\frac{W_{k,j+1,i}^n + W_{k,j+1,i+1}^n}{2} - \frac{W_{k,j-1,i}^n + W_{k,j-1,i+1}^n}{2} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2(z_k - z_{k+1})} \left(\frac{V_{k+1,j,i}^n + W_{k+1,j,i+1}^n}{2} - \frac{V_{k-1,j,i}^n + V_{k-1,j,i+1}^n}{2} \right) \end{aligned}$$

y მიმართულებით გამოთვლის შაბლონი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{xy}]_{ijk}^n &= \frac{1}{2(x_i - x_{i+1})} \left(\frac{V_{k,j,i+1}^n + V_{k,j+1,i+1}^n}{2} - \frac{V_{k,j,i-1}^n + V_{k,j+1,i-1}^n}{2} \right) + \frac{U_{ijk}^n - U_{i,j+1,k}^n}{y_j - y_{j+1}} \\ [\varepsilon_{xz}]_{ijk}^n &= \frac{1}{2(x_i - x_{i+1})} \left(\frac{W_{k+1,j,i}^n + W_{k+1,j,i+1}^n}{2} - \frac{U_{k-1,j,i}^n + U_{k-1,j,i+1}^n}{2} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2(z_k - z_{k+1})} \left(\frac{U_{k+1,j,i}^n + U_{k+1,j,i+1}^n}{2} - \frac{U_{k-1,j,i}^n + U_{k-1,j,i+1}^n}{2} \right) \\ [\varepsilon_{yz}]_{ijk}^n &= \frac{1}{2(z_k - z_{k+1})} \left(\frac{V_{k+1,j,i}^n + V_{k+1,j,i+1}^n}{2} - \frac{U_{k-1,j,i}^n + U_{k-1,j,i+1}^n}{2} \right) + \frac{W_{ijk}^n - W_{i,j+1,k}^n}{y_j - y_{j+1}} \end{aligned}$$

z მიმართულებით გამოთვლის შაბლონი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{xy}]_{ijk}^n &= \frac{1}{2(x_i - x_{i+1})} \left(\frac{V_{k+1,j,i}^n + V_{k+1,j,i+1}^n}{2} - \frac{V_{k-1,j,i}^n + V_{k-1,j,i+1}^n}{2} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2(z_k - z_{k+1})} \left(\frac{U_{k,j+1,i}^n + U_{k+1,j+1,i}^n}{2} - \frac{U_{k,j-1,i}^n + U_{k+1,j-1,i}^n}{2} \right) \\ [\varepsilon_{xz}]_{ijk}^n &= \frac{1}{2(x_i - x_{i+1})} \left(\frac{W_{k,j,i+1}^n + W_{k,j+1,i+1}^n}{2} - \frac{W_{k,j,i-1}^n + W_{k,j+1,i-1}^n}{2} \right) + \frac{U_{ijk}^n - U_{ij,k+1}^n}{z_k - z_{k+1}} \end{aligned}$$

$$[\varepsilon_{yz}]_{ijk}^n = \frac{1}{2(y_j - y_{j+1})} \left(\frac{V_{k,j+1,i}^n + V_{k+1,j+1,i}^n}{2} - \frac{U_{k,j-1,i}^n + U_{k+1,j-1,i}^n}{2} \right) + \frac{W_{ijk}^n - W_{ij,k+1}^n}{z_k - z_{k+1}}$$

დაძაბულობის ბლანტი ტენზორის დასათვლელად, გარდა დეფორმაციის ტენზორისა საჭიროა სიბლანტის გამოანგარიშებაც. სიბლანტის იმპლემენტაციისთვის საჭიროა რომ აღიწეროს მისი დამოკიდებულება როგორც წნევაზე ასევე დეფორმაციის ტენზორის მეორე ინვარიანტზეც. ამ მიზნისთვის ხელსაყრელია შემოვიღოთ უგანზომილებო ცვლადები: $\bar{P} = P/P_0$, $\bar{\xi} = \xi/\xi_0$ $g_P = G_P P_0/\nu$, $g_S = G_S \bar{\rho} \xi_0/\nu$ შესაბამისად სიბლანტის დიკრეტული გამოსახულებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\nu_{ijk}^n = \mu(\bar{P}_{ijk}^n)^{g_P} (\bar{\xi}_{ijk}^n)^{g_S}, \quad (51)$$

სადაც μ არის სიბლანტის მუდმივი პარამეტრი, ხოლო ξ_{ijk}^n გამოითვლება $[\varepsilon_{lm}]_{ijk}^n$ -ს მეშვეობით როგორც:

$$\xi_{ijk}^n = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{lm}^n [\varepsilon_{lm}]_{ijk}^n \right)$$

ჩვენ მიერ გამოყენებული დისკრეტული შაბლონის გამოყენება შესაძლებელია ჰიდროდინამიკური მოდულში დეკარტული კოორდინატთა სისტემის რეოლოგიურ მოდელირებაში.

4.3 საწყისი მნიშვნელობები

ამოცანის მოდელირების დაწყებამდე აუცილებელია სათანადო საწყისი მნიშვნელობების შეირჩევა. მოცემული ამოცანისთვის საწყის პირობებს ვიღებთ წონასწორულ მნიშვნელობას დამატებული მცირე შემფოთება. შემფოთებები აირჩევა ისე რომ ისინი იყვნენ ფიზიკურ და ფაზურ სივრცეში ლოკალიზებული. შემოვიღოთ უკუმშვადი შემფოთებები, რომელთა მისაღებად ვაგებთ ფაზურ სივრცეში ლოკალიზებულ დენის ფუნქციის ფურიე სახეს. დენის ფუნქციას გამოვთვლით, რომელსაც ვუკეთებთ ლოკალიზაციას რეალურ ცივრცეში. შემდეგ კი მისი მეშვეობითაც ვანგარიშობთ სიჩქარეებს, წნევისა და სიმკვრივის შემფოთებებს.

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}' \\ \rho &= \rho_0 + \rho' \\ P &= P_0 + P' \end{aligned} \quad (52)$$

საწყისი პირობების შერჩევისას სიმკვრივისა და წნევის ფონური მნიშვნელობები განისაზღვრება ჩვენ მიერ განსაზღვრული მეთოდით, ხოლო სიჩქარის წონასწორული მნიშვნელობა განისაზღვრება PLUTO-ს Shearing-Box მოდულის მიერ როგორც:

$$\mathbf{V}_0 = (0, -q\Omega_{kep}x, 0)$$

სადაც q , Ω_{kep} არის კოდის ტანში განსაზღვრული მუდმივები, ხოლო x წარმოადგენს ბადის იმ კოორდინატს, რომლის გასწვრივაც გვაქვს წანაცვლება.

საწყისი პირობების შესარჩევად საჭიროა, ავაგოთ ბადეზე დაყრდნობილი დისკრეტული ვექტორები სიჩქარის სამი კომპონენტისათვის, წნევისთვისა და სიმკვრივისათვის. ამისთვის შემოვიღოთ ნორმირებული ცვლადები L_x , L_y რომლებიც არის გამოთვლითი დომენის x და y

მიმართულებით სიგრძეები და მათი შესაბამისი ტალღური რიცხვების ვექტორები $[k_x]_i$, $[k_y]_j$. ასევე უნდა განიმარტოს დომენში ყოველი მიმართულებით არსებული დისკრეტულ უჯრედ-თა/წერტილთა რაოდენობა. მათ ავლნიშნავთ როგორც N_x , N_y , N_z . ეს კი ნიშნავს რომ ჩვენ გვექნება დისკრეტული ინდექსები i , j , k რომლებიც გარბიან მნიშვნელობებს $i = (1 \cdots N_x)$, $j = (1 \cdots N_y)$, $k = (1 \cdots N_z)$.

როდესაც ცნობილია დისკრეტული ბადის განზომილებები და შესაბამისი მისი სიგრძეები შეგვიძლია ავაგოთ როგორც დისკრეტული, ფიზიკური სივრცის შესაბამისი კოორდინატების ვექტორები x_i , y_j , z_k ასევე დისკრეტული ტალღური ვექტორები $[k_x]_i$, $[k_y]_j$.

$$L_x = |x_{N_x} - x_1|$$

$$L_y = |y_{N_y} - y_1|$$

ასევე შემოვიღოთ ტალღური ვექტორების მინიმალური და მაქსიმალური მნიშვნელობები $(k_x)_{min}$, $(k_x)_{max}$, $(k_y)_{min}$, $(k_y)_{max}$ რომლებიც შეესაბამება დომენში შესაძლო ყველაზე გრძელ და მოკლე ტალღის სიგრძეებს:

$$(k_x)_{min} = \frac{2\pi}{L_x}, \quad (k_x)_{max} = \frac{2\pi}{L_x}(N_x - 1)$$

$$(k_y)_{min} = \frac{2\pi}{L_y}, \quad (k_y)_{max} = \frac{2\pi}{L_y}(N_y - 1)$$

შესაბამისად შეგვიძლია ავაგოთ დისკრეტული ტალღური ვექტორები $[k_x]_i$, $[k_y]_j$ რომელთა მეშვეობითაც გამოისახება დენის ფუნქციის ფურიე სახე როგორც:

$$\tilde{W}(k) = \epsilon \exp \left(-\frac{k_x^2}{K_x^2} - \frac{k_y^2}{K_y^2} \right) \mathbb{R},$$

სადაც $\mathbb{R}$ არის შემთხვევითი რიცხვები და $\mathbb{R} \in [0, 1]$, ხოლო $K_x = 8$ და $K_y = 12$ არის ემპირი-ულად შერჩეული ნახევარღერძების სიგრძეები რომელშიც ლოკალიზებულია დენის ფუნქციის ფურიე სახე. (იხილეთ სურ.8). არა-მდულირებული დენის ფუნქციის შეგვიძლია აღვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\bar{\Psi}_{ij} = W(r)_{ij}, \quad W(r) = \iint \tilde{W}(k) dk$$

ფურიე სივრცეში ლოკალიზების მსგავსად, შეგვიძლია შემოვიღოთ მოდულაციის ფუნქცია, რომელიც შემოსაზღვრავს შეშფოთებებს, რეალურ სივრცეში და არ უშვებს შეშფოთებებს დომენის საზღვრებთან. მოდულაციის ფუნქციის მეშვეობით კი შეგვიძლია ჩავწეროთ დენის ფუნქცია.

$$\mathcal{M}_i = \exp \left(-\frac{(x_i - x_0)^2}{x_{loc}^2} \right),$$

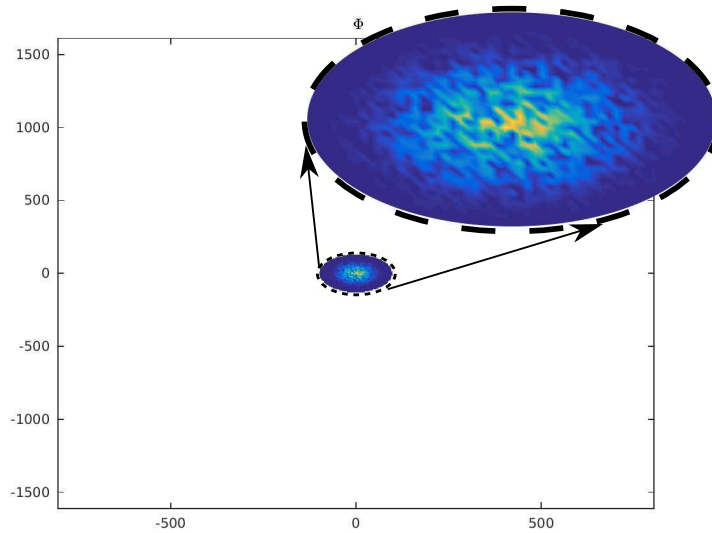
$$\Psi_{ij} = M_i \bar{\Psi}_{ij}.$$

დენის ფუნქციის მეშვეობით შეგვიძლია გამოვითვალოთ სიჩქარის კომპონენტები როგორც:

$$V'_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V'_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

ან დისკრეტულ ფორმით:

$$[V'_y]_{ijk} = \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$



სურ 8: გამოსახულება გვიჩვენებს საწყისი მნიშვნელობების დასათვლელად აგებულ დენის ფუნქციის ფურიე სახეს $W(k_x, k_y)$. ღერძებზე გადაზომილია ნორმირებული ტალღური ვექტორები k_x, k_y

$$[V'_x]_{ijk} = -\frac{\Psi_{j,i+1} - \Psi_{i,i-1}}{y_{i+1} - y_{i-1}}$$

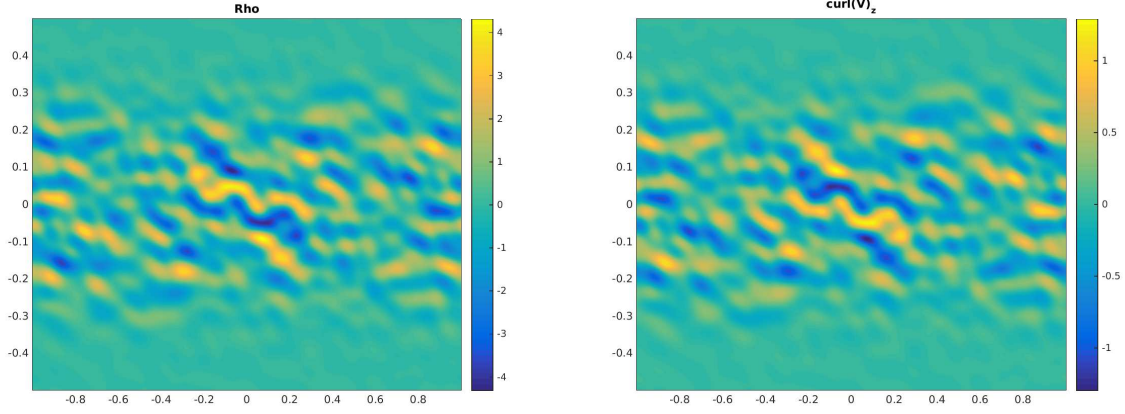
შედეგად შესაძლებელია სიმკვრივისა და წნევის შემფოთებების დათვლა (იხილეთ სურ.9)

4.4 ფიდუციური მოდელი

მოდელირებისას აუცილებელია არსებობდეს როცხვითი თვლების საყრდენი კონფიგურაცია, რომელთან შედარებითაც შესაძლებელი იქნება ჩვენთვის საინტერესო შედეგების დანახვა ფიდუციური მოდელი გვეხმარება გავადგინოთ არის თუ არა თვლით მიღებული შედეგი სისტემისთვის ჩვეული მდგომარეობა თუ ეს მისგან განსხვავებული. შესაბამისად საჭიროა მდგრადი რიცხვითი მოდელის შექმნა. ასეთ თვლას ფიდუციური ეწოდება.

ფიდუციური თვლა უნდა ემთხვეოდეს ძირითად თვლას, მაგრამ არ უნდა შეიცავდეს იმ ეფექტებს რომელის კვლევასაც გულისხმობს ძირითადი თვლა. ეს იძლევა შესაძლებლობას შევადაროთ, მართლა გამოჩნდა თუ არა ეფექტი რომელსაც ველოდით.

სურათ (10) მოყვანილია ფიდუციური თვლის შედეგებით აგებული სიჩქარის როტორის ვერტიკალური მდგენელის მნიშვნელობა. ეს სიდიდე ვიზუალიზაციისთვის შეირჩა ვინაიდან ბლანტი-ბრუნვითი არამდგრადობისთვის ნაჩვენები იყო რომ უნდა მოველოდეთ სწორედ ამ სიდიდის ზრდას. სურათის მარცხენა სვეტი შეესაბამება დისკის ერთ ბრუნს, ხოლო მარჯვენა სვეტში ყოველი გამოსახულება შეესაბამება მომდევნო თითო ბრუნს. როგორც ფიდუციურმა თვლებმა გვიჩვენა, სისტემაში საწყისი შემფოთებების შეტანის შემდეგ საჭიროა ერთი ბრუნი რათა მოხდეს სისტემის არაწრფივი შეგუება. ასევე ამ თვლებმა აჩვენა რომ სისტემა არის მდგრადი. მიღებული შედეგებიდან გამოჩნდა რომ სისტემაში რადიალური მიმართულებით საწყისი შემფოთებებით გამოწვეული ბგერითი ტალღის ნაკვალევი. ამ ტალღის ზეგავლენა შეგვიძლია დავინახოთ მაგჯვენა კილონაშო მოყვანილი გამოსახულებებიდან. გარდა ადვექციით გამოწვეული გამოსახულების დეფორმაციისა ჩანს ფონის ცვლილება ყოველ მეორე გამოსახულებაზე. ფონის ასეთი ცვლილება არის ბგერითი ტალღის ზედდების შედეგი, პერიოდულობა კი პერიოდული სასაზღვრო პირობითაა გამოწვეული



სურ 9: გამოსახულება გვიჩვენებს სიმკვრივის და სიჩარის როტორის z კომპონენტის საწყისი შემფოთებებს, განაწილებულს გამოთვლით დომენში. ვერტიკალური ღერძი შეესაბამება x კოორდინატს, ხოლო ჰორიზონტალური y კოორდინატს

4.5 რიცხვითი თვლის შედეგები

რიცხვითი მოდელის აღსაწერად ვიყენებთ შემდეგ ფარამეტრებს: რეინოლდსის რიცხვ Re , მახის რიცხვი $\mathcal{M}$, დრო ნორმირებული ერთი სრული ბრუნის დროზე $T = t/\Omega_0$ და g_S - დეფორმაციის სიბლანტის პარამეტრის უგანზომილებო ანალოგი, კეპლერული ბრუნვის მახასიათებელი სიდიდეები q და Ω_0 წინასწარაა განსაზღვრული PLUTO-ს ტანში, ხოლო რიცხვითიმოდელის პარამეტრებია რიცხვითი დომენის რადიალური სიგრძე L_x და რადიალური მიმართულებით დისკრეტულ წერტილთა რაოდენობა N_x (დომენის სიგრძეების თანაფარდობა და დისკრეტული წერტილების რაოდენობათა თანაპარდობა ფიქსირებულია $L_x/N_x = L_y/N_y = L_z/N_z$). მათი მეშვეობით გამოისახება სხვა ფიზიკური და რიცხვითი სიდიდეები. კეპლერული ბრუნვით

სიჩქარის წანაცვლებისთვის ვიცით რომ:

$$U = AL_x = q\Omega_0 L_x . \quad (53)$$

რეინოლდსის რიცხვო, რომელიც განსაზღვრავს დინების ლამინარობას, მოიცემა როგორც:

$$Re = \frac{UL}{\nu} , \quad (54)$$

მისი მეშვეობით და სიჩქარით(გან.53) შეგვიძლია გამოვსახოთ სიბლანტე როგორც:

$$\nu = q\Omega_0 L_x^2 \frac{1}{Re} . \quad (55)$$

აქ ჩანს რომ სიბლანტე პირდაპირ კავშირშია რიცხვით დომენტან.

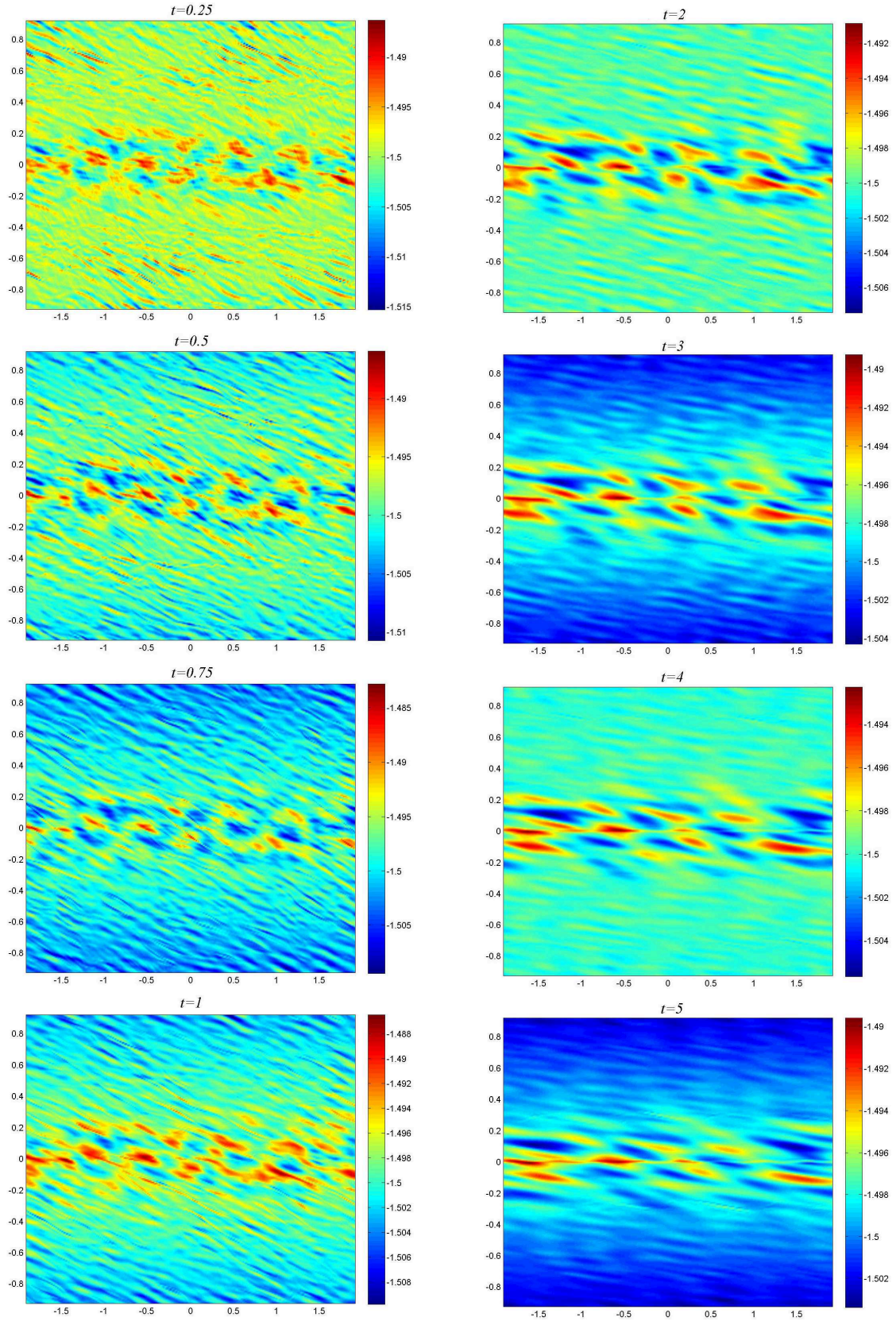
მახის რიცხვი ჩაიწერება როგორც:

$$\mathcal{M} = \frac{U}{C_s} , \quad (56)$$

რომლის მეშვეობითაც შეგვიძლია გამოვსახოთ სიბლანტეში ბგერის სიჩქარე, როგორც:

$$C_s = q\Omega_0 L_x \frac{1}{\mathcal{M}} . \quad (57)$$

$$g_S = \frac{\Omega_0}{\nu} G_S . \quad (58)$$



სურ 10: ნახაზი აჩვენებს ფიდეციური თვლის პირველ ბრუნზე (მარცხენა სვეტი) სიცქეარის როტორის ვერტიკალური კომპონენტი, როდსავ სისტემის არაწრფივ შეგუებას, ამ დროს ზედმეტი ენერგია გამოსხივდება აკუსტიკური ტალღების სახით. მარჯვენა სვეტში ნაჩვენებია მომდევნო ბრუნებისას აგებული იგივე სიდიდე, აქ აღინიშნება ციკლონურ-ანტიციკლონური სიმეტრია.

მოდელირებისთვის საინტერესო პროცესები მიმდინარეობს რეოლოგიური დისიპაციური ტალღის სიგრძესა დიდ ზომებზე რაც იმას ნიშნავს რომ ჩვენი სისტემისთვის მაქსიმალური ტალღური ვექტორი გაცილებით მცირე უნდა იყოს დისიპაციურ ტალღურ ვექტორზე $k_{max} \ll k_\nu$. ვინაიდან გამოთვლით დომენში არსებული მაქსიმალური სიდიდის ტალღური ვექტორი პირდაპირ კავშირშია დომენის რიცხვით პარამეტრებთან, შეგვიძლია ვიპოვოთ რეინოლდსის რიცხვის მინიმალური მნიშვნელობა:

$$k_{max} = \frac{2\pi}{L_x}(N_x - 1), \quad k_\nu^2 = \frac{\Omega_0}{\nu} \Rightarrow R_e > 4\pi^2 \approx 60 \quad (59)$$

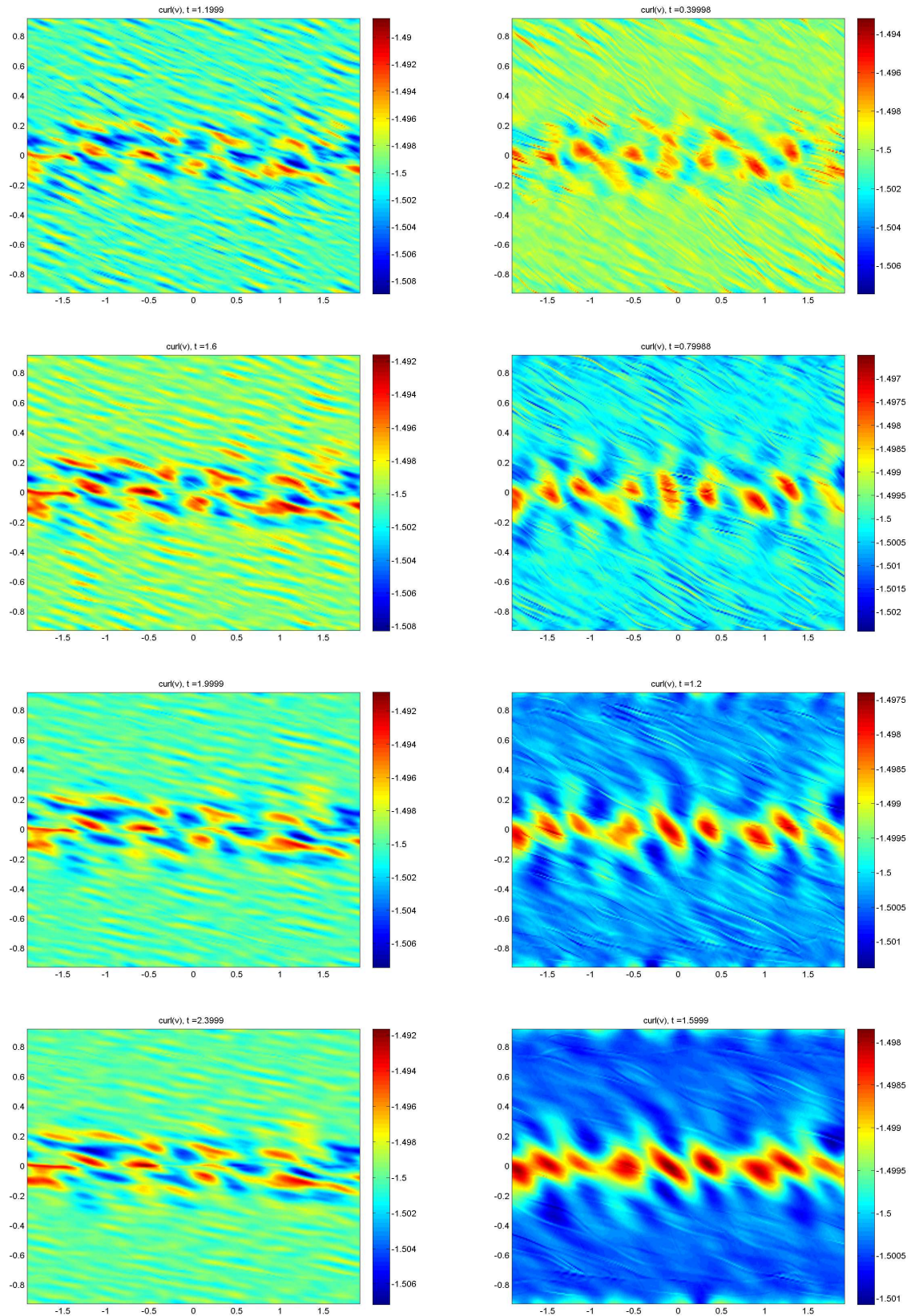
სახელი	L_x	N_x	R_e	$\mathcal{M}$	T
FE1	2	256	R_{max}	0.2	5
FE1_ R2_ a1	2	256	10^2	0.2	5
FE1_ R3_ b1	2	256	10^3	0.2	5

ცხრილი 1: ცხრილში მოყვანილია მოდელირების შედეგების დასახელებები და მათი შესაბამისი პარამეტრების მნიშვნელობები ყოველი თვლისთვის.

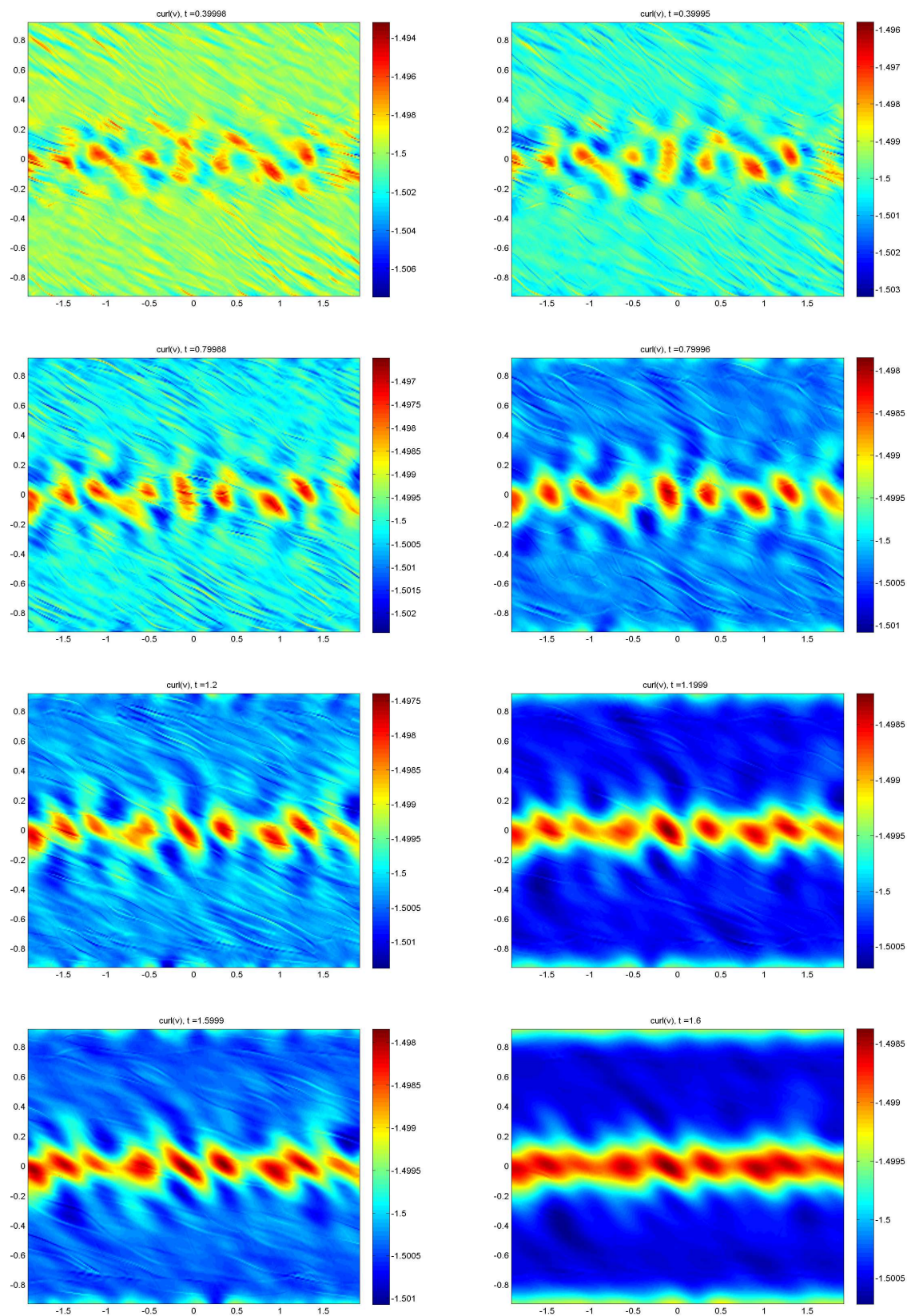
R_{max} აღნიშნავს მაქსიმალურ რეინოლდსის რიცხვი რომელიც არის რიცხვით დისიპაციასთან დაკავშირებული და დამოკიდებულია გამოთვლით დომენზე

სურათი (11)-ზე გამოსახულია ფიდუციური თვლის შედარება FE1_ R3_ b1 (იხ. ცხრილი 1) თვლასთან. კარგად ჩანს რომ მარჯვენა სვეტში აღინიშნება ციკლონურ-ანტიციკლონური ასიმეტრია რაც არის რეოლოგიური ეფექტების შედეგი, ნახაზებიდან ჩანს რომ დეფორმაციის რეოლოგიის ეფექტების გათვალისწინებისას მოდელირების შედეგები მკვეთრად განსხვავდება ფიდუციური თვლის შედეგებისგან. მკაფიოდ გამოიკვეთა ანტიციკლონური გრიგალი რომელიც ეწინააღმდეგება ადვექციას. ასევე სავარაუდოა რომ მოხდა შემპოთების არაწრფივი სატურაცია მაღალ ამპლიტუდებზე, რაც ხელს უშლის შემფოთების ამპლიტუდის მორიგ ზრდას.

ამავე თვლის შედარება განსხვავებული პარამეტრების თვლასთან მაგ. FE1_ R2_ a1 (იხ. ცხრილი 1) ამყარებს დაკვირვებას. სურათი (12)-ის მარცხენა სვეტში მოყვანილი სიჩქარის როტორის კომპონენტის გრაფიკებზე კიდევ უპრო მკაფიოდ ჩანს ჩამოყალიბებული ანტივიკლონური გრიგალები, წინაშემთხვევის მსგავსად აქაც აღინიშნება არაწრფივი გაჯერება.



სურ 11: სურათზე მოყვანილია ფილტვიური FE (იხ. ცხრილი 1) თვლის შედეგებით აგებული სიჩქარის როტორის ვერტიკალური კომპონენტი (მარცხენა სვეტი) და FE1_ R3_ b1 (იხ. ცხრილი 1) თვლის შედეგებით აგებული იგივე სიდიდე (მარჯვენა სვეტი), აქ იკვეთება ციკლონურ-ანტიციკლონური ასიმეტრია



სურ 12: სურათზე მოყვანილია FE1_ R3_ b1 (იხ. ცხრილი 1) თვლის შედეგებით აგებული სიჩქარის როტორის ვერტიკალური კომპონენტი (მარცხენა სვეტი) და FE1_ R2_ a1 (იხ. ცხრილი 1) თვლის შედეგებთ აგებული იგივე სიდიდე (მარჯვენა სვეტი). ორივე სვეტისთვის აქინიშნება ციკლონურ-ანტიციკლონური ასიმეტრია

5 დასკვნა

ნაშრომში შესწავლილია ცენტრალური გრავიტირებადი ობიექტის გარშემო მბრუნავი გრანულარული დისკი ჰიდროდინამიკურ მიახლოებაში. ნაშრომი შესრულებულია ორ ეტაპად: 1) გრანულარული დინების მდგრადობის წრფივი ანალიზი; 2) გრანულარული დინების არაწრფივი მოდელირება.

ანალიზური კვლევაში განხილულია სამგანზომილებიანი უკუმშვადი გრანულარული დინების წრფივი მდგრადობა წანაცვლების სიბრტყეში. ენალიზურად მიღებულია: 1) ეპიცკლური სიხშირის დისპერსია გამოწვეული რეოლოგიური მოდიფიკაციით. დეფორმაციის რეილოგიით გამოწვეული მოდიფიკაციას ასიმეტრიული ხასიათისაა და მისი დამოკიდებულება $k_x k_y$ სიდიდის ნიშანზე, ასევე რეოლოგიური პარამეტრის სიდიდეზე. ნაჩვენებია წნევითი რეოლოგიით გამოწვეული რეზონანსები სპირალური ტალღის დისპერსიაში. 2) ნაპოვნია ახალი ტიპის ბლანტი-ბრუნვითი არამდგრადობა, რომელიც გამოწვეულია დეფორმაციის რეოლოგიის ზეგავლენით კეპლერულად მბრუნავ დისკში. ანალიზურად შეფასებულია უკუმშვადი რეოლოგიური სითხის წრფივი მდგრადობის კრიტერიუმი. ბლანტი-ბრუნვითი არამდგრადობის განვითარება შესაძლებელია დინებებში, რომლის სიბლანტეს აქვს მკვეთრი დადებითი გრადიენტი ლოკალური დეფორმაციის ტენზორის მეორე ინვარიანტის მიმართ. გამოანგარიშებულია ზრდის ინკრიმენტის დამოკიდებულება ტალღურ ვექტორებზე და ენერგიის დროში ცვლილება სხვადასხვა აზიმუტალური ტალღური რიცხვისთვის. ბლანტი-ბრუნვითი არამდგრადობა ხელს უწყობს რადიალურად მცირე ზომის და ვერტიკალურად თითქმის ერთგვაროვანი რგოლების წარმოქმნას. ანალიზურად ნაჩვენებია დეფორმაციის რეოლოგიით გამოწვეული სიჩქარის როტორის ვერტიკალური კომპონენტის დროში ცვლილება, ღერძულად სიმეტრიული შემფოთებების დროს. არამდგრადობის მოქმედების მექანიზმის გასაგებად შესაძლებელია განვიხილოთ წნევისა და სიჩქარის ბალანსი ციკლონის ან ანტიციკლონის შემთხვევაში. ანტიციკლონში სიჩქარის ლოკალური შემფოთება იწვევს წნევის ლოკალურ ზრდას. იმ შემთხვევაში როდესაც ასეთი სიჩქარის ზრდა იწვევს სიბლანტის ზრდას, იზრდება აკრეციის ტემპიც. აკრეციის ტემპის ზრდა კი თავის მხრივ იწვევს წნევის ზრდას, რაც იწვევს არაწრფივ სწრაფ ზრდას.

რიცხვითი მოდელირებისთვის გამოყენებულია რიმან/გოდუნოვის რიცხვითი ამომხსნელი PLUTO. ამომხსნელისთვის შექმნილია რეოლოგიური სიბლანტის მოდელირების მოდული Rheo. შესრულებულია ფიდუციური თვლები, რომლებმაც აჩვენა მოდელილ მდგრადობა. რიცხვითი მოდელირებისას მიღებული შედეგები გვიჩვენებს დეფორმაციის რეოლოგიით გამოწვეულ ციკლონურ ანტიციკლონურ მკვეთრ ასიმეტრიას და ანტიციკლონური გრიგალების წარმოქმნის ტენდენციას. თვლებისას ნაჩვენებია ექსპონენციალურად ზრდადი ამპლიტუდის მქონე შემფოთებების არაწრფივი გაჯერება მაღალ ამპლიტუდებზე რომლის დროსაც ყალიბდება კვაზისტაციონარული თვითშეთანხმებული ანტიციკლონური გრიგალები. მიღებული შედეგები აჩვენებს რეოლოგიური სიბლანტის თვისებებს, მის დამოკიდებულებას რეინოლდსის რიცხვსა და მახის რიცხვზე.

ნაშრომში მოცემული კვლევა ნაწილობრივ დაფინანსებულია თსუ სტუდენტთა სამეცნიერო პროექტების საბჭოს გრანტით.

გამოყენებული ლიტერატურა

- [1] ლ. პონიატოვსკი, "პლანეტების წარმოშობა: ჩანასახების ფორმირება რეოლოგიურ დინებებში" თსუ (2015).
- [2] B. Andreotti, Y. Forterre, O. Pouliquen "*Granular Media*" (Cambridge University Press 2013).
- [3] G. R. Blumenthal, D. N. C. Lin and L. T. Yang, *ApJ* **287**, 774 (1984).
- [4] Borderies, N.; Goldreich, P.; Tremaine, S. *Icarus* **63**, 406 (1985).
- [5] F. Boyer, E. Guazzelli and O. Pouliquen, *Phys. Rev. Letters* **107**, 188301 (2011).
- [6] J. J. Brey, J. W. Dufty, C. S. Kim, and A. Santos *Phys. Rev. E* **58**, 4638 (1998).
- [7] Y. Forterre and O. Pouliquen, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **40**, 1 (2008).
- [8] I. Goldhirsch, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **35**, 267 (2003).
- [9] I. Goldhirsch, *Chaos* **9**, 659 (1999).
- [10] P. Goldreich and D. Lynden-Bell, *MNRAS* **130**, 125 (1964).
- [11] P. Jop, Y. Forterre and O. Pouliquen, *Nature* **441**, 727 (2006).
- [12] K. Kamrin and G. Koval, *Phys. Rev. Letters* **108**, 178301 (2012).
- [13] S. Kato, *MNRAS* **185**, 629 (1978).
- [14] E. Khain and B. Meerson *Phys. Rev. E* **67**, 021306 (2003).
- [15] H. Latter and G. Ogilvie, *Icarus* **210**, 318 (2010).
- [16] H. Latter and G. Ogilvie, *Icarus* **184**, 498 (2006).
- [17] A. P. Lightman and D. M. Eardley, *ApJL* **187**, L1 (1974).
- [18] D. N. C. Lin and P. Bodenheimer, *ApJ* **248**, 83 (1981).
- [19] P.-Y. Longaretti and N. Rappaport, *Icarus* **63**, 838 (1985).
- [20] J. Lukkari, *Nature* **292**, 433 (1981).
- [21] J. S. Olafsen and J. S. Urbach *Phys. Rev. Letters* **81**, 4369 (1998).
- [22] J. C. B. Papaloizou and D. N. C. Lin, *ApJ* **331**, 838 (1988).
- [23] G. Pontuale, A. Gnoli, F. V. Reyes, and A. Puglisi, *Phys. Rev. Letters* **117**, 098006 (2016).
- [24] L. G. Poniatowski, A. G. Tevzadze, *Phys. Rev. E* **96**, 010901 (2017).
- [25] J. Schmidt and H. Salo, *Phys. Rev. Letters* **90**, 061102 (2003).
- [26] J. Schmidt, H. Salo, F. Spahn and O. Petzschmann, *Icarus* **153**, 316 (2001).

- [27] U. Schmit and W. Tscharnuter, *Icarus* **138**, 173 (1999).
- [28] U. Schmit and W. M. Tscharnuter, *Icarus* **115**, 304 (1995).
- [29] D. Serero, I. Goldhirsch, S. H. Noskowitz and M.-L. Tan, *J. Fluid Mech.* **554**, 237 (2006).
- [30] N. I. Shakura and R. A. Sunyaev, *MNRAS* **175**, 613 (1976).
- [31] F. Spahn, J. Schmidt and O. Petzschmann, *Icarus* **145**, 657 (2000).
- [32] A. G. Tevzadze, G. D. Chagelishvili, G. Bodo and P. Rossi, *MNRAS* **401**, 901 (2010).
- [33] A. G. Tevzadze, G. D. Chagelishvili, J.-P. Zahn, R. G. Chanishvili and J. G. Lominadze, *Astron. Astrophys.* **407**, 779 (2003).
- [34] W. R. Ward, *Geophys. Res. Lett.* **8**, 641 (1981).