ГЛАВА IX

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 75. Уравнения поля в диэлектриках в отсутствие дисперсии

В § 58 были написаны уравнения переменного электромагнитного поля в металлах:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{75,1}$$

справедливые при достаточной медленности изменения поля: частóты поля должны быть такими, чтобы оставались справедливыми зависимости $\mathbf{j}$ от $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ от $\mathbf{H}$ (если отличие $\mathbf{B}$ от $\mathbf{H}$ вообще существенно), относящиеся к стационарному случаю [1]).

Теперь мы обратимся к аналогичному вопросу для переменного электромагнитного поля в диэлектрической среде и сформулируем уравнения, справедливые для таких частот, при которых связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ и между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ остается еще такой же, как в постоянных полях. Если, как это обычно бывает, эта связь сводится к простой пропорциональности, то указанное условие означает, что можно полагать

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{75,2}$$

со статическими значениями ε и μ.

Эти соотношения нарушаются (или, как говорят, появляется *дисперсия* ε и μ) при частотах, сравнимых с собственными частотами тех молекулярных или электронных колебаний, с которыми связано появление электрической или магнитной поляризации вещества. Порядок величины этих частот зависит от рода вещества и меняется в очень широких пределах. Он может быть также совершенно различным для электрических и магнитных явлений [2]).

---

[1]) Что касается условия $l \ll \lambda$, то оно не имеет отношения к применимости уравнений (75,1) как таковых. Роль этого условия для вопросов, рассматривавшихся в гл. VII, заключалась в том, что оно позволяло пренебречь эффектами запаздывания в поле вне проводника.

[2]) Так, в алмазе электрическая поляризация имеет электронное происхождение и дисперсия ε начинается лишь в ультрафиолетовой области спектра. В такой полярной жидкости же, как вода, поляризация связана с ориентацией молекул с жесткими дипольными моментами и дисперсия ε наступает при частотах $\omega \sim 10^{11}$ (т. е. в сантиметровом диапазоне длин волн). Еще раньше может начаться дисперсия μ в ферромагнитных веществах.

Уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{75,3}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{75,4}$$

получаются непосредственно путем замены $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ в точных микроскопических уравнениях Максвелла их усредненными значениями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Поэтому эти уравнения ни при каких условиях не нуждаются в изменении. Что касается уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \tag{75,5}$$

то оно получается (см. § 6) путем усреднения точного микроскопического уравнения $\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi\rho$, причем используется лишь то обстоятельство, что полный заряд тела равен нулю. Очевидно, что этот вывод ни в какой степени не зависит от предполагавшейся в § 6 стационарности поля, и потому уравнение (75,5) сохраняет свой вид и в переменных полях.

Еще одно уравнение должно быть получено путем усреднения точного уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}. \tag{75,6}$$

Непосредственное усреднение дает

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}}. \tag{75,7}$$

Однако при зависящем от времени макроскопическом поле установление связи среднего значения $\overline{\rho\mathbf{v}}$ с ранее введенными величинами довольно затруднительно. Проще произвести требуемое усреднение не непосредственно, а следующим более формальным путем.

Предположим временно, что в диэлектрик введены посторонние по отношению к его веществу заряды с объемной плотностью $\rho_{\text{ст}}$. При своем движении эти заряды создают «сторонний» ток $\mathbf{j}_{\text{ст}}$, а сохранение этих зарядов выражается уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho_{\text{ст}}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{ст}} = 0.$$

Вместо уравнения (75,5) будем иметь

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ст}}$$

(см. (6,8)). Продифференцировав это равенство по времени и воспользовавшись уравнением непрерывности, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\frac{\partial \rho_{\text{ст}}}{\partial t} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{ст}}$$

или

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}_{\text{ст}}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что вектор, стоящий под знаком div, может быть представлен в виде ротора некоторого другого вектора, который обозначим как $c\mathbf{H}$; тогда

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_{\text{ст}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{75,8}$$

Вне тела это уравнение должно совпадать с точным уравнением Максвелла для поля в пустоте, соответственно чему вектор $\mathbf{H}$ совпадает с напряженностью магнитного поля. Внутри же тела в статическом случае ток $\mathbf{j}_{\text{ст}}$ связан с магнитным полем уравнением

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_{\text{ст}},$$

где $\mathbf{H}$ — величина, введенная в § 29 и определенным образом связанная со средней напряженностью $\mathbf{B}$. Отсюда следует, что в пределе стремящейся к нулю частоты вектор $\mathbf{H}$ в уравнении (75,8) совпадает со статической величиной $\mathbf{H}(\mathbf{B})$, а предполагаемая нами здесь «медленность» изменения поля означает, что и для этих переменных полей сохраняется та же зависимость $\mathbf{H}(\mathbf{B})$. Таким образом, $\mathbf{H}$ становится вполне определенной величиной, и, опуская вспомогательную величину $\mathbf{j}_{\text{ст}}$, мы приходим окончательно к уравнению

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{75,9}$$

Величину $\dot{\mathbf{D}}/4\pi$ называют *током смещения.*

Это уравнение заменяет собой для диэлектриков первое из уравнений (75,1), описывающих поле в металлах. Может возникнуть мысль о том, что и в металлах в этом уравнении для переменного поля следует учитывать член с производной $\partial\mathbf{E}/\partial t$, т. е. писать

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\sigma\mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{75,10}$$

с постоянным коэффициентом ε. Однако для хороших проводников (истинных металлов) введение такого члена было бы бессмысленным. Два члена в правой стороне уравнения (75,10) представляют собой по существу первые два члена разложения по степеням частоты поля. Поскольку последняя предполагается достаточно малой, то учет второго члена мог бы, в лучшем случае, означать введение малой поправки. В действительности он не может иметь даже этого смысла, так как фактически в металлах поправки от влияния пространственной неоднородности поля становятся заметными раньше, чем поправка по частоте (см. примечание на стр. 282).

Есть, однако, особая категория тел (плохие проводники), для которых уравнение (75,10) может иметь смысл. В силу особых причин (малое число электронов проводимости в полупроводниках, малая подвижность ионов в растворах электролитов) проводимость этих веществ аномально мала, и потому второй член в правой стороне уравнения (75,10) может сравниться с первым или даже превысить его уже при таких частотах, для которых можно еще считать σ и ε постоянными. В монохроматическом поле отношение второго члена к первому есть $\varepsilon\omega/4\pi\sigma$. Если это отношение мало, то тело ведет себя как обычный проводник с проводимостью σ. При частотах же $\omega \gg 4\pi\sigma/\varepsilon$ оно ведет себя как диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε.

В однородной среде с постоянными ε и μ уравнения (75,3—5) и (75,9) принимают вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{75,11}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{75,12}$$

Исключая из этих уравнений обычным образом $\mathbf{E}$ (или $\mathbf{H}$), получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

и поскольку $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}$, то мы приходим к волновому уравнению

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Отсюда видно, что скорость распространения электромагнитных волн в однородной диэлектрической среде есть

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{75,13}$$

Плотность потока энергии складывается из потока энергии электромагнитного поля и потока энергии, переносимой непосредственно движущимся веществом. В неподвижной среде (которую мы и рассматриваем) последняя часть отсутствует и плотность потока энергии в диэлектрической среде дается той же формулой (30,20)

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}], \tag{75,14}$$

что и в металлах. В этом легко убедиться, вычислив $\operatorname{div} \mathbf{S}$. Используя уравнения (75,4) и (75,9), получим

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{75,15}$$

в соответствии с выражением

$$dU = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}\, d\mathbf{D} + \mathbf{H}\, d\mathbf{B})$$

для дифференциала внутренней энергии диэлектрика при заданных плотности и энтропии.

Как известно, требование симметричности четырехмерного тензора энергии-импульса всякой замкнутой системы (в данном случае—диэлектрика в электромагнитном поле) приводит к равенству (с точностью до множителя c^2) плотности потока энергии и пространственной плотности импульса системы (см. II §§ 32, 94). Поэтому последняя равна

$$\frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]. \tag{75,16}$$

Это обстоятельство должно быть, в частности, учтено при определении сил, действующих на диэлектрическое вещество в переменном электромагнитном поле. Силу $\mathbf{f}$ (отнесенную к единице объема) можно вычислять по тензору напряжений σ_{ik} как

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}.$$

При этом, однако, необходимо учесть, что σ_{ik} есть плотность потока импульса, который идет на изменение импульса как вещества, так и электромагнитного поля. Если понимать под $\mathbf{f}$ силу, действующую лишь на среду, то из написанного выражения надо вычесть изменение импульса единицы объема поля:

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]_i. \tag{75,17}$$

В постоянном поле последний член равен нулю, и потому этот вопрос раньше не возникал.

Медленность изменения поля позволяет воспользоваться для тензора напряжений прежними выражениями, полученными для постоянного поля. Так, для жидкой диэлектрической среды σ_{ik} дается суммой электрической (15,9) и магнитной (35,2) частей.

Но при дифференцировании этих выражений по координатам надо учесть, что вместо уравнений $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$, $\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$ для постоянного поля (в отсутствие токов) мы имеем теперь уравнения (75,12). Это приводит к появлению новых членов

$$-\frac{\varepsilon}{4\pi}[\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}] - \frac{\mu}{4\pi}[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}],$$

которые теперь равны не нулю, а

$$\frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}[\mathbf{E}\dot{\mathbf{H}}] - \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}[\mathbf{H}\dot{\mathbf{E}}] = \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}].$$

Таким образом, искомая сила:

$$\mathbf{f} = -\nabla P_0(\rho, T) - \frac{E^2}{8\pi}\nabla\varepsilon - \frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu + \\ + \nabla\left[\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \frac{E^2}{8\pi} + \rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T \frac{H^2}{8\pi}\right] + \frac{\varepsilon\mu-1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}]. \tag{75,18}$$

Последний член в этом выражении называют *силой Абрагама* (*M. Abraham*, 1909).

§ 76. Электродинамика движущихся диэлектриков

Движение среды приводит к возникновению явлений взаимного влияния электрических и магнитных полей. Для проводников эти явления были рассмотрены в § 63, теперь же мы обратимся к изучению этого вопроса для диэлектриков. При этом фактически идет речь о явлениях, возникающих в движущихся телах при наличии внешнего электрического или магнитного полей. Подчеркнем, что они не имеют ничего общего с явлениями возникновения полей в результате самого движения тел (которые рассматривались в §§ 36, 64).

Отправным пунктом в § 63 являлись формулы преобразования поля при переходе от одной системы отсчета к другой. При этом нам было достаточно знать обычные формулы преобразования электрической и магнитной напряженности поля в пустоте, усреднение которых непосредственно дает формулы преобразования **E** и **B**. В диэлектриках вопрос значительно более сложен, в связи с наличием большего числа величин, описывающих электромагнитное поле.

При движении макроскопических тел речь идет обычно о скоростях, малых по сравнению со скоростью света. Однако получить соответствующие приближенные формулы преобразования проще всего на основе точных релятивистских формул, справедливых при любых скоростях.

Как известно, в электродинамике поля в пустоте компоненты векторов **e** и **h** электрической и магнитной напряженности в действительности являются компонентами антисимметрического четырехмерного тензора (4-тензора) второго ранга (см. II § 23). Поскольку **E** и **B** являются средними значениями **e** и **h**, то же самое относится и к ним. Таким образом, имеется 4-тензор $F_{\mu\nu}$ со следующими компонентами [1]):

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{76,1}$$

С помощью этого тензора первая пара уравнений Максвелла

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{76,2}$$

может быть написана в четырехмерном виде как

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}}=0. \tag{76,3}$$

---

[1]) В этом параграфе четырехмерные тензорные индексы, пробегающие значения 0, 1, 2, 3, обозначаются греческими буквами λ, μ, ν.

Тем самым выявляется релятивистская инвариантность этих уравнений. Подчеркнем, что сама по себе применимость уравнений (76,2) к движущимся телам очевидна, поскольку эти уравнения получаются непосредственно путем замены $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ в точных микроскопических уравнениях Максвелла их усредненными значениями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

Но и вторая пара уравнений Максвелла,

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \tag{76,4}$$

тоже сохраняет свой формальный вид и в движущихся средах. Это очевидно из приведенных в предыдущем параграфе рассуждений, в которых были использованы лишь такие общие свойства тел (например, равенство нулю полного заряда), которыми движущиеся тела обладают в той же степени, как и неподвижные. При этом, однако, связи величин $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ с величинами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ уже отнюдь не должны совпадать с теми, которые имеют место в неподвижных средах.

Будучи справедливыми как для неподвижных, так и для движущихся тел, уравнения (76,4) должны сохранять свой вид при преобразовании Лоренца. Для поля в пустоте векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ совпадают с $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и релятивистская инвариантность второй пары уравнений Максвелла проявляется в том, что и они могут быть написаны в четырехмерном виде с помощью того же тензора $F_{\lambda\mu}$: $\partial F^{\lambda\mu}/\partial x^{\mu}=0$ (см. II § 30). Поэтому ясно, что для обеспечения релятивистской инвариантности уравнений (76,4) необходимо, чтобы компоненты векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ в действительности преобразовывались как компоненты 4-тензора, построенного аналогично тензору $F_{\mu\nu}$; обозначим этот тензор как $H_{\mu\nu}$:

$$H_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & -H_z & H_y \\ -D_y & H_z & 0 & -H_x \\ -D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad H^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{76,5}$$

С его помощью уравнения (76,4) записываются в виде

$$\frac{\partial H^{\lambda\mu}}{\partial x^{\mu}}=0. \tag{76,6}$$

Выяснив четырехмерный тензорный характер величин $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, мы тем самым узнали закон их преобразования при переходе от одной системы отсчета к другой. Нас, однако, интересует здесь не столько закон этого преобразования, сколько связь между этими величинами в движущейся среде, обобщающая соотношения $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, справедливые в неподвижных телах.

Обозначим посредством u^μ 4-вектор скорости среды; его компоненты связаны с трехмерной скоростью $\mathbf{v}$ посредством

$$u^\mu=\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

Составим из этого 4-вектора и 4-тензоров $F^{\mu\nu}$ и $H^{\mu\nu}$ такие комбинации, которые в неподвижной среде переходят в $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$. Таковыми являются 4-векторы $F^{\lambda\mu}u_\mu$, $H^{\lambda\mu}u_\mu$; при $\mathbf{v}=0$ их временные компоненты обращаются в нуль, а пространственные — соответственно в $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$. Поэтому ясно, что четырехмерным обобщением равенства $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ является [1])

$$H^{\lambda\mu}u_\mu=\varepsilon F^{\lambda\mu}u_\mu. \tag{76,7}$$

Аналогичным образом убеждаемся в том, что обобщением соотношения $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ является четырехмерное равенство

$$F_{\lambda\mu}u_\nu+F_{\mu\nu}u_\lambda+F_{\nu\lambda}u_\mu=\mu\,(H_{\lambda\mu}u_\nu+H_{\mu\nu}u_\lambda+H_{\nu\lambda}u_\mu). \tag{76,8}$$

Переходя от четырехмерных обозначений снова к трехмерным величинам, получим из этих двух уравнений векторные соотношения [2]):

$$\begin{gathered}\mathbf{D}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]=\varepsilon\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right),\\ \mathbf{B}+\frac{1}{c}[\mathbf{Ev}]=\mu\left(\mathbf{H}+\frac{1}{c}[\mathbf{Dv}]\right).\end{gathered} \tag{76,9}$$

Эти формулы, полученные Минковским (*H. Minkowski*, 1908), являются точными в том смысле, что еще не сделано никаких предположений о величине скорости. Считая же отношение v/c малым и решая эти уравнения относительно $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ с точностью до членов первого порядка, получим

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+\frac{\varepsilon\mu-1}{c}[\mathbf{vH}], \tag{76,10}$$

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}+\frac{\varepsilon\mu-1}{c}[\mathbf{Ev}]. \tag{76,11}$$

Эти формулы, вместе с уравнениями Максвелла (76,2) и (76,4), составляют основу электродинамики движущихся диэлектриков.

Граничные условия к уравнениям Максвелла тоже претерпевают некоторое изменение. Из уравнений $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$, $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ по-прежнему следуют условия непрерывности нормальных компонент индукции:

$$D_{n1}=D_{n2},\quad B_{n1}=B_{n2}. \tag{76,12}$$

---

[1]) Следует заметить, что, написав соотношения, содержащие лишь местное значение скорости, мы тем самым пренебрегаем слабыми эффектами, связанными с возможностью существования градиента скорости (например, гиромагнитными эффектами; см. § 36).

[2]) Если какое-либо из соотношений $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ или $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ в неподвижной среде не имеет места, то и соответствующее из соотношений (76,9) заменяется другой функциональной зависимостью между двумя векторными суммами, стоящими в обеих сторонах равенства.

Условия же для тангенциальных компонент поля проще всего можно получить путем перехода от неподвижной системы отсчета K к новой системе K', движущейся вместе с данным элементом поверхности тела; скорость последнего (направленную вдоль нормали $\mathbf{n}$) обозначим как v_n. В системе K' справедливы обычные условия непрерывности $\mathbf{E}'_t$ и $\mathbf{H}'_t$. Согласно релятивистским формулам преобразования (см. II § 24), эти требования эквивалентны условию непрерывности тангенциальных компонент векторов

$$\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}], \quad \mathbf{H}-\frac{1}{c}[\mathbf{vD}].$$

Проецируя их на плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{n}$, и учитывая равенства (76,12), получим искомые граничные условия:

$$\begin{aligned} [\mathbf{n},\ \mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1] &= \frac{v_n}{c}(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1), \\ [\mathbf{n},\ \mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1] &= -\frac{v_n}{c}(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1). \end{aligned} \qquad (76,13)$$

Если подставить сюда выражения (76,10—11) и пренебречь членами высшего порядка по v/c, то мы получим

$$\begin{aligned} [\mathbf{n},\ \mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1] &= \frac{v_n}{c}(\mu_2-\mu_1)\,\mathbf{H}_t, \\ [\mathbf{n},\ \mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1] &= -\frac{v_n}{c}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\,\mathbf{E}_t. \end{aligned} \qquad (76,14)$$

В этом приближении в правой стороне равенств можно не различать значения $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ на обеих сторонах поверхности раздела.

Если тело движется так, что его поверхность не смещается в перпендикулярном к самой себе направлении (например, при поворачивании тела вращения вокруг оси), то $v_n=0$. Только в этом случае граничные условия (76,13) или (76,14) сводятся к обычным условиям непрерывности $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{H}_t$.

Задачи

1. Диэлектрический шар равномерно вращается (в пустоте) в однородном постоянном магнитном поле $\mathfrak{H}$. Определить возникающее вокруг шара электрическое поле.

Решение. При вычислении возникающего электрического поля магнитное поле надо принимать таким же, как при неподвижном шаре, так как учет обратного влияния изменения магнитного поля привел бы к поправкам более высокого порядка малости. Внутри шара магнитное поле однородно и равно

$$\mathbf{H}^{(i)}=\frac{3}{2+\mu}\mathfrak{H}$$

(ср. (8,2)).

Ввиду стационарности вращения возникающее электрическое поле постоянно и, как всякое постоянное электрическое поле, обладает потенциалом: $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$. Вне шара потенциал удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi^{(e)}=0$, а внутри шара — уравнению

$$\Delta\varphi^{(i)}=2\frac{\varepsilon\mu-1}{c\varepsilon}\,\mathbf{\Omega}\mathbf{H}^{(i)}, \tag{1}$$

где $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращения (это уравнение получается из $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$ подстановкой для $\mathbf{D}$ выражения (76,10) с $\mathbf{v}=[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]$). Условие непрерывности нормальной составляющей $\mathbf{D}$ на поверхности шара гласит:

$$-\varepsilon\left.\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial r}\right|_{r=a}+\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\,a\left\{\mathbf{\Omega}\mathbf{H}^{(i)}-(\mathbf{\Omega}\mathbf{n})\left(\mathbf{H}^{(i)}\mathbf{n}\right)\right\}=-\left.\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial r}\right|_{r=a} \tag{2}$$

(a — радиус шара, $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$).

Ввиду симметрии шара искомое электрическое поле определяется всего двумя постоянными векторами: $\mathbf{\Omega}$ и $\mathfrak{H}$. Из их компонент можно составить линейным по $\mathfrak{H}$ и $\mathbf{\Omega}$ образом скаляр $\mathfrak{H}\mathbf{\Omega}$ и тензор

$$\mathfrak{H}_i\Omega_k+\mathfrak{H}_k\Omega_i-\frac{2}{3}\delta_{ik}\mathfrak{H}\mathbf{\Omega}$$

с равной нулю суммой диагональных членов. Соответственно этому ищем потенциал поля вне шара в виде

$$\varphi^{(e)}=\frac{1}{6}D_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{2}D_{ik}\frac{n_in_k}{r^3}, \tag{3}$$

где D_{ik} — постоянный тензор (причем $D_{ii}=0$); D_{ik} есть тензор квадрупольного электрического момента шара (см. II § 41). Члена же вида const/r в $\varphi^{(e)}$ не может быть, так как он давал бы отличный от нуля полный поток электрического поля через поверхность, охватывающую шар (между тем как шар не заряжен). Потенциал поля внутри шара ищем в виде

$$\varphi^{(i)}=\frac{r^2}{2a^5}D_{ik}n_in_k+\frac{\varepsilon\mu-1}{3c\varepsilon}\,\mathbf{\Omega}\mathbf{H}^{(i)}\left(r^2-a^2\right). \tag{4}$$

Первый член есть решение однородного уравнения $\Delta\varphi=0$, а выбор коэффициента в нем обеспечивает непрерывность потенциала (а тем самым и $\mathbf{E}_t$) на поверхности шара. Подставляя (3) и (4) в (2), найдем

$$D_{ik}=-\frac{a^5}{c}\,\frac{3(\varepsilon\mu-1)}{(3+2\varepsilon)(2+\mu)}\left(\mathfrak{H}_i\Omega_k+\mathfrak{H}_k\Omega_i-\frac{2}{3}\delta_{ik}\mathfrak{H}\mathbf{\Omega}\right). \tag{5}$$

Таким образом, вокруг вращающегося шара возникает электрическое поле квадрупольного характера, причем квадрупольный момент шара дается формулой (5). В частности, если шар вращается вокруг направления внешнего поля (ось z), то D_{ik} имеет лишь диагональные компоненты

$$D_{zz}=-\frac{a^5}{c}\,\frac{4(\varepsilon\mu-1)}{(3+2\varepsilon)(2+\mu)}\,\mathfrak{H}\mathbf{\Omega},\qquad D_{xx}=D_{yy}=-\frac{1}{2}D_{zz}.$$

Аналогично, вокруг шара, вращающегося в однородном электрическом поле, возникает квадрупольное магнитное поле. Квадрупольный магнитный момент шара дается при этом формулой, получающейся из (5) изменением знака и заменой ε, μ, $\mathfrak{H}$ соответственно на μ, ε, $\mathfrak{E}$.

2. Намагниченный шар равномерно вращается (в пустоте) вокруг своей оси, параллельной направлению намагничения. Определить возникающее вокруг шара электрическое поле [1]).

[1]) Если направления намагниченности и оси вращения не совпадают, то постановка задачи существенно меняется, так как возникает излучение электромагнитных волн от шара в окружающее пространство.

Решение. Магнитное поле внутри шара однородно и выражается через постоянную намагниченность $\mathbf{M}$ согласно уравнениям $\mathbf{B}^{(i)}+2\mathbf{H}^{(i)}=0$ (ср. (8,1)) и $\mathbf{B}^{(i)}-\mathbf{H}^{(i)}=4\pi\mathbf{M}$, откуда

$$\mathbf{B}^{(i)}=\frac{8\pi\mathbf{M}}{3}, \quad \mathbf{H}^{(i)}=-\frac{4\pi\mathbf{M}}{3}.$$

Вторая из формул (76,9) в данном случае не имеет места (ввиду несправедливости формулы $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ для неподвижного ферромагнетика), а из первой имеем внутри шара

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+\frac{\varepsilon}{c}[\mathbf{vB}]-\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]=\varepsilon\mathbf{E}+\frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{3c}[\mathbf{vM}].$$

Потенциал возникающего электрического поля вне шара удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi^{(e)}=0$, а внутри шара

$$\Delta\varphi^{(i)}=\frac{8\pi(2\varepsilon+1)}{3c\varepsilon}M\Omega.$$

Граничное условие непрерывности D_n на поверхности шара:

$$-\varepsilon\left.\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial r}\right|_{r=a}+\frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{3c}a\Omega M\sin^2\theta=-\left.\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial r}\right|_{r=a},$$

где θ — угол между нормалью $\mathbf{n}$ и направлением $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{M}$ (ось z). Ищем $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(i)}$ в виде

$$\varphi^{(e)}=\frac{D_{ik}n_in_k}{2r^3}=\frac{D_{zz}}{4r^3}(3\cos^2\theta-1),$$

$$\varphi^{(i)}=\frac{r^2}{4a^5}D_{zz}(3\cos^2\theta-1)+\frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{9c\varepsilon}M\Omega(r^2-a^2)$$

и из граничного условия получаем следующее выражение для квадрупольного электрического момента, возникающего у вращающегося шара:

$$D_{zz}=-\frac{4(2\varepsilon+1)}{3c(2\varepsilon+3)}a^2\Omega\mathcal{M}, \quad D_{xx}=D_{yy}=-\frac{1}{2}D_{zz}$$

($\mathcal{M}$ — полный магнитный момент шара). Для металлического шара надо положить $\varepsilon\to\infty$ и тогда

$$D_{zz}=-\frac{4}{3c}\Omega\mathcal{M}a^2.$$

§ 77. Дисперсия диэлектрической проницаемости

Мы переходим теперь к изучению важнейшего вопроса о быстропеременных электромагнитных полях, частóты которых не ограничены условием малости по сравнению с частотами, характерными для установления электрической и магнитной поляризации вещества.

Переменное во времени электромагнитное поле необходимо является переменным также и в пространстве. При частоте ω пространственная периодичность определяется длиной волны, порядок величины которой $\lambda\sim c/\omega$. При дальнейшем увеличении частоты λ становится в конце концов сравнимой с атомными размерами a. В таких условиях становится невозможным макроскопическое описание поля.