October 14, 2012

ელექტრომაგნეტიზმის თეორია

სალექციო მასალები

ა. თევზაძე

სასწავლო კურსის შინაარსი

1. ვექტორული ოპერატორები მართკუთხა და არამართკუთხა კოორდინატთა სისტემეში; ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები;

2. ელექტროსტატიკური ველი ვაკუუმში. გაუსის და სტოქსის თეორემები. მუშაობა ელექტრულ ველში. პუასონის და ლაპლასის განტოლებები.

3. ელექტროსტატიკური ველი დიელექტრიკებში; ელექტრული ინდუქციის და პოლარიზაციის ვექტორები; დიელექტრიკული ამთვისებლობა და შეღწევადობა; იზოტროპული და ანიზოტროპული დიელექტრიკები;

4. ელექტრული ველის ენერგია დიელექტრიკებში; დიელექტრიკის პოლარიზაციის ენერგია; არაერთგვაროვან დიელექტრიკზე მოქმედი ძალა;

5. ელექტრული ველი კრისტალებში; კრისტალების დიელექტრიკული შეღწევადობა; პიროელექტრობა; პიეზოელექტრობა;

6. ელექტრული ველი გამტარებში; დენის სიმკვრივე; წინაღობა და გამტარობა; ჯოულ–ლენცის კანონი; იზოტროპული და ანიზოტროპული გამტარები;

7. ელექტრული და მაგნიტური ველები გამტარებში; ჰოლის ეფექტი; პოტენციალების კონტაქტური სხვაობა; გალვანური ელემენტი;

8. არაერთგვაროვანი გამტარები; ელექტროკაპილარობა; თერმოელექტრული მოვლენები;

9. მუდმივი მაგნიტური ველი ნივთიერებაში; გარემოს დამაგნიტებულობა; მაგნიტური ამთვისებლობა და შეღწევადობა; მუდმივი დენების მაგნიტური ველები;

10. მაგნიტური ველის ენერგია გარემოში; მაგნეტიკების ენერგია; დენების სისტემის ენერგია;

11. ძალები მაგნიტურ ველში; გირომაგნიტური მოვლენები; ლარმორის რადიუსი;

12. დიამაგნეტიზმი და პარამაგნეტიზმი; ფერომაგნეტიზმი; ჰისტერეზისი და კიურის ტემპერატურა; მაგნიტოსტრიქცია; მაგნეტიკების დომენური სტრუქტურა;

13. კვაზისტაციონალური ელექტრომაგნიტური ველი; მაგნიტური ველის შეღწევის სიღრმე; სკინ ეფექტი;

14. ელექტრომაგნიტური ტალღები გარემოში; ელექტრომაგნიტური ტალღები უდისპერსიო გარემოში; ტალღის ენერგია; ბრტყელი მონოქრომატული ტალღა; ელექტრომაგნიტური ტალღის პოლარიზაცია; სტოქსის პარამეტრები;

15. ელექტრომაგნიტური ტალღები არაერთგვაროვან გარემოში; ცვლადი დიელექტრიკული შეღწევადობის გარემო; ცვლადი მაგნიტური შეღწევადობის გარემო; ელექტრომაგნიტური ტალღების არეკვლა და ჩახშობა;

Contents

1.1 ვექტორული ოპერატორები მართკუთხა კოორდინატთა სისტემებში 5
1.2 ვექტორული ოპერატორები არამართკუთხა კოორდინატთა სისტემებში . . 6
1.3 ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები 7
2.1 ელექტროსტატიკური ველი ვაკუუმში 9
2.2 გაუსის და სტოქსის თეორემები 9
2.3 მუშაობა ელექტრულ ველში 9
2.4 პუასონის და ლაპლასის განტოლებები 9
3.1 ელექტროსტატიკური ველი დიელექტრიკებში. ელექტრული ინდუქციის და პოლარიზაციის ვექტორები 11
3.2 დიელექტრიკული ამთვისებლობა და შეღწევადობა 11
3.3 იზოტროპული და ანიზოტროპული დიელექტრიკები 11
4.1 ელექტრული ველის ენერგია დიელექტრიკებში 13
4.2 დიელექტრიკის პოლარიზაციის ენერგია 13
4.3 არაერთგვაროვან დიელექტრიკზე მოქმედი ძალა 13
5.1 ელექტრული ველი კრისტალებში 15
5.2 კრისტალების დიელექტრიკული შეღწევადობა 15
5.3 პიროელექტრობა; პიეზოელექტრობა; 15
6.1 ელექტრული ველი გამტარებში 17
6.2 დენის სიმკვრივე; წინაღობა და გამტარობა; 17
6.3 ჯოულ–ლენცის კანონი 17
6.4 იზოტროპული და ანიზოტროპული გამტარები 17

ლექცია 1.

1.1 ვექტორული ოპერატორები მართკუთხა კოორდინატთა სისტემებში

ვექტორული ოპერატორი ნაბლა:

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) .$$

გრადიენტი: ნაბლა მოქმედებს სკალარზე ϕ და ვიღებთ ვექტორს grad(ϕ):

$$\text{grad}(\phi) \equiv (\nabla\phi) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) .$$

დივერგენცია: ნაბლას A ვექტორზე სკალარული ნამრავლი გვაძლევს სკალარს div($\mathbf{A}$):

$$\text{div}(\mathbf{A}) \equiv (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} .$$

როტორი: ნაბლას A ვექტორზე ვექტორული ნამრავლი გვაძლევს ვექტორს rot($\mathbf{A}$):

$$\text{rot}(\mathbf{A}) \equiv [\nabla \times \mathbf{A}] .$$

$$A_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} ,$$

$$A_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} ,$$

$$A_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} ,$$

ლაპლასიანი:

$$\Delta \equiv (\nabla \cdot \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

ზოგიერთი თვისება:

$$\text{div}(\text{grad}(\phi)) = \Delta(\phi) .$$

$$\text{div}(\text{rot}(\mathbf{A})) = 0 .$$

1.2 ვექტორული ოპერატორები არამართკუთხა კოორდინატთა სისტემებში

ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა (r, φ, z):

$$x = r\cos(\varphi)\ ,\quad y = r\sin(\varphi)\ ,\quad z = z\ .$$

ვექტორული ოპერაციები ცილინდრულ კოორდინათა სისტემაში:

$$\mathrm{grad}(\phi) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\,, \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\ .$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z)\ .$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\ ,$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\ ,$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\ .$$

ლაპლასიანი:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\ .$$

სფერულ კოორდინატთა სისტემა (r, φ, θ):

$$x = r\cos(\varphi)\sin(\theta)\ ,\quad y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)\ ,\quad z = r\cos(\theta)\ .$$

ვექტორული ოპერაციები სფერულ კოორდინათა სისტემაში:

$$\mathrm{grad}(\phi) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\,, \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,, \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\ .$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_\varphi\right) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)A_\theta\right)\ .$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_r = \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\ ,$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\ ,$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\ .$$

ლაპლასიანი:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\ .$$

1.3 ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

მეორე რანგის ტენზორი C_{ik}:

$$C_{ik} = \begin{pmatrix} C_{11}, C_{12}, C_{13} \\ C_{21}, C_{22}, C_{23} \\ C_{31}, C_{32}, C_{33} \end{pmatrix} .$$

სკალარი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნულოვანი რანგის ტენზორი, ხოლო ვექტორი $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ როგორც პირველი რანგის ტენზორი A_i $(i = 1, 2, 3)$.

ორი ტენზორის გამრავლებისას განმეორებადი ინდექსი (ე.წ. მუნჯი ინდექსი) იჯამება.

$$A_i B_i \equiv \sum_{i=1}^{3} A_i B_i \ .$$

ამიტომაც მომავალში ყველგან:

$$A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \ ,$$

სადაც, მაგალითად დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში $A_1 = A_x$, $A_2 = A_y$ და $A_3 = A_z$.

კრონეკერის სიმბოლო δ_{ik}:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & : \quad i = k \\ 0 & : \quad i \neq k \end{cases}$$

ზოგიერთი თვისება:

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \ .$$

$$\delta_{ik} A_k = A_i \ .$$

სიმეტრიული ტენზორი: $a_{ik} = a_{ki}$. ანტისიმეტრიული ტენზორი: $a_{ik} = -a_{ki}$.

აბსოლუტურად ანტისიმეტრიული ერთეულოვანი ტენზორი ϵ_{ijk} (ლევი–ჩივიტას სიმბოლო):

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & : \quad (i = j),\ (i = k),\ (j = k) \\ 1 & : \quad (i, j, k) = (1, 2, 3),\ (3, 1, 2),\ (2, 1, 1) \\ -1 & : \quad (i, j, k) = (1, 3, 2),\ (3, 2, 1),\ (2, 1, 3) \end{cases}$$

გამოთვლის წესი: $\epsilon_{123} = 1$, ხოლო ნებისმიერი ორი ინდექსის გადასმისას ტენზორი იცვლის ნიშანს. მაგალითად $\epsilon_{123} = -\epsilon_{213}$.

ϵ_{ijk} ტენზორის ზოგიერთი თვისება:

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{ikl} = 6 \ ,$$

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{klm} = 2\delta_{ik} \ ,$$

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km} \ ,$$

$$\delta_{ij}\epsilon_{ijk} = \delta_{jk}\epsilon_{ijk} = \delta_{ik}\epsilon_{ijk} = 0 \ .$$

ოპერაციები ვექტორებზე:

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha A_i \ ,$$
$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = A_i B_i \ ,$$
$$[\mathbf{A}\times\mathbf{B}] = \epsilon_{ijk} A_j B_k \ .$$

ვექტორული ოპერატორების ტენზორული ფორმა:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \ ,$$

$$\text{grad}(\phi) = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \ ,$$
$$\text{div}(\mathbf{A}) = (\nabla\cdot\mathbf{A}) = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \ ,$$
$$\text{rot}(\mathbf{A}) = \nabla\times\mathbf{A} = \epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} \ ,$$
$$\Delta\phi = \nabla\cdot\nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_i} \ .$$

$\boxed{\text{მაგალითი 1.1.}}$ გამოითვალეთ $\text{div}\,(\alpha\mathbf{A})$.

$$\text{div}\,(\alpha\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha A_i) = \alpha\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + A_i\frac{\partial\alpha}{\partial x_i} = \alpha\text{div}\,(\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot\text{grad}\,(\alpha) \ .$$

$\boxed{\text{მაგალითი 1.2.}}$ გამოითვალეთ $\text{div}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$.

$$\text{div}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\epsilon_{ijk}A_jB_k = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_jB_k) = \epsilon_{ijk}\left(A_j\frac{\partial}{\partial x_i}B_k + B_k\frac{\partial}{\partial x_i}A_j\right) =$$

$$= A_j\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}B_k + B_k\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}A_j = -A_j\epsilon_{jik}\frac{\partial}{\partial x_i}B_k + B_k\epsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x_i}A_j = -A_j\text{rot}(\mathbf{B})_j + B_k\text{rot}(\mathbf{A})_k =$$
$$= \mathbf{B}\cdot\text{rot}(\mathbf{A}) - \mathbf{A}\text{rot}(\mathbf{B}) \ .$$

ლექცია 2.

2.1 ელექტროსტატიკური ველი ვაკუუმში

2.2 გაუსის და სტოქსის თეორემები

2.3 მუშაობა ელექტრულ ველში

2.4 პუასონის და ლაპლასის განტოლებები

ლექცია 3.

3.1 ელექტროსტატიკური ველი დიელექტრიკებში. ელექტრული ინდუქციის და პოლარიზაციის ვექტორები

3.2 დიელექტრიკული ამთვისებლობა და შეღწევადობა

3.3 იზოტროპული და ანიზოტროპული დიელექტრიკები

ლექცია 4.

4.1 ელექტრული ველის ენერგია დიელექტრიკებში

4.2 დიელექტრიკის პოლარიზაციის ენერგია

4.3 არაერთგვაროვან დიელექტრიკზე მოქმედი ძალა

ლექცია 5.

5.1 ელექტრული ველი კრისტალებში;

5.2 კრისტალების დიელექტრიკული შეღწევადობა

5.3 პიროელექტრობა; პიეზოელექტრობა;

ლექცია 6.

6.1 ელექტრული ველი გამტარებში

6.2 დენის სიმკვრივე; წინაღობა და გამტარობა;

6.3 ჯოულ–ლენცის კანონი

6.4 იზოტროპული და ანიზოტროპული გამტარები