ГЛАВА VII

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЕ И ЕГО РАСПРОСТРАНЕНИЕ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 91. Система максвелловых уравнений макроскопического электромагнитного поля

1. В предшествующих главах изложение носило индуктивный характер: мы шаг за шагом обобщали эмпирически найденные закономерности и формулировали их в виде отдельных законов. Теперь же задача нахождения основных законов электромагнитного поля (по крайней мере в том смысле, как эти законы понимаются в классической теории макроскопического поля) может считаться разрешенной, и полученные результаты могут быть сведены в *полную* систему уравнений электромагнитного поля. Если система этих уравнений верна и действительно является *полной*, то из нее должны *однозначно* вытекать *все* свойства поля — как уже изученные, так и не изученные нами.

Таким образом, система основных уравнений представляет собой, в сущности, математическую формулировку основных постулатов или «аксиом» классической электродинамики, играющих в ней ту же роль, какую в классической механике играют аксиомы Ньютона. Дальнейшая задача теории заключается в раскрытии содержания этих уравнений, в применении их к отдельным вопросам и в сравнении вытекающих из них следствий с данными опыта.

В настоящей главе мы ограничимся установлением системы основных уравнений *макроскопического* электромагнитного поля при следующих упрощающих допущениях: 1) все находящиеся в поле материальные тела *неподвижны*; 2) в каждой точке поля значения величин ε, μ и λ, характеризующих свойства среды, остаются *постоянными*, т. е. не меняются со временем, не зависят от напряженности поля и считаются величинами заданными; 3) постоянные магниты и ферромагнетики в поле отсутствуют. Лишь в § 108 мы рассмотрим некоторые вопросы, относящиеся к теории ферромагнетиков.

Заметим, что второе ограничение обозначает, в частности, что мы либо пренебрегаем зависимостью ε и μ от температуры, либо ограничиваемся рассмотрением изотермических процессов. Мы будем считать в дальнейшем ε и μ не зависящими от температуры, что позволит нам пренебречь также выделением и поглощением тепла при поляризации и намагничении среды. Вместе с тем в этом приближении устраняется различие между свободной и «внутренней» энергией электромагнитного поля (§ 31 и 82). Как уже отмечалось, эффекты, связанные с выделением тепла в диэлектриках и магнетиках, в большинстве случаев играют совершенно второстепенную роль, так что их действительно можно не учитывать.

2. Система дифференциальных уравнений классической электродинамики, к изложению которой мы переходим, носит название *уравнений Максвелла*. Максвелл впервые сформулировал эти уравнения в шестидесятых годах прошлого столетия (в частности, он впервые ввел понятие тока смещения) и раскрыл их физический смысл. Впрочем, окончательная общепринятая ныне формулировка уравнений электродинамики принадлежит Герцу.

К основным уравнениям Максвелла принадлежит, прежде всего, уравнение (88.5), определяющее зависимость вихря магнитного поля от плотности токов проводимости и токов смещения:

$$\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{H}, \tag{I}$$

и уравнение (85.3), выражающее закон индукции электрического поля при изменении поля магнитного:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{II}$$

Из этих уравнений *вытекают* при некоторых добавочных предположениях два других уравнения, обыкновенно причисляемых к основным уравнениям поля. Так, в § 85 уже было показано, что из уравнения (II) следует независимость дивергенции вектора $\mathbf{B}$ от времени [уравнение (85.4)]. В остальном же вид функции $\operatorname{div}\mathbf{B} = f(x, y, z)$ при решении системы уравнений (I) и (II) остается неопределенным, так что функция эта играет роль *начальных* условий интегрирования. Полагая, что эта функция равна нулю во всех точках пространства, получим третье основное уравнение Максвелла

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{III}$$

совпадающее с уравнением (62.8).

Образовав дивергенцию от обеих частей уравнения (I) и приняв во внимание равенство нулю дивергенции вихря [уравнение (42_2^*)], получим (изменив порядок дифференцирования по пространственным координатам и по времени)

$$4\pi \operatorname{div}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{D} = 0.$$

Если обозначить $\operatorname{div}\mathbf{D}$ через $4\pi\rho$:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{IV}$$

то предшествующее уравнение примет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{IVa}$$

что совпадает по форме с уравнением непрерывности (87.1), выражающим собой закон сохранения количества электричества. Таким образом, *определяемую* уравнением (IV) величину ρ можно толковать как плотность электрических зарядов.

В фарадей-максвелловой теории величина ρ действительно носила характер вспомогательного *обозначения*, а понятие заряда — характер вспомогательного термина, ибо, с точки зрения фарадей-максвелловой концепции поля, электрические заряды представляют собой не особого рода субстанцию, а лишь «узлы» силовых линий поля, характеризующих деформацию упругого эфира, так что термин «электрический заряд» представляет собой лишь условное название истоков вектора $\mathbf{D}$, т. е. тех участков поля, в которых $\operatorname{div}\mathbf{D} \neq 0$. Рассмотрение этой вспомогательной величины оправдывается тем, что величина заряда, находящегося внутри проведенной в непроводящей среде замкнутой поверхности, не изменяется во времени, т. е. является первым интегралом уравнений поля.

К основным максвелловым уравнениям необходимо причислить также и соотношения, связывающие между собой значения основных векторов электромагнитного поля:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}). \tag{V}$$

Характеризующие свойства среды величины ε, μ и λ считаются при этом заданными функциями точки, от времени не зависящими, сторонние же электродвижущие силы $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ считаются заданными функциями точки и времени. Существование этих сил сказывается непосредственно лишь на плотности тока проводимости, а косвенно также и на распределении электрических зарядов. В частности, для установления электростатического равновесия ($\mathbf{j} = 0$) необходимо, чтобы в каждой точке проводников $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ уравновешивалось напряженностью $\mathbf{E}$ электростатического поля зарядов [см. уравнение (38.9)].

Заметим, что некоторые авторы принимают не только $\mathbf{j}$, но и $\mathbf{D}$ пропорциональным не $\mathbf{E}$, а $\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}$, т. е. вместо (V) полагают $\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}})$. Вопрос о правильности того или иного предположения может быть разрешен в каждом отдельном случае путем выяснения физической природы сторонних электродвижущих сил. В некоторых случаях $\mathbf{D}$, несомненно, от $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ не зависит (например, в растворах электролитов $\mathbf{D}$ не зависит от сторонних электродвижущих сил осмотического происхождения, см. *Abraham* //

Theorie d. Elektr. III Aufl. 1907. B. I. S. 257). Впрочем, практическое значение вопроса о зависимости или независимости вектора $\mathbf{D}$ от $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ весьма невелико.

3. Система уравнений электромагнитного поля (I)–(V) приобретет определенное физическое содержание лишь в том случае, если будет точно указано, в каких явлениях, доступных наблюдению и изучению на опыте, и каким именно образом проявляется существование электромагнитного поля, ибо человек лишен способности непосредственно воспринимать это поле (за исключением особых случаев, например поля световой волны). Мы можем узнать о том, что по данному проводнику протекает электрический ток лишь по тепловым (нагревание проводника), механическим (отклонение стрелки гальванометра) и тому подобным действиям этого тока; мы можем узнать, что данное тело заряжено лишь потому, что оно притягивает бузиновый шарик или порождает искру при приближении его к другому телу и т. п. Другими словами, мы можем заключить о существовании электромагнитного поля лишь по наблюдаемому нами при известных условиях возникновению или исчезновению доступных нашему восприятию форм энергии (например тепловой или механической). Руководствуясь принципом сохранения энергии, мы заключаем, что это возникновение или исчезновение известных нам форм энергии должно происходить за счет преобразования некоторой иной формы энергии, которую мы называем энергией электромагнитного поля W.

Таким образом, лишь в том случае, если мы постулируем определенную зависимость этой энергии W от напряженности поля — в теории Максвелла W полагается равным [ср. уравнение (30.4) и (81.3)]

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{DE}\,dV = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{BH}\,dV, \tag{VI}$$

— лишь в этом случае *совокупность* уравнений (I)–(V) и (VI) (но не каждое из них порознь) станет доступной проверке на опыте, т. е. приобретает определенный физический смысл. Ибо уравнения (I)–(V) определяют изменения электромагнитного поля во времени, а уравнение (VI) позволяет определить те преобразования энергии, в которых эти изменения поля проявляются (см., например, § 92).

4. Обратимся теперь к вопросу о поверхностях разрыва сплошности векторов электромагнитного поля. В основе теории поля лежит допущение, что вне поверхности раздела различных сред и вне поверхностных электрических зарядов все электромагнитные векторы, а также и постоянные среды ε, μ и λ всюду конечны, непрерывны и обладают производными. Однако, например, поверхности раздела различных сред должны, вообще говоря,

являться *поверхностями разрыва* электромагнитных векторов, ибо векторы эти связаны между собой соотношениями (V), в которые входят величины ε, μ и λ, скачкообразно меняющиеся на поверхностях раздела. Чтобы система уравнений поля была *полной*, т. е. чтобы она давала возможность однозначно определить напряженность поля по начальным условиям, заданным для момента $t = 0$, необходимо дополнить эту систему *пограничными условиями*, которым должны удовлетворять слагающие электромагнитных векторов на поверхностях разрыва.

Для установления этих условий предположим сначала, что смежные среды с различными значениями величин ε, μ и λ разделяются переходным слоем конечной толщины, в котором значения этих величин изменяются *непрерывно*, и что объемная плотность электричества ρ и объемная плотность токов $\mathbf{j}$ всюду остаются конечными. Будем затем стремить к нулю толщину d этих переходных слоев, а также и слоев, заряженных и обтекаемых токами, и потребуем, как это мы уже неоднократно делали в предыдущем, чтобы уравнения поля (I)–(VI) оставались справедливыми в этих слоях и в предельном случае при $d = 0$. Этим требованием искомые пограничные условия определяются однозначно.

Действительно, на основании этого требования из уравнений (III) и (IV) получим, согласно уравнению (6.8), два граничных условия:

$$\operatorname{Div}\mathbf{B} = B_{2n} - B_{1n} = 0, \tag{III$'$}$$

$$\operatorname{Div}\mathbf{D} = D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \tag{IV$'$}$$

совпадающих с уравнениями (62.12) и (22.7). Из уравнения непрерывности (IVa), являющегося следствием уравнений (I) и (IV), получим аналогичным путем:

$$\operatorname{Div}\mathbf{j} = j_{2n} - j_{1n} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}, \tag{IV$'$a}$$

что совпадает с уравнением (87.2).

Далее, из уравнений (I) и (II) на основании уравнений (49.6) и (49.7) получим еще два граничных условия:

$$\operatorname{Rot}\mathbf{H} = [\mathbf{n}(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{I$'$}$$

$$\operatorname{Rot}\mathbf{E} = [\mathbf{n}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = 0, \tag{II$'$}$$

совпадающих с уравнениями (49.8) и (49.9)[1]. Последнее

[1]) В левую часть формулы (I) наряду с объемной плотностью токов проводимости входит также и объемная плотность токов смещения. Однако поверхностная плотность токов смещения всегда равна нулю (если только производная по времени вектора электрической индукции и $\mathbf{D}$ имеет конечное значение) и поэтому в уравнение (I$'$) не входит.

уравнение эквивалентно уравнению

$$E_{2t} = E_{1t}, \tag{II''}$$

где под t можно понимать любое направление, касательное к поверхности разрыва [ср. уравнения (49.4) и (49.5)] Уравнение же (I′) может быть записано аналогичным образом лишь при отсутствии поверхностных электрических токов:

$$H_{2t} = H_{1t} \qquad (i = 0). \tag{I''}$$

5. Помимо приведенных условий на поверхностях разрыва, необходимо также принять во внимание граничные условия в собственном смысле этого слова, ибо решение дифференциальных уравнений типа (I) и (II) однозначно определяется по начальным условиям для $t = 0$ лишь при условии задания (в функции от времени) значений некоторых из искомых функций точки (в нашем случае некоторых слагающих векторов поля) на границах рассматриваемой области пространства (§ 93) В каждом отдельном случае форма этих граничных условий всецело зависит от конкретных условий задачи. В частности, если в область рассмотрения включается все бесконечное пространство, то граничные условия приобретают характер условий в бесконечности.

В § 93 мы убедимся, что система максвелловых уравнений (I)–(V) совместно с перечисленными условиями на поверхностях разрыва и с надлежащими условиями в бесконечности есть система *полная*, т. е. что она позволяет *однозначно* определить электромагнитное поле в любой точке пространства и в любой момент времени по заданным для момента $t = 0$ начальным значениям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

6 Покажем в заключение, на основании каких наиболее общих допущений уравнения Максвелла могут быть получены из *микроскопических* уравнений электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H}_{\text{м}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}_{\text{м}}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{м}}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E}_{\text{м}} = 4\pi\rho_{\text{м}}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E}_{\text{м}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}_{\text{м}}}{\partial t} &= 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H}_{\text{м}} = 0, \end{aligned} \tag{91 1}$$

где индекс м означает микроскопическое значение соответствующей величины

Усредняя (91 1) по физически бесконечно малым объемам, как мы это делали, например, в § 26 и 62, используя соотношения типа (25 2) и вводя обозначения [ср уравнение (62 6)]

$$\overline{\mathbf{E}}_{\text{м}} - \mathbf{E}, \qquad \overline{\mathbf{H}}_{\text{м}} = \mathbf{B}, \tag{91 2}$$

получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}_{\text{м}}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho_{\text{м}}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \end{aligned} \tag{91 3}$$

Третье из этих уравнений совпадает с (II) Чтобы получить второе из двух основных уравнений Максвелла — уравнение (I), — необходимо допустить, что в *однородной и изотропной* среде средняя плотность микроскопических токов $\bar{\mathbf{j}}_{\text{м}}$ является *линейной* функцией векторов поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и их *первых* пространственных и временных производных Самое общее выражение для $\bar{\mathbf{j}}_{\text{м}}$, совместимое с этим допущением, может быть записано в виде

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{м}} = \lambda\mathbf{E} + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{c(\mu - 1)}{4\pi\mu}\operatorname{rot}\mathbf{B}, \tag{91 4}$$

где λ, ε и μ суть произвольные скаляры Действительно, в выражение для $\bar{\mathbf{j}}_{\text{м}}$ не могут входить $\mathbf{B}$, $\partial\mathbf{B}/\partial t$ и $\operatorname{rot}\mathbf{E}$, ибо эти величины являются *аксиальными* векторами, тогда как $\bar{\mathbf{j}}_{\text{м}}$ (также, как $\mathbf{E}$, $\partial\mathbf{E}/\partial t$ и $\operatorname{rot}\mathbf{B}$) суть векторы *полярные* (см приложение «Векторный анализ», с 575, примечание) Перечисленными векторами исчерпываются все линейные вектор-функции векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и их первых производных, свойства же однородной и изотропной среды могут характеризоваться только скалярами[1])

Внеся (91 4) в первое из уравнений (91 3), приняв во внимание предполагаемую независимость характеристик среды ε и μ от координат и времени и произведя перегруппировку членов, получаем

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{B}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\lambda\mathbf{E}$$

Вводя, наконец, соответственно (V) *обозначения*

$$\frac{1}{\mu}\mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad \varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{D}, \quad \lambda\mathbf{E} = \mathbf{j},$$

получаем уравнение Максвелла (I)

Что же касается уравнения (IV), то, как указывалось, его можно считать *определением* величины ρ

Таким образом, указанные допущения действительно достаточны (и необходимы) для получения из микроскопических уравнений (91 1) системы дифференциальных уравнений Максвелла и соотношений (V) Если же отказаться от *линейных* соотношений (V) между $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{j}$, то дифференциальные уравнения Максвелла могут быть получены из гораздо более общих допущений (ср § 110)

§ 92. Теорема Пойнтинга. Поток энергии

1. Выразив энергию электромагнитного поля в форме объемного интеграла (VI), мы тем самым, как уже неоднократно упоминалось, получаем возможность *истолковать* это выражение в том смысле, что энергия поля вполне определенным образом *локализована* в пространстве, причем объемная плотность энергии в произвольном месте поля определяется выражением

$$w = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{DE} + \mathbf{BH}) = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2 + \mu H^2). \tag{VIa}$$

В § 109 мы покажем, что такое истолкование является не только возможным, но и необходимым; пока же мы примем это

[1]) Сделанное нами предположение об однородности и изотропии среды исключает наличие сторонних электродвижущих сил $\mathbf{E}^{\text{стр}}$, ибо характеризующий среду вектор $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ выделяет определенное направление в пространстве

утверждение на веру и рассмотрим изменение во времени количества энергии W, находящегося внутри объема V, ограниченного некоторой неподвижной поверхностью S:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{8\pi}\int\limits_V (\mathbf{DE} + \mathbf{BH})\,dV\right\} = \int\limits_V \frac{\partial w}{\partial t}\,dV.$$

Ввиду предполагаемой независимости ε и μ от времени

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon\mathbf{E}\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\mathbf{H}\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\,\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right).$$

Внося сюда значения $\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ из (I) и (II), получаем с помощью уравнения (44*):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{jE} + \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}) = -\mathbf{jE} - \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{div}\,[\mathbf{EH}].$$

Внося это в выражение для $\partial W/\partial t$ и воспользовавшись теоремой Гаусса (17*), получаем окончательно [1]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int\limits_V \mathbf{jE}\,dV - \frac{c}{4\pi}\oint\limits_S [\mathbf{EH}]_n\,dS. \qquad (92.1)$$

В том случае, если поверхность S заключает в себе *полное поле*, поверхностный интеграл обращается в нуль, и (92.1) принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int \mathbf{jE}\,dV. \qquad (92.2)$$

Это уравнение означает, что при предполагаемой неподвижности всех находящихся в поле материальных тел энергия поля W расходуется только на работу, совершаемую электрическим полем $\mathbf{E}$ над токами проводимости $\mathbf{j}$ и определяемую правой частью уравнения (92.2). Исключив из этого выражения вектор $\mathbf{E}$, с помощью уравнения (V) получаем

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int \mathbf{jE}^{\text{стр}}\,dV - \int \frac{j^2}{\lambda}\,dV = P - Q, \qquad (92.3)$$

[1]) Если внутри объема V имеются поверхности разрыва S' векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, то последний интеграл в (92.1) должен быть распространен не только на внешнюю поверхность S объема V, но и на эти поверхности разрыва. Воспользовавшись граничными условиями (I′) и (II′), нетрудно показать, что путем простых преобразований соответствующие дополнительные члены в уравнениях (92.1) и (92.2) могут быть представлены в виде интеграла

$$-\int\limits_{S'} \mathbf{iE}\,d\mathbf{S}.$$

Таким образом, эти дополнительные члены равны взятой с обратным знаком работе, совершаемой электрическим полем $\mathbf{E}$ над *поверхностными* токами проводимости $\mathbf{i}$.

где

$$P = \int \mathbf{j}\mathbf{E}^{\text{стр}}\, dV \quad \text{и} \quad Q = \int \frac{j^2}{\lambda}\, dV. \tag{92.4}$$

Величина P равна, очевидно, работе, совершаемой сторонними электродвижущими силами в единицу времени, над токами проводимости $\mathbf{j}$ [ср. P со вторым членом формулы (39.1), выражающим работу сторонних ЭДС в линейном проводнике], тогда как Q совпадает с выражением для джоулева тепла, выделяемого токами проводимости в единицу времени [ибо, согласно (39.5), джоулево тепло, выделяемое в единице объема проводника в единицу времени, равно $q = j^2/\lambda$].

Таким образом, уравнение (92.3) выражает собой *закон сохранения энергии*: общее приращение электромагнитной энергии (при предполагаемой неподвижности материальных тел) равно избытку работы сторонних электродвижущих сил (химического, термического и тому подобного происхождения) над выделением джоулева тепла [согласно исходному предположению (с. 428), все тела неподвижны, так что механическая работа равна нулю]. Вместе с тем мы убеждаемся, что в отличие от токов проводимости *токи смещения никакого тепла не выделяют* и сторонние электродвижущие силы при их прохождении работы не совершают, ибо в выражения для Q и P входит только плотность токов проводимости, но не токов смещения[1]. Вычислив с помощью максвелловых уравнений для какого-либо процесса изменение электромагнитной энергии W и работу P сторонних электродвижущих сил, мы на основании формулы (92.3) можем определить выделяемое при этом процессе джоулево тепло Q. Эта величина Q доступна непосредственному измерению, что дает возможность проверить правильность теории.

2. Рассмотрим теперь тот случай, когда поверхностный интеграл в формуле (92.1) не исчезает, т. е. когда поверхность S не обнимает собой полного поля.

Введем обозначение

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}] \tag{92.5}$$

и воспользуемся обозначениями (92.4). Тогда уравнение (92.1) примет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = P - Q - \oint_S S_n\, dS, \tag{92.6}$$

причем в данном случае величины W, P и Q будут, очевидно, относиться не к полному полю, как раньше, а лишь к той его

[1]) Возможность выделения тепла при поляризации и намагничении среды (в случае зависимости ε и μ от температуры) нами в этой главе не учитывается

области V, которая ограничена поверхностью S. В этом случае, как явствует из уравнения (92.6), изменение электромагнитной энергии в объеме V зависит не только от выделяемой в этом объеме теплоты Q и от работы P сторонних электродвижущих сил в этом объеме, но и от расположения граничной поверхности S и от значения вектора $\mathbf{S}$ на ней.

Исходя из представления о локализации электромагнитной энергии в пространстве, мы должны на основании этого обстоятельства заключить, что *электромагнитная энергия вытекает через поверхность* S из рассматриваемого объема V наружу и притом *в количестве* $\oint S_n \, dS$ *единиц энергии* (эргов) *в секунду*. Это положение носит название *теоремы Пойнтинга*, а вектор $\mathbf{S}$ называется *вектором Пойнтинга*.

Детализируя далее это положение, относящееся к *замкнутым* поверхностям, *можно* истолковать его в том смысле, что *в каждой точке поля поток электромагнитной энергии* (т. е. количество энергии, протекающее в единицу времени через перпендикулярную к направлению потока единицу поверхности) *равен* по величине и направлению *вектору Пойнтинга* $\mathbf{S}$. Это последнее предположение вовсе не обязательно, ибо, как показывает внимательный анализ возможных физических экспериментов, непосредственная проверка на опыте возможна лишь в отношении теоремы Пойнтинга в ее *интегральной* форме, применимой к *замкнутым* поверхностям [1].

Однако мы все же будем отождествлять вектор Пойнтинга с потоком энергии в данной точке поля, во-первых, потому, что эта интерпретация вектора Пойнтинга приводит к ряду весьма простых и наглядных соотношений [2], и, во-вторых, потому, что она непосредственно вытекает из релятивистской теории электромагнитного поля.

Отметим, что формулировка закона сохранения энергии с помощью понятия потока энергии [уравнение типа (92.6)] была впервые дана в общей форме Н.А. Умовым еще в 1874 г.

3. В поле постоянных токов напряженность электромагнитного поля, а стало быть, и его энергия остаются постоянными, так что работа сторонних электродвижущих сил полностью переходит в тепло [уравнение (39.7)].

---

[1]) Если положить поток энергии равным $\mathbf{S} + \operatorname{rot} \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ есть произвольный вектор, то при интегрировании по любой замкнутой поверхности интеграл второго члена обратится в нуль [уравнение (28*)], так что общий поток энергии через эту поверхность останется равным $\oint\limits_S \mathbf{S}_n \, dS$

[2]) Например, к равенству скорости течения энергии и скорости распространения носителей этой энергии — электромагнитных волн (см. § 100, а также § 103 и 104)

Однако работа эта совершается лишь в тех участках цепи, где $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ отлично от нуля, тогда как джоулево тепло выделяется во всех участках цепи. Нетрудно убедиться, что энергия, затрачиваемая источниками сторонних электродвижущих сил, совершает при этом свой путь до места потребления (т. е. выделения в форме тепла) в качестве энергии электромагнитной.

Рассмотрим с этой целью участок цилиндрического однородного провода длины l, ограниченный двумя сечениями, перпендикулярными к его оси (рис. 79). Пусть r есть радиус провода, $\sigma = \pi r^2$ — его сечение, $V = l\sigma$ — объем рассматриваемого участка, наконец J — сила тока в проводе. Предположим, что магнитное поле вблизи провода с достаточной точностью совпадает с полем бесконечного прямолинейного тока той же силы. Тогда на поверхности провода (см. с. 220, задача 30)

$$H = \frac{2J}{cr} = \frac{2j\sigma}{cr} = \frac{2\pi r j}{c},$$

причем магнитные силовые линии представляют собой концентрические току окружности.

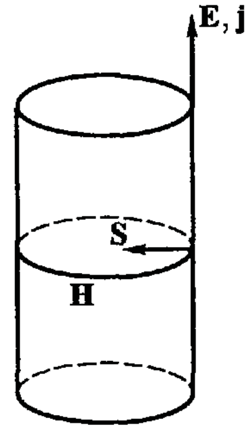

Рис. 79

Предположим сначала, что в рассматриваемом участке провода $\mathbf{E}^{\text{стр}} = 0$. Электрический вектор $\mathbf{E}$ направлен в этом случае по направлению тока и равен $\mathbf{j}/\lambda$ [уравнение (V)]. Следовательно, на поверхности провода, ввиду перпендикулярности векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{H}$,

$$|\mathbf{S}| = \left|\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]\right| = \frac{c}{4\pi\lambda}|[\mathbf{jH}]| = \frac{c}{4\pi\lambda} jH = \frac{j^2 r}{2\lambda},$$

причем, согласно правилу буравчика, $\mathbf{S}$ направлено по внутренней нормали к поверхности провода (см. рис. 79). Стало быть, в этом случае через внешнюю поверхность проводника энергия *втекает* в проводник из окружающего пространства в количестве

$$\oint S_n\, dS = |\mathbf{S}| \cdot 2\pi r l = \frac{j^2}{\lambda}\pi r^2 l = \frac{j^2}{\lambda} V \text{ эрг/с},$$

где V есть объем рассматриваемого участка проводника (через основания цилиндра энергия не протекает, ибо $\mathbf{S}$ касательно к этим основаниям). Это количество энергии, как и следовало ожидать, равно джоулеву теплу Q, выделяемому в этом участке за 1 с [уравнение (39.5)].

Итак, в тех участках проводника, в которых $\mathbf{E}^{\text{стр}} = 0$, выделяемая током тепловая энергия притекает в проводник из окружающего его пространства. В это пространство она должна, очевидно, поступать из тех участков провода, в которых совершается работа сторонних электродвижущих сил. Действительно, если

$\mathbf{E}^{\text{стр}} \neq 0$, согласно уравнению (V)

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\lambda} - \mathbf{E}^{\text{стр}}$$

и

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] = \frac{c}{4\pi\lambda}[\mathbf{jH}] - \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}^{\text{стр}}\mathbf{H}].$$

Первый член правой части представляет собой, по доказанному, поток энергии, направленный внутрь провода; второй член снабжен отрицательным знаком и имеет поэтому обратное направление (ибо $\mathbf{E}^{\text{стр}}$, вообще говоря, параллельно $\mathbf{j}$) [1], т. е. представляет собой поток энергии, *вытекающей* из провода через его боковую поверхность. Легко убедиться, что в случае постоянного тока вся эта вытекающая из проводника энергия возвращается в другие участки проводника с тем, чтобы выделиться в них в форме тепла.

4. В случае квазистационарных переменных токов имеют место аналогичные соотношения. Так, например, при выключении источника электродвижущей силы (аккумулятора) из цепи тока в ней продолжает некоторое время циркулировать ток размыкания. Как мы убедились в § 80 (пример 1), выделение джоулева тепла этим током происходит за счет постепенного уменьшения энергии магнитного поля тока, притекающей в проводник из окружающего пространства; при этом уменьшается также и количество магнитной энергии, заключенной внутри проводника.

В § 79 и 80 мы не учитывали изменения энергии окружающего ток *электрического поля*. В случае квазистационарных токов в замкнутых проводниках энергия эта, вообще говоря, настолько мала по сравнению с магнитной энергией тока, что ею действительно можно пренебречь. Если же в цепь квазистационарного тока включен, например, конденсатор, то запасенная в его поле электрическая энергия оказывается сравнимой с магнитной энергией тока и пренебречь ею становится невозможным (§ 89).

Вообще говоря, можно сказать, что в проводнике, по которому циркулирует ток, происходит, в сущности, превращение электромагнитной энергии в тепло; локализована же эта энергия преимущественно во внешнем окружающем проводник пространстве и поступает в проводник через его внешнюю поверхность. С особенной отчетливостью проявляется это в быстропеременных токах. При очень быстрых изменениях поля его энергия не успевает достигнуть внутренних слоев проводника и подвергается превращению в джоулево тепло лишь в поверхностных слоях

[1] За исключением тех участков проводника, в которых сторонние электродвижущие силы совершают отрицательную работу за счет положительной работы, совершаемой этими силами в других участках проводника. Во всяком случае, в стационарном поле направление циркуляции сторонних электродвижущих сил $\mathscr{E}_{\text{стр}}$ по контуру тока совпадает с направлением тока J.

проводника, в которых и сосредоточиваются переменные токи — *скин-эффект* (§ 90).

5. В заключение заметим, что предположение о равенстве в каждой точке пространства потока энергии электромагнитного поля вектору Пойнтинга в некоторых случаях ведет к следствиям, которые могут показаться лишенными физического смысла. Так, например, в постоянном поле, возбуждаемом неподвижным электрическим зарядом и неподвижным постоянным магнитом, вектор Пойнтинга, вообще говоря, отличен от нуля, причем линии этого вектора замкнуты (либо заполняют собой некоторую поверхность). Таким образом, мы приходим к, казалось бы, бессодержательному представлению о беспрерывной циркуляции энергии по замкнутым путям в *статическом* электромагнитном поле. Физический смысл этого представления выяснится в § 104.

§ 93. Однозначность решений уравнений Максвелла

1. Установив в § 91 систему основных максвелловых уравнений, мы указали, что эта система *полна*, т. е. что электромагнитное поле в каждой точке пространства и в каждый момент времени *однозначно* определяется этой системой, если только для момента $t = 0$ заданы начальные значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ во всех точках пространства. Впрочем, эта формулировка «теоремы однозначности» не вполне точна. Мы не можем определить напряженность поля *во всем* бесконечном пространстве, — нашему наблюдению доступна лишь ограниченная его часть. Поэтому теорема однозначности приобретает непосредственный физический смысл лишь в том случае, если мы ограничимся некоторым конечным участком пространства и дополним условия, определяющие решения максвелловых уравнений, определенными *граничными условиями* на границах этого участка.

2. Мы докажем сначала теорему однозначности в следующей формулировке: электромагнитное поле в любой момент времени $t_1 > 0$ в любой точке объема V, ограниченного произвольной замкнутой поверхностью S, однозначно определяется уравнениями Максвелла, если заданы начальные значения электромагнитных векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ во всем этом участке пространства для момента $t = 0$ и если, кроме того, *для одного из этих векторов* (например $\mathbf{E}$) *известны граничные значения его тангенциальных слагающих на поверхности S в течение всего промежутка времени от $t = 0$ до $t = t_1$* [1].

[1] Напомним при этом, что, согласно основному допущению, лежащему в основе всех рассуждений этой главы, значения ε, μ и λ считаются заданными функциями точки, от времени не зависящими, а $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ считается известной функцией точки и времени.

Предположим противное, т. е. предположим, что существуют две различные системы решений максвелловых уравнений $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}''$, удовлетворяющие одним и тем же начальным и граничным условиям. Ввиду линейности уравнений поля разность этих решений $\mathbf{E}''' = \mathbf{E}' - \mathbf{E}''$ и $\mathbf{H}''' = \mathbf{H}' - \mathbf{H}''$ также должна удовлетворять уравнениям Максвелла при следующих дополнительных условиях: а) $\mathbf{E}^{\text{стр}} = 0$ [1]; б) в момент $t = 0$ во всех точках объема V: $\mathbf{E}''' = \mathbf{H}''' = 0$ (ибо при $t = 0$ $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$ и $\mathbf{H}'$, $\mathbf{H}''$ имеют, по предположению, одинаковые заданные значения); в) в течение всего промежутка времени от $t = 0$ до $t = t_1$ во всех точках поверхности S тангенциальные слагающие вектора $\mathbf{E}'''$ либо вектора $\mathbf{H}'''$ равны нулю (по той же причине).

Применим к этому полю $\mathbf{E}'''$, $\mathbf{H}'''$ вытекающую из максвелловых уравнений теорему Пойнтинга [уравнение (92.6)], положив в ней, согласно сказанному, работу сторонних сил P равной нулю. Входящий в уравнение (92.6) поверхностный интеграл будет равен нулю в течение всего промежутка времени от $t = 0$ до $t = t_1$, ибо из условия (в) следует, что на поверхности S

$$S_n = [\mathbf{E}'''\mathbf{H}''']_n = 0;$$

стало быть, в любой момент этого промежутка

$$\frac{\partial W'''}{\partial t} = -Q''' = -\int \frac{\mathbf{j}'''^2}{\lambda}\, dV. \tag{93.1}$$

Так как подынтегральное выражение существенно положительно, то $\partial W'''/\partial t \leqslant 0$, т. е. энергия поля W''' может либо убывать, либо (при $\mathbf{j}'''$ равном повсюду нулю) оставаться постоянной. Но при $t = 0$, согласно условию (в), энергия W''' поля $\mathbf{E}'''$, $\mathbf{H}'''$ равнялась нулю; отрицательных же значений она принимать не может; стало быть, и в течение всего рассматриваемого промежутка $0 \leqslant t \leqslant t_1$ энергия

$$W''' = \frac{1}{8\pi} \int\limits_V (\varepsilon \mathbf{E}'''^2 + \mu \mathbf{H}'''^2)\, dV$$

должна оставаться равной нулю, что может иметь место лишь в том случае, если $\mathbf{E}'''$ и $\mathbf{H}'''$ остаются равными нулю во всех точках объема V. А это значит, что две системы решений исходной задачи $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}''$, предполагавшиеся нами различными, по необходимости тождественны между собой. Таким образом, теорема однозначности доказана.

3. Легко убедиться, что при рассмотрении всего безграничного пространства задание значений векторов поля на гранич-

[1] Ибо из $\mathbf{J}' = \lambda(\mathbf{E}' + \mathbf{E}^{\text{стр}})$ и $\mathbf{J}'' = \lambda(\mathbf{E}'' + \mathbf{E}^{\text{стр}})$ следует: $\mathbf{J}''' = \mathbf{J}' - \mathbf{J}'' = \lambda\mathbf{E}'''$.

ной поверхности S может быть заменено наложением следующих условий в бесконечности:

$$ER^2 \text{ и } HR^2 \text{ при } R \to \infty \text{ остаются конечными.} \tag{93.2}$$

Действительно, из условий (93.2) следует, что интеграл вектора Пойнтинга по бесконечно удаленной поверхности обращается в нуль. Это обстоятельство позволяет доказать, исходя из уравнения (92.6), применимость уравнения (93.1) ко всему бесконечному пространству. Из уравнения же (93.1), как мы видели, следует однозначность решений уравнения поля.

Условия (93.2) совпадают с прежними уравнениями (12.10) и (49.10); в случае постоянного поля они являются выражением того факта, что если все возбуждающие поле заряды и токи расположены в ограниченной области пространства V, то напряженность поля в бесконечности должна убывать не медленнее, чем обратно пропорционально квадрату расстояния R от произвольно выбранной в V начальной точки отсчета.

Однако условия (93.2), которыми можно пользоваться в случае постоянного поля, *неприменимы к полю переменному.* Так, например, в § 99 мы убедимся, что поле излучения осциллятора убывает в бесконечности обратно пропорционально *первой*, а не второй степени расстояния R. В этом случае поток вектора Пойнтинга через бесконечно удаленную поверхность не исчезает, а равняется вполне определенной конечной величине[1]).

Впрочем, при рассмотрении поля излучения часто можно ограничиться задачами следующего типа. Допустим, что вплоть до момента времени $t = 0$ поле вне некоторой конечной области пространства равнялось нулю либо было стационарным и удовлетворяло условиям (93.2). Затем за промежуток времени τ от момента $t = 0$ до момента $t = \tau$ происходили какие-либо пертурбации, перемещение тел, замыкания и размыкания цепей тока, включение переменных сторонних ЭДС $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ и т. п.; с момента же времени $t = \tau$ величины ε, μ и λ во всех точках поля вновь приобрели постоянные значения.

Как мы убедимся в § 97, возмущения электромагнитного поля распространяются со скоростью света c. Поэтому если все заряды и токи сосредоточены внутри сферы конечного радиуса R_0, то вне сферы S радиуса $R_0 + ct$ поле сохранит невозмущенное значение вплоть до момента t, т. е. будет удовлетворять условиям (93.2). Таким образом, в этом случае на основании доказанного поле в любой момент времени $t > \tau$ однозначно определяется

[1]) Для исчезновения потока вектора Пойнтинга через бесконечно удаленную поверхность условия (93 2) достаточны, но не необходимы. Поток этот исчезает и при гораздо менее жестком условии, чтобы произведение $[\mathbf{EH}]$ убывало при $R \to \infty$ быстрее, чем $1/R^2$ Однако в поле осциллятора и это условие не выполняется.

заданием начальных значений векторов **E** и **H** во всех точках пространства для момента времени t_0, удовлетворяющего неравенству $\tau \leqslant t_0 < t$ (ср. конец § 96) [1].

§ 94. Дифференциальные уравнения для потенциалов электромагнитного поля

1. Убедившись в однозначности максвелловых уравнений, мы должны попытаться найти способ фактического решения этих уравнений. В случае стационарного электромагнитного поля задача эта, как мы видели, существенно облегчается введением вспомогательных величин — потенциалов φ и **A**. Теперь мы покажем, что, видоизменив надлежащим образом определение скалярного и векторного потенциалов, можно воспользоваться этими потенциалами для решений уравнений Максвелла и в общем случае переменного поля. При этом мы для простоты предположим, что как *диэлектрическая ε, так и магнитная μ проницаемости одинаковы на всем протяжении полного поля* [2] и что поверхностных зарядов и поверхностных токов в поле нет. При этих условиях векторы **E** и **H** и их первые производные всюду остаются непрерывными.

В качестве определения вектор-потенциала **A** мы можем сохранить уравнение (62.10):

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{94.1}$$

из которого в свою очередь, согласно уравнению (42_2^*), следует уравнение (III). Внося уравнение (94.1) в уравнение (II), получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right),$$

или

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

[1] Заметим, что результаты этого параграфа существенно связаны с предположением, что все электрические токи сводятся к токам проводимости, плотность которых **j**, согласно (V), однозначно определяется заданием λ, **E** и $\mathbf{E}^{\text{стр}}$. Если же ввести в рассмотрение, например, также и токи, создаваемые движением свободных электронов в вакууме (например, в катодной лампе или в рентгеновской трубке), то для определения поля по начальным условиям необходимо, очевидно, дополнить систему максвелловых уравнений *поля* уравнениями *механики*, т. е. уравнениями движения электронов

[2] Результаты последующих параграфов легко обобщаются на случай наличия скачкообразного изменения ε и μ на отдельных поверхностях раздела различных сред Однако в общем случае произвольной зависимости ε и μ от координат точки задача решения максвелловых уравнений чрезвычайно усложняется

Это уравнение будет удовлетворено, если положить

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \tag{94.2}$$

где φ есть произвольный скаляр, ибо ротор градиента скаляра тождественно равен нулю (42_1^*).

На основании уравнений (94.1), (94.2) и (42_3^*) уравнение (I)

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

принимает вид

$$\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{\mu}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}) = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{\varepsilon}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Распорядившись надлежащим образом величинами $\mathbf{A}$ и φ, можно это уравнение упростить.

Действительно, до сих пор нами были определены только вихрь от $\mathbf{A}$ и градиент от φ, теперь же мы можем дополнительно потребовать, чтобы [1])

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = -\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{94.3}$$

Образовав градиент от обеих частей этого равенства, убедимся, что два члена предшествующего уравнения взаимно сокращаются, так что оно принимает вид

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}. \tag{94.4}$$

Из основных уравнений поля нам остается еще удовлетворить уравнению (IV). Внося в него уравнение (94.2), получим

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \varepsilon\operatorname{div}\mathbf{E} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} - \varepsilon\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 4\pi\rho.$$

Разделив это равенство на ε и внеся в него значение $\operatorname{div}\mathbf{A}$ из уравнения (94.3), получим

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho,$$

или на основании (40*)

$$\nabla^2\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho. \tag{94.5}$$

2. Уравнения (94.3)–(94.5) дают возможность определить значения скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля по заданному распределению зарядов и токов проводимости; зная же φ и $\mathbf{A}$, можно с помощью уравнений (94.1) и (94.2)

---

[1]) Степень произвола в определении потенциалов φ и $\mathbf{A}$ при заданных напряженностях поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ будет выяснена в конце § 96

найти $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Заметим при этом, что хотя скалярный потенциал φ, как и в случае стационарных полей, зависит лишь от распределения зарядов, а векторный потенциал $\mathbf{A}$ — от распределения токов проводимости, однако напряженность электрического поля зависит не только от градиента скалярного потенциала, но и от производной по времени векторного потенциала; в этом обстоятельстве проявляется закон электромагнитной индукции. В случае стационарности поля, когда все производные по времени обращаются в нуль, приведенные уравнения, как и следовало ожидать, принимают вид ранее установленных нами уравнений стационарного поля [ср. соответственно уравнения (94.2), (94.3), (94.4) и (94.5) с уравнениями (10.2), (64.2), (64.3) и (23.1)].

Итак, зная ρ и $\mathbf{j}$ в их зависимости от координат и времени, мы можем определить сначала φ и $\mathbf{A}$, а затем и $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Однако, как уже указывалось в § 91 (с. 423), понятие электрического заряда носит в классической теории поля, в сущности, характер вспомогательного термина, обозначающего истоки вектора электрической индукции $\mathbf{D}$. Иными словами, с точки зрения этой теории, ρ и $\mathbf{j}$ нужно, в сущности, считать функциями искомых величин $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, т. е. в свою очередь величинами искомыми. И действительно, согласно теореме однозначности, для определения значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в любой момент времени достаточно знать начальные значения этих векторов для $t = 0$; определив же $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, мы, очевидно, можем *вычислить* значения величин ρ и $\mathbf{j}$ для любого момента времени и любого места.

Однако фактическое решение этой «полной» задачи, вообще говоря, в высшей степени сложно. Поэтому мы в дальнейшем предположим, что зависимость ρ и $\mathbf{j}$ от координат и времени нам тем или иным способом стала известной для всего пространства[1]. В этом случае, пользуясь установленной в этом параграфе системой уравнений, мы действительно можем определить напряженность электромагнитного поля в любой точке пространства и в любой момент времени и притом определить *однозначно*, если только мы примем во внимание некоторые добавочные условия, о которых будет сказано в § 96.

Основная задача сводится при этом к решению определяющей значения потенциалов системы уравнений (94.3)–(94.5), ибо, определив φ и $\mathbf{A}$, мы найдем $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ простым дифференцированием.

---

[1] В сущности, помимо *начального* для момента $t = 0$ распределения зарядов ρ, достаточно знать лишь $\mathbf{j}$ в функции координат и времени, ибо по этим данным значение ρ в каждой точке пространства может быть определено для любого момента времени с помощью уравнения непрерывности (IVa). Из этого явствует, между прочим, что $\mathbf{j}$ и ρ не являются независимыми функциями времени и поэтому не могут задаваться независимо друг от друга.

3. Как скалярный потенциал φ, так и каждая из слагающих A_x, A_y, A_z векторного потенциала в произвольной системе декартовых координат удовлетворяют, согласно уравнениям (94.4) и (94.5), уравнению типа

$$\nabla^2 s - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -4\pi\chi(x,\, y,\, z,\, t), \tag{94.6}$$

где $\chi(x, y, z, t)$ есть, по предположению, известная функция координат и времени, а под s надо понимать одну из величин φ, A_x, A_y, A_z.

Введя обозначение

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{94.7}$$

можно записать уравнение (94.6) следующим образом:

$$\nabla^2 s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -4\pi\chi. \tag{94.8}$$

В дальнейшем мы убедимся, что v равно скорости распространения электромагнитных возмущений.

Уравнения типа (94.8) носят название *уравнений Даламбера*. При $\chi = 0$ уравнение Даламбера принимает вид так называемого *волнового уравнения*

$$\nabla^2 s = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \tag{94.9}$$

с которым нам неоднократно придется иметь дело в дальнейшем. Наконец, при независимости s от времени (стационарное поле) уравнение Даламбера вырождается в известное нам *уравнение Пуассона* (11.3)

$$\nabla^2 s = -4\pi\chi(x,\, y,\, z).$$

§ 95. Решение волнового уравнения и уравнения Даламбера

1. Мы не станем здесь излагать классических, вполне строгих с математической точки зрения способов решения этих уравнений [1], а воспользуемся гораздо более простыми рассуждениями, не отличающимися, правда, особой математической строгостью и носящими, в сущности, лишь наводящий характер. Проверив, однако, найденное решение подстановкой его в исходные уравнения и доказав однозначность этих решений, мы тем самым сообщим этому решению полную достоверность.

[1] Их можно найти в любом классическом курсе электричества (см., например: *Лоренц*. Теория электронов. — М.: Гостехиздат, 1953); см. также *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.: Наука, 1960; см. также примечание к с. 61. (*Примеч. ред.*)

Чтобы найти решение уравнения Даламбера (94.8), предположим сначала, что χ при любом t равно нулю во всех точках поля, за исключением лишь исчезающе малой области вокруг некоторой точки Q, в которой χ равно заданной функции времени $\chi(t)$. Для краткости мы будем при этом говорить, что χ отлично от нуля лишь в самой точке Q, которую можно называть *истоком* поля. Таким образом, вне этой точки s должно удовлетворять волновому уравнению (94.9).

Поставим себе, прежде всего, задачу найти *сферически-симметричное* решение этого волнового уравнения, т. е. такое его решение, которое в полярной системе координат, имеющей центр в Q, зависит лишь от радиуса-вектора R, но не от полярного и долготного углов ϑ и α. В этом случае $\nabla^2 s = \operatorname{div}\operatorname{grad} s$ определяется уравнением вида (21*), так что волновое уравнение (94.9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 s}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial s}{\partial R} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Умножая его на R, получим

$$R\frac{\partial^2 s}{\partial R^2} + 2\frac{\partial s}{\partial R} = \frac{\partial^2 (Rs)}{\partial R^2} = \frac{R}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (Rs)}{\partial t^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} = \frac{1}{v}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{95.1}$$

где нами временно введено обозначение $u = Rs$.

Общий интеграл уравнения (95.1) имеет, как известно, вид

$$Rs = u = f\left(t - \frac{R}{v}\right) + \phi\left(t + \frac{R}{v}\right), \tag{95.2}$$

где f и ϕ суть произвольные (но обладающие производными) функции указанных в скобках аргументов [1].

---

[1] В том, что (95.2) удовлетворяет уравнению (95.1), можно убедиться непосредственной подстановкой. Для того же чтобы показать, что *всякое* решение уравнения (95.1) должно иметь вид (95.2), введем вместо t и R новые переменные ζ и η: $\zeta = t - R/v$, $\eta = t + R/v$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

аналогично этому $\dfrac{\partial^2 u}{\partial R^2} = \dfrac{1}{v^2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \zeta\,\partial \eta} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$.

Внося эти выражения в (95.1), получим $-\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \zeta} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \zeta}$, откуда $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \zeta} = 0$. Это значит, что в общем случае u может состоять из двух слагаемых, каждая из которых является произвольной функцией лишь *одного* из независимых переменных ζ и η. Уравнение (95.2) представляет собой математическую формулировку этого вывода.

2. Легко убедиться, что первый член этого выражения представляет собой шаровую волну, распространяющуюся из центра координат Q со скоростью v. Действительно, функция $f(t-R/v)$ имеет в каждый данный момент t на каждом данном расстоянии R от точки Q то же значение, которым она обладала в момент $t-1$, на расстоянии $R-v$ от Q (ибо $t-1-(R-v)/v = t-R/v$). А это и значит, что значения величины u распространяются из точки источника поля Q в виде шаровой волны скорости v.

Подобным же образом можно убедиться, что второй член выражения (95.2) представляет собой шаровую волну той же скорости v, *приходящую из бесконечности* и сходящуюся в истоке поля Q, как в фокусе.

В этом параграфе и в первой половине следующего мы ограничимся рассмотрением первого члена общего решения (95.2), т. е. положим

$$s = \frac{u}{R} = \frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{v}\right); \tag{95.3}$$

вопрос же о том, в каких случаях целесообразно вводить в рассмотрение второй член этого общего решения, будет обсужден во второй половине § 96.

Если в соответствии с § 94 понимать под s потенциал (скалярный или векторный) электромагнитного поля, то под определяемой уравнением (95.3) величиной s нужно понимать потенциал поля, *возбуждаемый* зарядом или током, находящимся в точке Q. Согласно (95.3) значения потенциала зарядов и токов, находящихся в Q, распространяются из этой точки в форме шаровой волны скорости v, амплитуда которой убывает обратно пропорционально расстоянию.

3. Формула (95.3) не может быть справедливой во всех точках пространства, ибо при $R = 0$ она обращается в бесконечность, т. е. теряет смысл. Кроме того, при $\chi \neq 0$ искомая функция должна удовлетворять не волновому уравнению, а уравнению Даламбера.

Чтобы найти решение этого уравнения, вспомним решение аналогичной проблемы электростатики. Вне электрических зарядов электростатический потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$, сферически-симметрическое решение которого $\varphi = e/R$ аналогично выражению (95.3). Полное решение электростатической проблемы, т. е. решение уравнения Пуассона $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$, может быть получено суммированием сферически-симметрических решений уравнения Лапласа в форме интеграла

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dV}{R},$$

причем интеграл этот сохраняет конечное значение во всех точках пространства. Ввиду аналогии между уравнениями Лапласа и волновым, с одной стороны, и уравнениями Пуассона и Даламбера, с другой, можно ожидать, что решение последнего уравнения выразится суммой решений типа (95.3), причем ввиду аналогичной роли функций ρ и χ можно предположить, что

$$s = \int \frac{\chi(t - R/v)}{R}\, dV. \tag{95.4}$$

В этом случае потенциал поля, возбуждаемый «зарядом» $\chi(t)\, dV$ бесконечно малого элемента объема dV, выразится формулой

$$s = \frac{\chi(t - R/v)}{R}\, dV,$$

совпадающей по виду с выражением (95.3) и аналогичной соответствующей формуле электростатики

$$\varphi = \rho \frac{dV}{R}.$$

В том, что выражение (95.4) действительно является решением уравнения Даламбера (94.8), можно убедиться непосредственной подстановкой уравнений (95.4) в уравнение (94.8) (см. ниже).

Пусть x, y, z суть координаты точки P, в которой мы разыскиваем значение функции s; x', y', z' — текущие координаты произвольно расположенного элемента объема dV', а R — расстояние точки P от dV'. Введем обозначение

$$t' = t - \frac{R}{v} \tag{95.5}$$

и будем называть t' *эффективным временем* в dV' по отношению ко времени в P. Тогда формулу (95.4) можно будет записать следующим образом:

$$s(x, y, z, t) = \int \frac{\chi(x', y', z', t')}{R}\, dV', \tag{95.6}$$

где под dV' нужно понимать произведение $dx'\, dy'\, dz'$.

4. Прежде чем проверять подстановкой решение (95.6), проведем аналогичное вычисление для более простого случая: подставим в уравнение Пуассона его решение

$$\varphi(x, y, z) = \int \frac{\rho(x', y', z')}{R}\, dV', \tag{95.7}$$

полученное нами в § 12 математически безупречным образом.

При вычислении $\nabla^2\varphi$ можно дифференцировать по переменным x, y, z под знаком интеграла, взятого по x', y', z' при условии, что вторые производные подынтегрального выражения конечны и непрерывны во всей области интегрирования. Если в точке наблюдения P и в конечной области вокруг этой точки плотность заряда ρ равна нулю, то это условие выполняется (ибо R остается конечным во всей области интегрирования), и мы можем дифференцировать под знаком интеграла. Ввиду независимости $\rho(x'y'z')$ от координат x, y, z точки наблюдения P в этом случае получаем в соответствии с уравнением Пуассона:

$$\nabla^2\varphi = \int \rho(x', y', z') \cdot \nabla^2 \frac{1}{R} \cdot dV' = 0,$$

ибо, согласно уравнению (11.10), $\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$.

Если же ρ в точке P отлично от нуля, то при вычислении $\nabla^2\varphi$ можно выполнить под знаком интеграла только *одно*, а не два последовательных дифференцирования [1].

Мы воспользуемся уравнением (11.2)

$$\nabla^2\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$$

и, выполнив первое дифференцирование под знаком интеграла, получим

$$\operatorname{grad}\varphi = \int \rho(x', y', z') \operatorname{grad}\left(\frac{1}{R}\right) dV' = -\int \frac{\rho(x', y', z')\mathbf{R}}{R^3}\, dV',$$

где $\mathbf{R}$ — вектор, проведенный из точки x', y', z' в точку наблюдения x, y, z. Далее, на основании (18*) можно выразить дивергенцию в форме поверхностного интеграла

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \lim_{V\to 0} \frac{\oint \mathbf{a}\cdot d\mathbf{S}}{V},$$

где, по определению, поверхность S объема V должна охватывать ту точку наблюдения P, в которой определяется значение $\operatorname{div}\mathbf{a}$. В нашем случае $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi$ и, стало быть,

$$\nabla^2\varphi = \lim_{V\to 0} \frac{\oint \operatorname{grad}\varphi\cdot d\mathbf{S}}{V}.$$

---

[1]) Действительно, производные φ, например по x, равны

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \int \frac{(x'-x)\rho}{R^3}\, dV', \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \int \frac{\rho}{R^3}\left[\frac{3(x'-x)^2}{R^2} - 1\right] dV'.$$

Если после дифференцирования ввести вместо x', y', z' полярные координаты R, θ, α с центром в точке x, y, z и с полярной осью, направленной по оси x, то dV' примет вид $R^2\, dR\, d\Omega$, где $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\alpha$ и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \int \rho\cos\theta\, dR\, d\Omega, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \int \frac{\rho}{R}\,(3\cos^2\theta - 1)\, dR\, d\Omega.$$

Таким образом, подынтегральное выражение во втором из этих интегралов обращается в бесконечность при $R = 0$.

Вычисляя поверхностный интеграл, получим, меняя порядок интегрирования по dV и по $d\mathbf{S}$:

$$\oint \operatorname{grad}\varphi \cdot d\mathbf{S} = -\oint d\mathbf{S} \int \frac{\rho(x', y', z')\mathbf{R}}{R^3}\, dV' = \\ = -\int \rho(x', y', z')\, dV' \oint \frac{\mathbf{R}\, d\mathbf{S}}{R^3},$$

где $\mathbf{R}$ — вектор, проведенный из точки x', y', z' к элементу поверхности $d\mathbf{S}$. Поток вектора $\mathbf{R}/R^3$ через произвольную замкнутую поверхность был вычислен нами в § 3; он равен 4π или нулю в зависимости от того, лежит ли точка истока x', y', z' вектора $\mathbf{R}$ внутри или вне объема V, охватываемого этой поверхностью S. Следовательно,

$$\oint \operatorname{grad}\varphi \cdot d\mathbf{S} = -4\pi \int \rho\, dV,$$

где интегрирование должно быть, очевидно, распространено по объему V, охватываемому поверхностью S. Следовательно,

$$\nabla^2\varphi = -4\pi \lim_{V\to 0} \frac{\int \rho\, dV}{V} = -4\pi\rho_P,$$

где ρ_P есть значение ρ в центре объема V, т. е. в той точке наблюдения P, в которой мы определяем значение величины $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi$. Таким образом, мы доказали, что выражение (95.7) для φ действительно удовлетворяет уравнению Пуассона.

5. Приступим теперь к проверке формулы (95.6). Прежде всего, выделим около точки наблюдения P некоторый маленький объем V_0, например сферу радиуса R_0 с центром в P, и разобьем интеграл выражения (95.6) на два интеграла: по объему сферы V_0, который мы в дальнейшем будем стремить к нулю, и по остальному «внешнему» пространству:

$$s = s_1 + s_2, \qquad s_1 = \int\limits_{V_0} \frac{\chi(x', y', z', t')}{R}\, dV', \qquad s_2 = \int\limits_{\text{внш}} \frac{\chi(x', y', z', t')}{R}\, dV'.$$

Во втором из этих интегралов расстояние R превышает конечную величину R_0; стало быть, мы можем непосредственно дифференцировать под знаком интеграла. Так как функция

$$\frac{1}{R}\chi\left(x', y', z', t - \frac{R}{v}\right)$$

удовлетворяет, согласно уравнению (95.3), волновому уравнению (94.9), то

$$\nabla^2 s_2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2} = \int\limits_{\text{внш}} \left[\nabla^2\left(\frac{\chi}{R}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\chi}{R}\right] dV' = 0.$$

Далее,

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\int\limits_{V_0}\frac{1}{R}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\,dV';$$

при безграничном уменьшении радиуса R_0 сферы V_0 интеграл этот стремится, очевидно, к нулю, ибо $\partial^2\chi/\partial t^2$ есть величина конечная, а

$$\int\frac{1}{R}\,dV = \int\frac{1}{R}\cdot 4\pi R^2\,dR = 4\pi\int R\,dR.$$

Таким образом, левая часть волнового уравнения сводится к

$$\nabla^2 s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \nabla^2 s_1 = \operatorname{div}\operatorname{grad} s_1 = \lim_{V\to 0}\frac{\oint \operatorname{grad} s_1\, d\mathbf{S}}{V}. \qquad (95.8)$$

Далее,

$$\operatorname{grad} s_1 = \int\limits_{V_0}\operatorname{grad}\frac{\chi}{R}\,dV' = \int\limits_{V_0}\left(\frac{1}{R}\operatorname{grad}\chi + \chi\operatorname{grad}\frac{1}{R}\right)dV'.$$

При безграничном уменьшении сферы V_0 интеграл первого члена в скобках стремится к нулю, так что его можно сразу отбросить. Таким образом,

$$\oint \operatorname{grad} s_1\, d\mathbf{S} = \int\limits_{V_0} dV'\oint\chi\operatorname{grad}\frac{1}{R}\,d\mathbf{S} = -\int\limits_{V_0} dV'\oint\frac{\chi\mathbf{R}}{R^3}\,d\mathbf{S}.$$

При переходе к пределу, когда как сфера V_0, так и поверхность S становятся бесконечно малыми, можно пренебречь зависимостью функции $\chi(x', y', z', t - R/v)$ от R, т. е. от расстояния между точкой x', y', z' объема V_0 и элементом поверхности $d\mathbf{S}$, и приравнять R в аргументе этой функции χ нулю. Функцию же $\chi(x', y', z', t)$ можно вынести за знак поверхностного интеграла.

Таким образом, мы приходим к выражению только что рассмотренного типа (предполагаем, что поверхность S целиком лежит внутри сферы V_0)

$$\oint \operatorname{grad} s_1\, d\mathbf{S} = -\int\limits_{V_0}\chi\,dV'\oint\frac{\mathbf{R}}{R^3}\,d\mathbf{S} = -4\pi\int\chi\,dV',$$

откуда на основании (95.8) следует:

$$\nabla^2 s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -4\pi\chi_P,$$

что и требовалось доказать.

Вопроса об однозначности решения уравнения Даламбера мы коснемся в следующем параграфе.

§ 96. Запаздывающие и опережающие потенциалы. Калибровочная инвариантность

1. Результаты последнего параграфа позволяют непосредственно написать интегральные выражения потенциалов электромагнитного поля, определяемых дифференциальными уравнениями (94.4) и (94.5).

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (94.6) и (94.8), мы на основании уравнения (95.4) получаем непосредственно:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho(t - R/v)}{R}\,dV, \qquad A = \frac{\mu}{c}\int \frac{j_x(t - R/v)}{R}\,dV \tag{96.1}$$

и аналогичные выражения для A_y и A_z, так что вектор $\mathbf{A}$ выразится формулой

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\int \frac{\mathbf{j}(t - R/v)}{R}\,dV, \tag{96.2}$$

причем, согласно уравнению (94.7),

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Пользуясь обозначениями § 95, в частности уравнением (95.5), можно записать уравнения (96.1) и (96.2) следующим образом:

$$\varphi(x,\, y,\, ,\, t) = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho(x',\, y',\, z',\, t')}{R}\,dV', \tag{96.3}$$

$$\mathbf{A}(x,\, y,\, z,\, t) = \frac{\mu}{c}\int \frac{\mathbf{j}(x',\, y',\, z',\, t')}{R}\,dV', \tag{96.4}$$

где под dV' нужно понимать произведение $dx'\,dy'\,dz'$.

В случае независимости ρ и $\mathbf{j}$ от времени, т. е. в стационарном поле, формулы (96.1) и (96.2), как и следовало ожидать, совпадают с ранее выведенными уравнениями (8.8) (при $\varepsilon = 1$) и (64.3).

2. Итак, чтобы вычислить, например, значение скалярного потенциала φ в произвольной точке P в момент t, нужно, согласно уравнению (96.1), разбить все пространство на элементы объема dV и для каждого элемента dV определить величину того заряда

$$de = \rho\left(t - \frac{R}{v}\right)dV,$$

который находился в нем в момент времени $t - R/v$, где R есть расстояние dV от P. Разделив затем этот заряд de на εR и взяв сумму полученных выражений по всем элементам объема, мы и получим φ. Аналогичным способом определяется и значение $\mathbf{A}$.

Таким образом, потенциалы переменного поля определяются совершенно аналогично потенциалам поля стационарного с тем единственным, но весьма существенным дополнением, что в каждый момент t потенциал поля, возбуждаемого на расстоянии R от элемента объема dV зарядами и токами элемента, определяется не одновременной с t, а предшествовавшей (в момент $t-R/v$) плотностью этих зарядов и токов. Таким образом, можно сказать, что потенциалы φ и $\mathbf{A}$ зарядов и токов каждого элемента объема dV распространяются из dV по всем направлениям со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, убывая при этом в интенсивности обратно пропорционально расстоянию R. Поэтому определяемые уравнениями (96.1) и (96.2) величины φ и $\mathbf{A}$ носят название *запаздывающих потенциалов* электромагнитного поля.

3. В предыдущем нами еще не было принято во внимание уравнение (94.3), связывающее определенным соотношением возможные значения потенциалов φ и $\mathbf{A}$. В том, что наши решения (96.1) и (96.2) удовлетворяют и этому уравнению, можно убедиться путем непосредственного вычисления.

В соотношение (94.3) входит $\operatorname{div}\mathbf{A}$. При вычислении $\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\mathbf{A}$ можно переменить порядок дифференцирования по x, y, z и интегрирования по x', y', z' на обратный:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\int \nabla\,\frac{\mathbf{j}(x', y', z', t')}{R}\,dV'. \tag{96.5}$$

Согласно (43_2^*)

$$\nabla\,\frac{\mathbf{j}(x', y', z', t')}{R} = \frac{1}{R}\cdot\nabla\mathbf{j}(x', y', z', t') + \mathbf{j}(x', y', z', t')\nabla\,\frac{1}{R}.$$

Так как аргумент вектора $\mathbf{j}$ зависит от x, y, z лишь через посредство эффективного времени t', то

$$\nabla\mathbf{j}(x', y', z', t') = \frac{\partial j_x}{\partial t'}\,\frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial t'}\,\frac{\partial t'}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial t'}\,\frac{\partial t'}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t'}\,\nabla t'.$$

Приняв во внимание, что, согласно уравнению (95.5),

$$\nabla t' = -\frac{1}{v}\,\nabla R,$$

получим окончательно:

$$\nabla\,\frac{\mathbf{j}}{R} = \mathbf{j}\cdot\nabla\frac{1}{R} = \frac{1}{vR}\,\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t'}\cdot\nabla R.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\nabla'\,\frac{\mathbf{j}}{R} = \left(\nabla'\,\frac{\mathbf{j}}{R}\right)_{t'=\mathrm{const}} + \frac{1}{R}\,\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t'}\cdot\nabla' t',$$

где ∇' в отличие от ∇ означает дифференцирование по координатам x', y', z'. Выполнив простые преобразования, получаем

$$\nabla'\,\frac{\mathbf{j}}{R} = \mathbf{j}'\cdot\nabla'\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\,(\nabla'\mathbf{j})_{t'=\mathrm{const}} - \frac{1}{vR}\,\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t'}\cdot\nabla' R.$$

Приняв теперь во внимание, что уравнение $\operatorname{grad}_a f(R) = -\operatorname{grad}_q f(R)$ [см. уравнения (8*) и (9*)] в наших теперешних обозначениях принимает вид

$$\nabla' f(R) = -\nabla f(R),$$

и сравнивая выражения для $\nabla \frac{\mathbf{j}}{R}$ и $\nabla' \frac{\mathbf{j}}{R}$, найдем

$$\nabla \frac{\mathbf{j}}{R} = -\nabla' \frac{\mathbf{j}}{R} + \frac{1}{R} (\nabla' \mathbf{j})_{t'=\text{const}}.$$

Стало быть, обозначая $\nabla' \mathbf{j}$ через $\operatorname{div}' \mathbf{j}$ и т. д., получим из уравнения (96.5):

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\mu}{c} \int \operatorname{div}' \frac{J}{R} \cdot dV' + \frac{\mu}{c} \int \frac{dV'}{R} (\operatorname{div}' \mathbf{j})_{t'=\text{const}}.$$

Первый из этих интегралов может быть преобразован с помощью теоремы Гаусса в интеграл по поверхности S, охватывающей объем V [1]:

$$\int \operatorname{div}' \frac{\mathbf{j}}{R} dV' = \oint \frac{j_n}{R} dS.$$

Если распространить интегрирование на все бесконечное пространство, то этот интеграл обратится в нуль, если только все электрические токи сосредоточены в конечной области пространства, так что окончательно

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{c} \int \frac{dV'}{R} (\operatorname{div}' \mathbf{j}(x', y', z', t'))_{t'=\text{const}}.$$

Обратимся теперь к правой части соотношения (96.3). Ввиду уравнения (95.5) для произвольной функции $f(t')$ имеем

$$\frac{\partial f(t')}{\partial t} = \frac{\partial f(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial f(t')}{\partial t'}.$$

Поэтому, дифференцируя уравнение (96.3) по времени под знаком интеграла, получим

$$-\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} \int \frac{dV'}{R} \frac{\partial \rho(x', y', z', t')}{dt'}.$$

С другой стороны, уравнение непрерывности (IVa) можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(x, y, z, t)_{t=\text{const}} = -\frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t},$$

ибо при пространственном дифференцировании (образовании дивергенции) время t должно считаться постоянным параметром.

Заменяя в этом уравнении непрерывности нештрихованные величины штрихованными (что является простым изменением обозначений), убедимся, что запаздывающие потенциалы действительно удовлетворяют соотношению (94.3)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

которое требовалось доказать.

4. Обратимся к вопросу об *однозначности* найденных нами решений (96.1) и (96.2) системы уравнений (94.3)–(94.5).

Если не принимать во внимание никаких дополнительных условий, то решения эти необходимо признать неоднозначными. Вспомним хотя бы, что при получении решения (95.4) мы исключили второй член в общем решении (95.2) уравнения (95.1).

---

[1] Преобразование это нельзя применить непосредственно к исходному выражению (96.5) потому, что в нем объемное интегрирование и пространственное дифференцирование (образование дивергенции) производятся по координатам различных точек.

Если мы, наоборот, сохранили бы только второй член этого общего решения и исключили первый, то мы могли бы повторить все предшествующие вычисления с единственным отличием, заключающимся в замене всюду аргумента $t - R/v$ на $t + R/v$. В результате мы получили бы решение уравнений (94.3)–(94.5) в форме так называемых *опережающих потенциалов* электромагнитного поля:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho(t + R/v)}{R}\,dV, \qquad \mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\int \frac{\mathbf{j}(t + R/v)}{R}\,dV, \tag{96.6}$$

связывающих значение потенциала в точке P в момент t с пространственным распределением зарядов и токов в *последующие* моменты времени $t + R/v$.

Далее, так как неоднородные дифференциальные уравнения (94.3)–(94.5), определяющие потенциалы φ и $\mathbf{A}$, *линейны*, то общее решение этих уравнений может быть представлено в виде суммы произвольного частного решения этих неоднородных уравнений и общего решения соответствующих *однородных* уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = -\frac{c}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad \nabla^2\mathbf{A} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}, \qquad \nabla^2\varphi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{96.7}$$

Как запаздывающие потенциалы (96.1), так и опережающие потенциалы (96.6) являются различными частными решениями неоднородных уравнений (94.3)–(94.5); поэтому общее решение этих уравнений отличается от них на произвольное решение уравнений (96.7).

Следовательно, в частности, и самые опережающие потенциалы можно представить как сумму запаздывающих потенциалов плюс некоторое решение однородных уравнений (96.7).

Эта неоднозначность решения интересующей нас системы дифференциальных уравнений в соответствии с известным общим правилом может быть устранена только заданием определенных *начальных и граничных условий*. Только задание этих условий выделяет из бесконечной совокупности решений системы дифференциальных уравнений то единственное решение, которое соответствует данной конкретной постановке физической задачи.

Так, например, можно показать, что *общее* решение уравнения (94.5) внутри произвольного объема V, ограниченного замкнутой поверхностью S, может быть представлено в форме

$$\varphi(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_V \frac{[\rho]}{R}\,dV + \\ + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint\limits_S \left\{\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] - [\varphi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{vR}\frac{\partial R}{\partial n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\right\} dS, \tag{96.8}$$

где $\mathbf{n}$ есть внешняя нормаль к S, а квадратные скобки означают, что значения находящихся в этих скобках величин должны быть взяты для эффективного момента времени $t' = t - R/v$. Иными словами, если известны значения величин, входящих в правую часть уравнения (96.8), то этим уравнением значения φ в произвольной точке объема V определяются *однозначно.* То же общее решение уравнения (94.5) может быть, однако, представлено также в форме, отличающейся от (96.8), во-первых, знаком у последнего члена подынтегрального выражения поверхностного интеграла и, во-вторых, тем, что значения величин в квадратных скобках должны быть взяты не для *предшествующего* момента времени $t' = t - R/v$, а для *последующего* момента $t' = t + R/v$. Первая форма решения соответствует запаздывающим потенциалам, вторая — опережающим [1]. В стационарном поле оба решения совпадают (при $\varepsilon = 1$) с ранее доказанной формулой (12.5).

Таким образом, уравнения электромагнитного поля, подобно уравнениям механики, позволяют определить как будущее по прошлому и настоящему, так и прошлое по настоящему и будущему. Точнее, пусть нам известны значение ρ в объеме V и значения φ, $\partial\varphi/\partial n$ и $\partial\varphi/\partial t$ на поверхности S этого объема в промежутке времени от t_1 до t_2 и пусть нас интересует поле в произвольной точке P этого объема V. Обозначим через R_2 расстояние от P до наиболее удаленной от нее точки поверхности S и через R_1 наименьшее из следующих двух расстояний: 1) от P до ближайшей точки поверхности S и 2) от P до ближайшей к P точки объема V, в которой плотность заряда ρ была отлична от нуля хотя бы в течение части промежутка времени от t_1 до t_2. Пусть $t_2 - t_1 > (R_2 - R_1)/v$. Тогда, пользуясь запаздывающими потенциалами и формулой (96.8), мы можем определить значение φ в точке P в любой момент «будущего» промежутка времени от $t_1 + R_2/v$ до $t + R_1/v$ [2]; пользуясь же опережающими потенциалами и соответственным видоизменением формулы (96.8), мы можем определить φ в точке P в «прошедшем» промежутке времени от $t_1 - R_1/v$ до $t_2 - R_2/v$.

5. Постановка задач, с которыми приходится встречаться как в теоретической и экспериментальной, так и технической физи-

---

[1]) Доказательство формулы (96.8) для запаздывающих потенциалов приведено, например, у Лоренца (Теория электронов. — М.: Гостехиздат, 1953. С. 339–345). Доказательство аналогичной формулы для опережающих потенциалов совершенно аналогично приведенному у Лоренца; нужно только в его выкладках заменить $F(t + R/c)$ на $F(t - R/c)$.

[2]) Действительно, для этого определения необходимо, в частности, знать значения φ, $\partial\varphi/\partial n$ и $\partial\varphi/\partial t$ в каждой точке поверхности S в течение промежутка времени от $t_1 + R_2/v - R/v$ до $t_2 + R_1/v - R/v$, где R — расстояние этой точки поверхности от точки P. Так как $R_1 \leqslant R \leqslant R_2$ и $R_2 - R_1 < v(t_2 - t_1)$, то весь этот промежуток времени заключен между t_1 и t_2.

ке, в большинстве случаев требует применения *запаздывающих*, а не опережающих потенциалов. Действительно, в большинстве случаев задача заключается в определении поля, возбуждаемого той или иной системой зарядов и токов, причем эту задачу можно уточнить следующим образом (ср. конец § 93). Вплоть до некоторого момента t_0 поле либо равнялось нулю, либо было стационарным, причем потенциалы φ и $\mathbf{A}$ удовлетворяли условиям (12.10):

$$R\varphi \text{ и } R^2 \operatorname{grad}\varphi \text{ при } R \to \infty \text{ остаются конечными,}$$

и аналогичным условием для $\mathbf{A}$ (46.6). Затем в момент t_0 возникли переменные токи, произошло перемещение зарядов, поле которых и требуется определить в момент времени $t > t_0$. Поле это при этих условиях определяется выражениями (96.1) и (96.2) *запаздывающих* потенциалов.

Действительно, при определении по формуле (96.8) значения потенциала φ в момент времени t мы можем удалить поверхность S на столь большое расстояние R от исследуемой точки поля P, чтобы R удовлетворяло неравенству

$$t - \frac{R}{v} < t_0.$$

В этом случае входящим в уравнение (96.8) величинам $\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right]$, $[\varphi]$ и $\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right]$ нужно будет приписать те значения, которыми они обладали до момента возникновения поля t_0, в силу чего весь поверхностный интеграл в уравнении (96.8) обратится в нуль.

Таким образом, при указанных условиях решение уравнения (94.4) определяется *однозначно* и выражается первым членом общего решения (96.8), совпадающим с нашей формулой (96.1). Подобно этому, при этих условиях значение векторного потенциала $\mathbf{A}$ также однозначно определяется формулой (96.2).

В дальнейшем по характеру задач, которые мы будем рассматривать, нам придется иметь дело только с запаздывающими, но не с опережающими потенциалами.

6. В предыдущем мы мало обращали внимания на то, что скалярный и векторный потенциалы поля являются лишь вспомогательными понятиями и что непосредственный физический смысл имеют только *напряженности* электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Ведь энергия поля, пондеромоторные силы, плотность токов и т. д. однозначно определяются напряженностями поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (при заданных ε и μ). Поэтому два поля, описываемые одними и теми же значениями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, но разными значениями потенциалов φ и $\mathbf{A}$, физически тождественны. Каков же произвол в определении потенциалов φ и $\mathbf{A}$ при заданных напряженностях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (или $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$)?

Пусть φ и $\mathbf{A}$ удовлетворяют уравнениям (94.1) и (94.2):

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi.$$

Так как ротор градиента тождественно равен нулю, то если мы прибавим к $\mathbf{A}$ градиент произвольного скаляра χ:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad}\chi, \tag{96.9}$$

то новому значению векторного потенциала $\mathbf{A}'$ будет соответствовать прежнее значение магнитной индукции

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}' = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Если χ не зависит от времени, то и значение электрической напряженности $\mathbf{E}$ не изменится при замене $\mathbf{A}$ на $\mathbf{A}'$. Если же χ зависит от времени, то значение $\mathbf{E}$ останется неизменным лишь при условии, что мы одновременно с заменой $\mathbf{A}$ на $\mathbf{A}'$ заменим также и φ на φ', причем

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}. \tag{96.10}$$

Действительно, при этом условии

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi = \mathbf{E}.$$

Итак, напряженность и индукция поля остаются неизменными при одновременном прибавлении к векторному потенциалу градиента произвольного скаляра и вычитании из скалярного потенциала деленной на c производной по времени от того же скаляра. Инвариантность поля по отношению к этому классу преобразований потенциалов называется *калибровочной* или *градиентной инвариантностью* (по-немецки — Eichinvarianz, по-английски — gauge invariance). В частности, если χ не зависит от координат, то калибровочная инвариантность сводится к отмеченной в § 8 возможности прибавления к скалярному потенциалу произвольной аддитивной постоянной (могущей зависеть от времени).

Ранее мы пользовались определенной калибровкой или нормировкой потенциалов, т. е. устраняли произвол в определении потенциалов поля добавочными требованиями. Так, например, на векторный потенциал постоянного магнитного поля мы налагали требование $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ и условия на бесконечности (46.6), на потенциалы переменного поля налагалось условие (94.3) и т. д. Лишь при этих условиях [$\mathbf{A}$ выражается интегралом (46.1) в случае постоянного магнитного поля] потенциалы переменного поля удовлетворяют уравнениям Даламбера (94.4) и (94.5) и т. д. Однако ввиду калибровочной инвариантности эти условия отнюдь не обязательны. Более того, решение отдельных конкретных задач часто облегчается специальной, целесообразной для данной задачи, калибровкой потенциалов, отличной от принятой в этой книге.

Требование калибровочной инвариантности уравнений теоретической физики, т. е. требование, чтобы физическое содержание этих уравнений зависело только от напряженности электромагнитного поля и оставалось неизменным при всех преобразованиях потенциалов поля по формулам (96.9) и (96.10), играет важную роль в электронной и квантовой теориях [1]).

§ 97. Скорость распространения электромагнитных возмущений. Условия квазистационарности

1. Физическое содержание формул (96.1) и (96.2), определяющих значения запаздывающих потенциалов, и уравнений (94.1) и (94.2), устанавливающих зависимость между этими потенциалами и напряженностью поля, сводится к следующему положению: электромагнитное поле возбуждается зарядами и токами проводимости и распространяется от места возбуждения с конечной скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Таким образом, из упомянутых формул, в частности, следует, что токи смещения, играющие столь важную роль в механизме распространения поля, независимо от движения зарядов существовать не могут. Далее, в вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$) скорость распространения поля должна равняться c, т. е. должна численно равняться значению электродинамической постоянной, определяющей силу пондеромоторного взаимодействия токов и действительно имеющей размерность скорости [см. уравнение (43.4)].

Именно в этом признании *конечности скорости распространения поля* и заключается существеннейшее и *основное отличие фактического содержания* так называемых *теорий близкодействия*, и прежде всего теории Максвелла, от теорий *мгновенного дальнодействия* начала прошлого столетия. Поэтому вопрос о правильности той или иной из этих теорий в принципе может быть решен, например, путем постановки следующего простейшего experimentum crucis.

---

[1]) В квантовой теория имеет место другая ситуация Если заряженная частица движется в области, где электрические и магнитные поля отсутствуют, но потенциалы (скалярный и векторный) не равны нулю, то такая частица испытывает электромагнитное воздействие Об особой роли потенциалов в квантовой физике см статью В.Д Скаржинского «Эффект Ааронова–Бома Теоретические расчеты и интерпретация» (Труды ФИАН. 1986 Т 167. С. 139) К этой статье приложен полный список литературы, относящейся к этому вопросу При этом калибровочная инвариантность не нарушается. (*Примеч. ред.*)