Решение. Магнитное поле внутри шара однородно и выражается через постоянную намагниченность $\mathbf{M}$ согласно уравнениям $\mathbf{B}^{(i)}+2\mathbf{H}^{(i)}=0$ (ср. (8,1)) и $\mathbf{B}^{(i)}-\mathbf{H}^{(i)}=4\pi\mathbf{M}$, откуда

$$\mathbf{B}^{(i)}=\frac{8\pi\mathbf{M}}{3}, \qquad \mathbf{H}^{(i)}=-\frac{4\pi\mathbf{M}}{3}.$$

Вторая из формул (76,9) в данном случае не имеет места (ввиду несправедливости формулы $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ для неподвижного ферромагнетика), а из первой имеем внутри шара

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+\frac{\varepsilon}{c}[\mathbf{vB}]-\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]=\varepsilon\mathbf{E}+\frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{3c}[\mathbf{vM}].$$

Потенциал возникающего электрического поля вне шара удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi^{(e)}=0$, а внутри шара

$$\Delta\varphi^{(i)}=\frac{8\pi(2\varepsilon+1)}{3c\varepsilon}M\Omega.$$

Граничное условие непрерывности D_n на поверхности шара:

$$-\varepsilon\left.\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial r}\right|_{r=a}+\frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{3c}a\Omega M\sin^2\theta=-\left.\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial r}\right|_{r=a},$$

где θ — угол между нормалью $\mathbf{n}$ и направлением $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{M}$ (ось z). Ищем $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(i)}$ в виде

$$\varphi^{(e)}=\frac{D_{ik}n_in_k}{2r^3}=\frac{D_{zz}}{4r^3}(3\cos^2\theta-1),$$

$$\varphi^{(i)}=\frac{r^2}{4a^5}D_{zz}(3\cos^2\theta-1)+\frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{9c\varepsilon}M\Omega(r^2-a^2)$$

и из граничного условия получаем следующее выражение для квадрупольного электрического момента, возникающего у вращающегося шара:

$$D_{zz}=-\frac{4(2\varepsilon+1)}{3c(2\varepsilon+3)}a^2\Omega\mathcal{M}, \qquad D_{xx}=D_{yy}=-\frac{1}{2}D_{zz}$$

($\mathcal{M}$ — полный магнитный момент шара). Для металлического шара надо положить $\varepsilon\to\infty$ и тогда

$$D_{zz}=-\frac{4}{3c}\Omega\mathcal{M}a^2.$$

§ 77. Дисперсия диэлектрической проницаемости

Мы переходим теперь к изучению важнейшего вопроса о быстропеременных электромагнитных полях, частóты которых не ограничены условием малости по сравнению с частотами, характерными для установления электрической и магнитной поляризации вещества.

Переменное во времени электромагнитное поле необходимо является переменным также и в пространстве. При частоте ω пространственная периодичность определяется длиной волны, порядок величины которой $\lambda\sim c/\omega$. При дальнейшем увеличении частоты λ становится в конце концов сравнимой с атомными размерами a. В таких условиях становится невозможным макроскопическое описание поля.

В связи с этим может возникнуть вопрос о том, существует ли вообще область значений частот, в которой, с одной стороны, уже существенны дисперсионные явления, а с другой стороны, еще допустимо макроскопическое рассмотрение. Легко видеть, что такая область непременно должна существовать. Наиболее быстрый механизм установления электрической или магнитной поляризации в веществе — электронный. Его время релаксации — порядка величин атомных времен a/v, где a — атомные размеры, а v — электронные скорости в атоме. Но поскольку $v \ll c$, то даже соответствующая таким временам длина волны $\lambda \sim ac/v$ все еще велика по сравнению с a. Ниже мы предполагаем условие $\lambda \gg a$ выполненным[1]). Следует, однако, иметь в виду, что это условие может оказаться недостаточным: у металлов при низких температурах существует область частот, в которой макроскопическая теория неприменима, несмотря на выполнение неравенства $c/\omega \gg a$ (см. § 87).

Излагаемая ниже формальная теория в равной степени относится как к металлам, так и к диэлектрикам. При частотах же, соответствующих внутриатомным электронным движениям (оптические частоты) и более высоких, фактически исчезает даже количественное отличие в свойствах металлов и диэлектриков.

Уже из приведенных в § 75 рассуждений ясно, что формальный вид уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{77,1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{77,2}$$

остается таким же в произвольных переменных электромагнитных полях. Но эти уравнения в значительной стенени беспредметны до тех пор, пока не установлена связь между входящими в них величинами **D**, **B** и **E**, **H**. При рассматриваемых нами теперь больших частотах эта связь не имеет ничего общего с той, которая справедлива в статическом случае и которой мы пользовались в переменных полях при отсутствии дисперсии.

Прежде всего нарушается даже имевшееся ранее основное свойство этой связи — однозначная зависимость **D** и **B** от значений **E** и **H** в тот же момент времени. В общем случае произвольного переменного поля значения **D** и **B** в некоторый момент времени отнюдь не определяются одними только значениями **E** и **H** в тот же момент времени. Напротив, можно утверждать, что значения **D** и **B** в данный момент времени зависят, вообще говоря, от значений функций $\mathbf{E}(t)$, $\mathbf{H}(t)$ во все предыдущие моменты времени. Это обстоятельство является выражением того, что уста-

[1]) Эффекты, связанные с членами следующих порядков по малому отношению a/λ, будут рассмотрены в §§ 104—106.

новление электрической или магнитной поляризации вещества не успевает следовать за изменением электромагнитного поля. (При этом частоты, при которых возникают дисперсионные явления в электрических и магнитных свойствах вещества, могут быть совершенно различными.)

В этом параграфе мы будем говорить о зависимости **D** от **E**; специфические же особенности дисперсии магнитных свойств вещества будут обсуждены в § 79.

В § 6 вектор поляризации **P** был введен согласно определению $\bar{\rho}=-\operatorname{div}\mathbf{P}$, где ρ — истинная (микроскопическая) плотность зарядов в веществе. Это равенство выражало собой электрическую нейтральность тела в целом, и его (вместе с условием $\mathbf{P}=0$ вне тела) было достаточно для того, чтобы показать, что полный электрический момент тела равен интегралу $\int \mathbf{P}\,dV$. Очевидно, что этот вывод относится к переменным полям в той же степени, как и к постоянным. Таким образом, в любом переменном поле, в том числе при наличии дисперсии, вектор $\mathbf{P}=(\mathbf{D}-\mathbf{E})/4\pi$ сохраняет свой физический смысл электрического момента единицы объема вещества.

В быстропеременных полях обычно приходится иметь дело со сравнительно малыми напряженностями, тогда связь **D** с **E** можно считать линейной[1]). Наиболее общий вид линейной зависимости между $\mathbf{D}(t)$ и значениями функции $\mathbf{E}(t)$ во все предыдущие моменты времени может быть написан в виде интегрального соотношения

$$\mathbf{D}(t)=\mathbf{E}(t)+\int_0^\infty f(\tau)\,\mathbf{E}(t-\tau)\,d\tau \qquad (77,3)$$

(выделение члена $\mathbf{E}(t)$ удобно по причинам, которые выяснятся в дальнейшем). Здесь $f(\tau)$ — функция времени, зависящая от свойств среды. По аналогии с электростатической формулой $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ будем писать соотношение (77,3) в символической форме

$$\mathbf{D}=\hat{\varepsilon}\mathbf{E},$$

где $\hat{\varepsilon}$ — линейный интегральный оператор, действие которого определяется согласно (77,3).

---

[1]) Мы подразумеваем здесь, что **D** зависит линейно только от **E**, но не от **H**. В постоянном поле линейная зависимость **D** от **H** исключается требованием инвариантности по отношению к изменению знака времени. В переменном поле это условие уже не имеет места и линейная зависимость **D** от **H** оказывается возможной при определенных типах симметрии вещества. Она относится, однако, к тем самым малым эффектам $\sim a/\lambda$, которые были упомянуты в примечании на предыдущей странице.

Всякое переменное поле может быть сведено (путем разложения Фурье) к совокупности монохроматических компонент, в которых зависимость всех величин от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$. Для таких полей связь (77,3) между **D** и **E** приобретает вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}, \tag{77,4}$$

где функция $\varepsilon(\omega)$ определяется как

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \tag{77,5}$$

Таким образом, для периодических полей может быть введено понятие о диэлектрической проницаемости как о коэффициенте пропорциональности между **D** и **E**, причем, однако, этот коэффициент зависит не только от свойств среды, но и от частоты поля. О зависимости ε от частоты говорят как о законе ее *дисперсии*.

Функция $\varepsilon(\omega)$, вообще говоря, комплексна. Будем обозначать ее вещественную и мнимую части как ε' и ε'':

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega). \tag{77,6}$$

Из определения (77,5) непосредственно видно, что

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega). \tag{77,7}$$

Отделяя в этом соотношении вещественную и мнимую части, получим

$$\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega), \quad \varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega). \tag{77,8}$$

Таким образом, $\varepsilon'(\omega)$ является четной, а $\varepsilon''(\omega)$ — нечетной функцией частоты.

При малых (по сравнению с границей начала дисперсии) частотах функцию $\varepsilon(\omega)$ можно разложить в ряд по степеням ω. Разложение четной функции $\varepsilon'(\omega)$ содержит члены лишь четных степеней, а разложение нечетной функции $\varepsilon''(\omega)$ — члены нечетных степеней. В пределе $\omega \to 0$ функция $\varepsilon(\omega)$ в диэлектриках стремится, разумеется, к электростатической диэлектрической проницаемости (которую обозначим здесь как ε_0). Поэтому в диэлектриках разложение $\varepsilon'(\omega)$ начинается с постоянного члена ε_0; разложение же $\varepsilon''(\omega)$ начинается, вообще говоря, с члена, пропорционального ω.

Функцию $\varepsilon(\omega)$ при малых частотах можно рассматривать и в металлах, если условиться определять ее так, чтобы в пределе $\omega \to 0$ уравнение

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

переходило бы в уравнение

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}$$

для постоянного поля в проводниках. Сравнив оба уравнения, мы видим, что при $\omega \to 0$ производная $\partial\mathbf{D}/\partial t$ должна переходить в $4\pi\sigma\mathbf{E}$. Но в периодическом поле $\partial\mathbf{D}/\partial t = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}$, и мы приходим к следующему предельному выражению для $\varepsilon(\omega)$ при малых частотах:

$$\varepsilon(\omega) = i\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \tag{77,9}$$

Таким образом, в проводниках разложение функции $\varepsilon(\omega)$ начинается с мнимого члена, пропорционального $1/\omega$, который выражается через обычную проводимость σ по отношению к постоянным токам[1]). Следующий член разложения $\varepsilon(\omega)$ является вещественной постоянной. Эта постоянная, однако, не имеет у металлов того электростатического смысла, которым она обладает у диэлектриков[2]). Кроме того, надо снова указать, что этот член разложения может оказаться не имеющим никакого вообще смысла, если эффекты пространственной неоднородности поля электромагнитной волны появляются раньше, чем эффекты его временно́й периодичности.

§ 78. Диэлектрическая проницаемость при очень больших частотах

В пределе $\omega \to \infty$ функция $\varepsilon(\omega)$ стремится к единице. Это очевидно уже из простых физических соображений: при достаточно быстром изменении поля процессы поляризации, приводящие к установлению отличной от $\mathbf{E}$ индукции $\mathbf{D}$, вообще не успевают происходить.

Оказывается возможным установить справедливый для любых тел (безразлично — металлов или диэлектриков) предельный вид функции $\varepsilon(\omega)$ при больших частотах. Именно, частота поля должна быть велика по сравнению с частотами движения всех (или, по крайней мере, большинства) электронов в атомах данного вещества. При соблюдении этого условия можно при вычислении поляризации вещества рассматривать электроны как свободные, пренебрегая их взаимодействием друг с другом и с ядрами атомов.

Скорости v движения электронов в атомах малы по сравнению со скоростью света. Поэтому расстояния v/ω, проходимые ими в течение периода волны, малы по сравнению с длиной волны c/ω. Ввиду этого при определении скорости, приобретаемой электро-

---

[1]) Иногда представляют мнимую часть функции $\varepsilon(\omega)$ при всех частотах в виде (77,9), что сводится к введению вместо $\varepsilon''(\omega)$ новой функции $\sigma(\omega)$; этим переобозначением исчерпывается физический смысл этой функции.

[2]) Во избежание недоразумений обратим внимание на некоторое изменение обозначений по сравнению с § 75. В уравнении (75,10) для плохих проводников величиной $\varepsilon(\omega)$ является сумма $4\pi i\sigma/\omega + \varepsilon$.

ном в поле электромагнитной волны, можно считать последнее однородным.

Уравнение движения гласит:

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt}=e\mathbf{E}=e\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}$$

(e, m — заряд и масса электрона, $\mathbf{v}'$ — дополнительная скорость, приобретаемая электроном в поле волны); отсюда $\mathbf{v}'=ie\mathbf{E}/m\omega$. Смещение же $\mathbf{r}$ электрона под влиянием поля связано с $\mathbf{v}'$ посредством $\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{v}'$; поэтому $\mathbf{r}=-e\mathbf{E}/m\omega^2$. Поляризация $\mathbf{P}$ вещества есть дипольный момент единицы его объема. Суммируя по всем электронам, находим

$$\mathbf{P}=\sum e\mathbf{r}=-\frac{e^2}{m\omega^2}N\mathbf{E},$$

где N — число электронов во всех атомах единицы объема вещества. С другой стороны, по определению электрической индукции, $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$. Поэтому окончательно получаем следующую формулу:

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}. \tag{78,1}$$

Фактическая область применимости этой формулы начинается от далекого ультрафиолета у самых легких элементов или от рентгеновских частот у более тяжелых элементов.

Для сохранения у величины $\varepsilon(\omega)$ буквального смысла, с которым она входит в уравнения Максвелла, частота должна еще удовлетворять условию $\omega\ll c/a$. Мы, однако, увидим в дальнейшем (§ 124), что выражению (78,1) может быть приписан определенный физический смысл и при бóльших частотах.

§ 79. Дисперсия магнитной проницаемости

В отличие от $\varepsilon(\omega)$ магнитная проницаемость $\mu(\omega)$ при увеличении частоты сравнительно рано теряет свой физический смысл; учет отличия $\mu(\omega)$ от 1 при таких частотах был бы незаконным уточнением. Чтобы показать это, проанализируем, в какой мере сохраняется в переменном поле физический смысл величины $\mathbf{M}=(\mathbf{B}-\mathbf{H})/4\pi$ как магнитного момента единицы объема. Магнитный момент тела есть, по определению, интеграл

$$\frac{1}{2c}\int[\mathbf{r}\cdot\overline{\rho\mathbf{v}}]\,dV. \tag{79,1}$$

Среднее значение микроскопической плотности тока связано со средним полем уравнением (75,7):

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{79,2}$$

Вычитая из него почленно уравнение

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

получим

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \tag{79,3}$$

Между тем, интеграл (79,1) может быть приведен к виду $\int \mathbf{M}\, dV$ лишь при условии $\overline{\rho \mathbf{v}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ (и $\mathbf{M} = 0$ вне тела), как это было показано в § 29.

Таким образом, физический смысл величины $\mathbf{M}$ (а с нею и магнитной восприимчивости) связан с возможностью пренебрежения членом $\partial \mathbf{P}/\partial t$ в формуле (79,3). Выясним, в какой мере могут быть осуществлены условия, допускающие такое пренебрежение.

При заданной частоте наиболее благоприятные условия для измерения восприимчивости требуют по возможности малых размеров тела (для увеличения пространственных производных в $\operatorname{rot} \mathbf{M}$) и по возможности слабого электрического поля (для уменьшения $\mathbf{P}$). Поле электромагнитной волны не удовлетворяет последнему условию, так как в нем $E \sim H$. Поэтому рассмотрим переменное магнитное поле, скажем, в соленоиде, причем исследуемое тело помещено на его оси. Электрическое поле возникает только в результате индукции от переменного магнитного поля. Порядок величины его напряженности внутри тела можно получить путем оценки обеих сторон уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

откуда $E/l \sim \omega H/c$ или $E \sim (\omega l/c) H$, где l — размеры тела. Полагая $\varepsilon - 1 \sim 1$, будем иметь

$$\frac{\partial P}{\partial t} \sim \omega E \sim \frac{\omega^2 l}{c} H.$$

Для пространственных же производных магнитного момента $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ имеем

$$c \operatorname{rot} \mathbf{M} \sim \frac{c}{l} \chi \mathbf{H}.$$

Сравнив оба выражения, найдем, что первое мало́ по сравнению со вторым, если

$$l^2 \ll \chi c^2/\omega^2. \tag{79,4}$$

Ясно, что понятие о магнитной восприимчивости может иметь смысл, лишь если это неравенство допускает (хотя бы с не очень большим запасом) макроскопические размеры тела, т. е. если оно совместимо с неравенством $l \gg a$, где a — атомные размеры. Это условие заведомо нарушается уже в области оптических частот. Действительно, магнитная восприимчивость при этих частотах является величиной $\sim v^2/c^2$ [1]) (v — электронные скорости в атоме); сами же оптические частоты $\omega \sim v/a$ и потому правая сторона неравенства (79,4) $\sim a^2$.

Таким образом, не имеет смысла пользоваться магнитной проницаемостью уже начиная с оптической области частот, и при рассмотрении соответствующих явлений надо полагать $\mu = 1$. Учет отличия между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в этой области был бы явным превышением точности. Фактически же учет отличия μ от 1 является превышением точности для большинства явлений уже при частотах, гораздо более низких, чем оптические [2]).

Наличие существенной дисперсии магнитной проницаемости приводит к возможности существования квазистационарных колебаний намагниченности в ферромагнитных телах; чтобы исключить возможное влияние проводимости вещества, будем ниже иметь в виду неметаллические ферромагнетики — ферриты.

Квазистационарность означает, как всегда (§ 58), что частота предполагается удовлетворяющей условию $\omega \ll c/l$, где l — характерные размеры тела (или «длина волны» колебаний). Кроме того, будем пренебрегать обменной энергией, связанной с возникающей при колебаниях неоднородностью распределения намагниченности (другими словами, предполагается несущественной пространственная дисперсия — см. § 103 — магнитной проницаемости). Для этого размеры l должны быть велики по сравнению с длиной, характерной для энергии неоднородности:

$$l \gg \sqrt{\alpha},$$

где α — порядок величины коэффициентов в выражении (43,1).

Представим $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ в виде $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$, где $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{B}_0$ — напряженность и индукция в статически намагниченном теле, $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{B}'$ — переменные части напряженности и индукции при колебаниях. При пренебрежении током смещения последние удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}' = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}' = 0, \tag{79,5}$$

отличающимся от уравнений магнитостатики лишь тем, что магнитная проницаемость теперь (для монохроматического поля, $\propto e^{-i\omega t}$) — функция частоты, а не постоянная [3]). Ферромагнитная

[1]) Эта оценка соответствует диамагнитной восприимчивости; времена релаксации каких-либо пара- или ферромагнитных процессов заведомо велики по сравнению с оптическими периодами. Подчеркнем, однако, что оценки произведены для изотропного тела и к ферромагнетикам их надо применять с осторожностью. В частности, медленно (как $1/\omega$) убывающие с увеличением частоты гиротропные члены в тензоре μ_{ik} (см. задачу 1) могут оказаться существенными и при достаточно высоких частотах.

[2]) С несколько другой точки зрения это обстоятельство обсуждается ниже в § 103 — см. примечание на стр. 493.

[3]) Рассматриваемые колебания называют поэтому *магнитостатическими*. Теория однородных (см. ниже) магнитостатических колебаний дана *Киттелем* (*Ch. Kittel*, 1947), а неоднородных — *Уокером* (*L. Walker*, 1957).

среда магнитно анизотропна и потому ее проницаемость — тензор $\mu_{ik}(\omega)$; им определяется линейная связь между переменными частями индукции и напряженности.

В силу первого из уравнений (79,5) магнитное поле потенциально: $\mathbf{H}' = -\nabla\psi$. Подставив затем

$$B'_i = \mu_{ik} H'_k = -\mu_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$$

во второе уравнение, получим уравнение для потенциала внутри тела:

$$\mu_{ik}(\omega) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \tag{79,6}$$

Вне тела потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi = 0$, а на границе тела обычным образом должны быть непрерывны $\mathbf{H}'_t$ и B'_n. Первое условие сводится к непрерывности самого потенциала ψ, а второе означает непрерывность выражения

$$\mu_{ik} n_i \frac{\partial \psi}{\partial x_k},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности тела. Вдали от тела должно быть $\psi \to 0$.

Сформулированная таким образом задача имеет нетривиальные решения лишь при определенных значениях величин μ_{ik}, рассматриваемых как параметры. Приравняв же функции $\mu_{ik}(\omega)$ этим значениям, найдем частоты собственных колебаний намагниченности тела; их называют частотами *неоднородного ферромагнитного резонанса.*

Простейший вид магнитостатических колебаний однородно намагниченного эллипсоида — колебания, не нарушающие однородности; намагниченность эллипсоида колеблется как целое. Нахождение их частот не требует нового решения уравнений поля и может быть осуществлено непосредственно с помощью соотношений (29,14):

$$H_i + n_{ik}(B_k - H_k) = \mathfrak{H}_i, \tag{79,7}$$

где n_{ik} — тензор коэффициентов размагничивания эллипсоида, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ относятся к полю внутри эллипсоида, а $\mathfrak{H}$ — внешнее магнитное поле. Последнее предполагается однородным, а в $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ снова выделяем колеблющиеся части $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{B}'$ — на этот раз однородные по объему тела. Для них получаем соотношение

$$H'_i + n_{ik}(B'_k - H'_k) = 0$$

или

$$(\delta_{ik} + 4\pi n_{il} \chi_{lk}) H'_k = 0,$$

где введен тензор магнитной восприимчивости $\chi_{ik}(\omega)$ согласно определению $\mu_{ik}=\delta_{ik}+4\pi\chi_{ik}$. Приравняв нулю определитель этой системы однородных линейных уравнений, получим уравнение

$$\det|\delta_{ik}+4\pi n_i n_l\chi_{lk}(\omega)|=0, \tag{79,8}$$

корни которого определяют частоты собственных колебаний. Их называют частотами *однородного ферромагнитного резонанса.*

Задачи

1. В рамках макроскопического уравнения движения магнитного момента (уравнение Ландау—Лифшица, см. IX (69,9)), в отсутствие диссипации, найти тензор магнитной проницаемости для однородно намагниченного одноосного ферромагнетика типа легкая ось (*Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, 1935).

Решение. Уравнение движения намагниченности в ферромагнетике:

$$\dot{\mathbf{M}}=\gamma[(\mathbf{H}+\beta M_z\mathbf{v})\,\mathbf{M}],$$

где $\gamma=g|e|/2mc$ (g—гиромагнитное отношение), $\beta>0$—коэффициент анизотропии, $\mathbf{v}$—орт оси легкого намагничения (ось z). Представим поле $\mathbf{H}$ в виде $\mathbf{H}=\mathbf{H}_0+\mathbf{H}'$, где $\mathbf{H}'$—малое переменное произвольно направленное поле, а $\mathbf{H}_0$—постоянное поле, которое будем считать направленным вдоль оси z[1]). Вместе с полем $\mathbf{H}'$ мала также и создаваемая им поперечная намагниченность M_x, M_y, а $M_z\approx M=\mathrm{const}$. Пренебрегая малыми величинами второго порядка, находим уравнения

$$-i\omega M_x=-\gamma(H_0+\beta M)\,M_y+\gamma MH'_y,$$
$$-i\omega M_y=\gamma(H_0+\beta M)\,M_x-\gamma MH'_x.$$

Определив отсюда M_x, M_y, найдем восприимчивость (как коэффициенты в соотношениях $M'_i=\chi_{ik}H'_k$), а по ней—проницаемость:

$$\begin{aligned}
&\mu_{xx}=\mu_{yy}=1-\frac{4\pi}{\beta}\frac{\omega_M(\omega_M+\omega_H)}{\omega^2-(\omega_M+\omega_H)^2}\equiv\mu, \qquad \mu_{zz}=1,\\
&\mu_{xy}=-\mu_{yx}=i\frac{4\pi}{\beta}\frac{\omega\omega_M}{\omega^2-(\omega_M+\omega_H)^2}, \qquad \mu_{xz}=\mu_{yz}=0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\omega_M=\gamma\beta M$, $\omega_H=\gamma H_0$. Обратим внимание на гиротропию ферромагнитной среды (определение этого понятия см. в § 101).

2. Найти частоты однородного ферромагнитного резонанса эллипсоида, одна из главных осей которого совпадает с осью легкого намагничения. В этом же направлении приложено внешнее поле (*Ch. Kittel*, 1947)[2]).

Решение. Внутри эллипсоида вдоль оси z (ось легкого намагничения) имеется поле

$$H_0=\mathfrak{H}-4\pi n^{(z)}M$$

($n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$—коэффициенты размагничивания вдоль главных осей эллипсоида). Простое вычисление определителя (79,8) приводит к уравнению

$$\frac{\omega^{(x)}\omega^{(y)}-\omega^2}{(\omega_M+\omega_H)^2-\omega^2}=0,$$

где

$$\omega^{(x)}=\gamma[M\beta+\mathfrak{H}+4\pi M(n^{(x)}-n^{(z)})],$$
$$\omega^{(y)}=\gamma[M\beta+\mathfrak{H}+4\pi M(n^{(y)}-n^{(z)})].$$

---

[1]) Это поле вводим здесь, имея в виду применение результатов в следующих задачах.

[2]) В задачах 2—4 предполагается, что магнитная проницаемость вещества дается формулами (1).

Отсюда для частоты однородного резонанса:

$$\omega = (\omega^{(x)}\omega^{(y)})^{1/2}.$$

Так, для шара имеем $n^{(x)} = n^{(y)} = n^{(z)} = 1/3$ и резонансная частота

$$\omega = \gamma(M\beta + \mathfrak{H}).$$

Для плоскопараллельной пластинки, поверхность которой перпендикулярна к оси легкого намагничения, имеем $n^{(x)} = n^{(y)} = 0$, $n^{(z)} = 1$, и резонансная частота

$$\omega = \gamma(M\beta + \mathfrak{H} - 4\pi M)$$

(пластинка намагничена, если $M\beta + \mathfrak{H} > 4\pi M$).

3. Найти закон дисперсии магнитостатических колебаний в неограниченной среде.

Решение. С тензором μ_{ik} из (1) уравнение (79,6) принимает вид

$$\mu\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0. \tag{2}$$

Положив $\psi \sim e^{i\mathbf{kr}}$, найдем

$$\mu(\omega) = -\operatorname{ctg}^2\theta,$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и осью легкого намагничения (осью z). С $\mu(\omega)$ из (1) ($\mathfrak{H} = 0$) получим частоту колебаний

$$\omega = \gamma M(\beta + 4\pi\sin^2\theta)^{1/2}.$$

Она зависит только от направления, но не от величины волнового вектора. Этот результат совпадает, как и должно быть, с предельным (при $k \to 0$) законом дисперсии спиновых волн в ферромагнетике (см. IX § 70).

4. Найти частоты неоднородного резонанса в неограниченной плоскопараллельной пластинке, поверхность которой перпендикулярна к оси легкого намагничения; вдоль этой же оси направлено внешнее поле $\mathfrak{H}$.

Решение. Надо найти решение уравнения (2) для потенциала $\psi^{(i)}$ внутри пластинки и уравнения $\Delta\psi^{(e)} = 0$ для потенциала вне пластинки с граничными условиями

$$\varphi^{(i)} = \varphi^{(e)}, \quad \frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial z} = \frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = \pm L/2,$$

$$\varphi^{(e)} \to 0 \quad \text{при} \quad |z| \to \infty$$

(ось z перпендикулярна к поверхности пластинки, плоскость $z = 0$ проходит через ее середину, $2L$ — толщина пластинки). Такое решение может быть четным или нечетным по z. В первом случае

$$\varphi^{(i)} = A\cos k_z z \cdot e^{ik_x x}, \quad \varphi^{(e)} = Be^{-k_x|z|}e^{ik_x x},$$

причем $\mu k_x^2 = -k_z^2$ (волновой вектор лежит в плоскости xz); граничные условия приводят к соотношению

$$\operatorname{tg} k_z L = k_x/k_z. \tag{3}$$

Во втором случае

$$\varphi^{(i)} = A\sin k_z z \cdot e^{ik_x x}, \quad \varphi^{(e)} = \pm Be^{-k_x|z|}e^{ik_x x},$$

и из граничных условий получаем

$$\operatorname{tg} k_z L = -k_z/k_x. \tag{4}$$

Размагничивающий коэффициент пластинки $n^{(z)} = 1$, так что размагничивающее поле: $-4\pi M$. С выражением $\mu(\omega)$ из (1) находим частоту колебаний:

$$\omega^2 = \gamma^2(M\beta + \mathfrak{H} - 4\pi M)(M\beta + \mathfrak{H} - 4\pi M\cos^2\theta), \tag{5}$$