где θ — угол между $\mathbf{k}$ и осью z. При каждом произвольном значении k_x имеется бесконечное множество дискретных значений k_z, определяемых условиями (3) и (4). Соответствующие частоты даются выражением (5) и зависят только от отношения k_x/k_z. Все возможные значения частоты лежат в интервале

$$\gamma(M\beta+\mathfrak{H}-4\pi M)\leqslant\omega\leqslant\gamma\left[(M\beta+\mathfrak{H}-4\pi M)(M\beta+\mathfrak{H})\right]^{1/2}.$$

При $k_z\longrightarrow 0$ возможны только симметричные колебания и из (3) видно, что $k_xL\sim(k_zL)^2$, т. е. является малой величиной второго порядка. Положив соответственно этому в (5) $\theta=0$, найдем частоту, совпадающую, как и должно быть, с частотой однородного резонанса.

§ 80. Энергия поля в диспергирующих средах

Формула

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] \tag{80,1}$$

для плотности потока энергии остается справедливой в любых переменных электромагнитных полях, в том числе и при наличии дисперсии. Это вполне очевидно из указанных уже в конце § 30 соображений: ввиду непрерывности тангенциальных составляющих $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ формула (80,1) однозначно следует из условия непрерывности нормальной составляющей $\mathbf{S}$ на границе тела и из того, что она справедлива в пустоте вне тела.

Изменение (в 1 с) энергии, сосредоточенной в единице объема тела, вычисляется как $\operatorname{div}\mathbf{S}$. С помощью уравнений Максвелла это выражение приводится к виду

$$-\operatorname{div}\mathbf{S}=\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) \tag{80,2}$$

(см. (75,15)). В диэлектрической среде в отсутствие дисперсии, когда ε и μ являются вещественными постоянными величинами, эту величину можно рассматривать как изменение электромагнитной энергии

$$U=\frac{1}{8\pi}(\varepsilon\mathbf{E}^2+\mu\mathbf{H}^2), \tag{80,3}$$

имеющей точный термодинамический смысл: это есть разность между внутренней энергией 1 см^3 вещества при наличии поля и энергией в отсутствие поля при тех же плотности и энтропии.

При наличии дисперсии такое простое толкование уже невозможно. Более того, в общем случае произвольной дисперсии оказывается невозможным какое-либо разумное определение электромагнитной энергии как термодинамической величины. Это обусловлено тем, что наличие дисперсии связано, вообще говоря, с одновременным наличием диссипации энергии: диспергирующая среда в то же время является поглощающей.

Для определения этой диссипации рассмотрим монохроматическое электромагнитное поле. Усреднив по времени величину (80,2), мы тем самым найдем систематический приток энергии (в единицу времени в единицу объема среды) от внешних источников, поддерживающих поле. Поскольку амплитуда монохроматического поля предполагается постоянной, вся эта энергия идет на покрытие ее диссипации. Таким образом, в рассматриваемых условиях усредненная по времени величина (80,2) и дает среднее количество тепла Q, выделяющегося в 1 с в 1 см^3 среды.

Поскольку выражение (80,2) квадратично по полю, то при его вычислении все величины должны быть написаны в вещественном виде. Если же понимать под $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, как это удобно для монохроматического поля, комплексные представления величин, то в (80,2) надо подставить для $\mathbf{E}$ и $\partial\mathbf{D}/\partial t$ соответственно выражения

$$^1/_2(\mathbf{E}+\mathbf{E}^*) \quad \text{и} \quad ^1/_2(-i\omega\varepsilon\mathbf{E}+i\omega\varepsilon^*\mathbf{E}^*)$$

и аналогично для $\mathbf{H}$ и $\partial\mathbf{B}/\partial t$. При усреднении по времени произведения $\mathbf{EE}$ и $\mathbf{E}^*\mathbf{E}^*$, содержащие множители $e^{\mp 2i\omega t}$, обращаются в нуль; остается:

$$Q=\frac{i\omega}{16\pi}\{(\varepsilon^*-\varepsilon)\mathbf{EE}^*+(\mu^*-\mu)\mathbf{HH}^*\}=\frac{\omega}{8\pi}(\varepsilon''|\mathbf{E}|^2+\mu''|\mathbf{H}|^2). \quad (80,4)$$

Это выражение можно написать также в виде

$$Q=\frac{\omega}{4\pi}(\varepsilon''\overline{\mathbf{E}^2}+\mu''\overline{\mathbf{H}^2}), \quad (80,5)$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — вещественные напряженности поля, а черта означает усреднение по времени (ср. примечание на стр. 284).

Легко получить также формулу, определяющую диссипацию энергии в немонохроматическом поле, достаточно быстро обращающемся в нуль при $t\to\pm\infty$. В этом случае имеет смысл рассматривать диссипацию не в единицу времени, а за все время существования поля.

Разложив поле $\mathbf{E}(t)$ в интеграл Фурье, пишем

$$\mathbf{E}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}, \qquad \frac{\partial\mathbf{D}(t)}{\partial t}=-i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi},$$

причем $\mathbf{E}_{-\omega}=\mathbf{E}^*_\omega$. Написав произведение этих величин в виде двойного интеграла и проинтегрировав затем по времени, имеем

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}dt=-\frac{i}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega\mathbf{E}_{\omega'}e^{-i(\omega+\omega')t}\frac{d\omega\,d\omega'}{(2\pi)^2}dt.$$

Интегрирование по t осуществляется формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega+\omega')t}dt=2\pi\,\delta(\omega+\omega'),$$

после чего δ-функция устраняется интегрированием по ω'. В результате получим

$$-\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\,\varepsilon(\omega)\,|\mathbf{E}_\omega|^2\frac{d\omega}{2\pi}.$$

После подстановки $\varepsilon=\varepsilon'+i\varepsilon''$ член с $\varepsilon'(\omega)$ обращается в нуль при интегрировании ввиду нечетности подынтегрального выражения как функции ω. Вместе с аналогичным выражением для магнитного поля окончательно находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q\,dt=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\left[\varepsilon''(\omega)\,|\mathbf{E}_\omega|^2+\mu''(\omega)\,|\mathbf{H}_\omega|^2\right]\frac{d\omega}{2\pi} \tag{80,6}$$

(интеграл от $-\infty$ до ∞ может быть заменен удвоенным интегралом от 0 до ∞).

Полученные формулы показывают, что поглощение (диссипация) энергии определяется мнимыми частями ε и μ; о двух членах в (80,5) говорят соответственно как об электрических и магнитных потерях. В силу закона возрастания энтропии эти потери имеют вполне определенный знак: диссипация энергии сопровождается выделением тепла, т. е. всегда $Q>0$. Отсюда следует, что мнимые части ε и μ всегда положительны:

$$\varepsilon''>0,\quad \mu''>0 \tag{80,7}$$

для всех веществ и при всех (положительных) частотах[1]). Знак же вещественных частей ε и μ (при $\omega\neq 0$) не ограничен никакими физическими условиями, так что ε' и μ' могут быть как положительными, так и отрицательными.

Всякий нестационарный процесс в реальном веществе всегда в той или иной степени термодинамически необратим. Поэтому электрические и магнитные потери в переменном электромагнитном поле всегда в какой-то (хотя бы и малой) степени имеются. Другими словами, функции $\varepsilon''(\omega)$ и $\mu''(\omega)$ не обращаются строго в нуль ни при каком отличном от нуля значении частоты. Мы увидим в следующем параграфе, что это утверждение имеет существенное принципиальное значение, хотя им ни в какой мере не исключается возможность существования таких областей частот, при которых потери становятся относительно весьма малыми.

[1]) Это утверждение относится к телам, находящимся (в отсутствие переменного поля) в термодинамически равновесном состоянии, что мы везде и подразумеваем. Если тело уже само по себе не находится в тепловом равновесии, то Q могло бы, в принципе, быть и отрицательным. Второй закон термодинамики требует лишь суммарного возрастания энтропии как под влиянием переменного электромагнитного поля, так и от термодинамической неравновесности, не имеющей отношения к наличию поля. Примером такого тела может являться вещество, атомы которого искусственно (т. е. не под влиянием самопроизвольного теплового возбуждения, а внешним «полем накачки») приведены в возбужденные состояния.

Области частот, в которых ε'' и μ'' очень малы (по сравнению с ε' и μ'), называют *областями прозрачности* вещества. Пренебрегая поглощением, в этих областях оказывается возможным ввести понятие о внутренней энергии тела в электромагнитном поле в том же смысле, какой она имеет в постоянном поле.

Для определения этой величины недостаточно рассматривать чисто монохроматическое поле, так как благодаря его строгой периодичности в нем не происходит никакого систематического накопления электромагнитной энергии. Поэтому мы рассмотрим поле, представляющее собой совокупность монохроматических компонент с частотами в узком интервале вокруг некоторого среднего значения ω_0. Напряженности такого поля можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)\, e^{-i\omega_0 t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(t)\, e^{-i\omega_0 t}, \tag{80,8}$$

где $\mathbf{E}_0(t)$, $\mathbf{H}_0(t)$ — медленно (по сравнению с множителем $\exp(-i\omega_0 t)$) меняющиеся функции времени. Вещественные части этих выражений должны быть подставлены в правую сторону (80,2), после чего мы произведем усреднение по времени по периоду $2\pi/\omega_0$, малому по сравнению со временем изменения множителей $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$.

Первый член в (80,2) после перехода к комплексному представлению $\mathbf{E}$ принимает вид

$$\frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathbf{E}+\mathbf{E}^*}{2}\,\frac{\dot{\mathbf{D}}+\dot{\mathbf{D}}^*}{2}$$

(и аналогично для второго члена). Произведения $\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}$ и $\mathbf{E}^*\dot{\mathbf{D}}^*$ исчезнут при указанном усреднении по времени, и потому их вообще не надо рассматривать. Таким образом, остается лишь

$$\frac{1}{16\pi}\left(\mathbf{E}\,\frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^*\,\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right). \tag{80,9}$$

Напишем производную $\partial\mathbf{D}/\partial t$ в виде $\hat{f}\mathbf{E}$, где $\hat{f}$ обозначает оператор

$$\hat{f} = \frac{\partial}{\partial t}\,\hat{\varepsilon},$$

и выясним, к какому результату приводит действие этого оператора на функцию вида (80,8). Если бы $\mathbf{E}_0$ была постоянной, то мы имели бы просто

$$\hat{f}\mathbf{E} = f(\omega)\,\mathbf{E}, \quad f(\omega) = -i\omega\varepsilon(\omega).$$

В нашем же случае произведем разложение Фурье функции $\mathbf{E}_0(t)$, представив ее в виде наложения компонент вида $\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i\alpha t}$ с постоянными $\mathbf{E}_{0\alpha}$. Медленность изменения $\mathbf{E}_0(t)$ означает, что в это разложение войдут лишь компоненты с $\alpha \ll \omega_0$. Имея это в виду, пишем

$$\hat{f}\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t} = f(\alpha+\omega_0)\,\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t} \approx$$
$$\approx \left[f(\omega_0) + \alpha\,\frac{df(\omega_0)}{d\omega_0}\right]\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t}.$$

Произведя теперь обратное суммирование компонент Фурье, получим

$$\hat{f}\mathbf{E}_0(t)\, e^{-i\omega_0 t} = f(\omega_0)\,\mathbf{E}_0 e^{-i\omega_0 t} + i\,\frac{df(\omega_0)}{d\omega_0}\,\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t}\, e^{-i\omega_0 t}.$$

Опуская ниже индекс 0 у ω_0, имеем, таким образом:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -i\omega\varepsilon(\omega)\,\mathbf{E} + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\,\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t}\, e^{-i\omega t}. \qquad (80,10)$$

Подставив это выражение в (80,9) и помня, что мнимой частью функции $\varepsilon(\omega)$ мы пренебрегаем, получим

$$\frac{1}{16\pi}\,\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\left(\mathbf{E}_0^*\,\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \mathbf{E}_0\,\frac{\partial \mathbf{E}_0^*}{\partial t}\right) = \frac{1}{16\pi}\,\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{E}\mathbf{E}^*)$$

(произведение $\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*$ совпадает с $\mathbf{E}\mathbf{E}^*$). Прибавив аналогичное выражение с магнитным полем, приходим к выводу, что скорость систематического изменения энергии 1 см³ среды дается производной $d\overline{U}/dt$, где

$$\overline{U} = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\,\mathbf{E}\mathbf{E}^* + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\,\mathbf{H}\mathbf{H}^*\right]. \qquad (80,11)$$

С помощью вещественных напряженностей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ это выражение напишется в виде

$$\overline{U} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\,\overline{\mathbf{E}^2} + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\,\overline{\mathbf{H}^2}\right] \qquad (80,12)$$

(*L. Brillouin*, 1921).

Это и есть искомый результат: $\overline{U}$ есть среднее значение электромагнитной части внутренней энергии единицы объема прозрачной среды. При отсутствии дисперсии ε и μ постоянны и (80,12) переходит, как и должно быть, в среднее значение выражения (80,3).

Если подвод электромагнитной энергии к телу извне прекращается, то фактически всегда имеющееся хотя бы очень малое поглощение приведет в конце концов к переходу всей энергии $\overline{U}$ в тепло. Поскольку, согласно закону возрастания энтропии, это тепло должно именно выделяться, а не поглощаться, то должно быть $\overline{U} > 0$. Согласно формуле (80,11) для этого должны выполняться неравенства

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} > 0, \qquad \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} > 0. \qquad (80,13)$$

В действительности эти условия автоматически выполняются как следствие более сильных неравенств, которым всегда удовлетворяют функции $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ в областях прозрачности (см. примечание на стр. 398).

Подчеркнем лишний раз, что выражение (80,12) получено в первом приближении по частотам α изменения амплитуды $\mathbf{E}_0(t)$. Поэтому оно справедливо только для полей, амплитуда которых меняется со временем достаточно медленно (это замечание относится также и к вычислению тензора напряжений в следующем параграфе).

§ 81. Тензор напряжений в диспергирующих средах

Представляет существенный интерес также и вопрос о среднем (по времени) тензоре напряжений, определяющем силы, действующие на вещество в переменном электрическом поле. Покажем, что и при наличии дисперсии (но по-прежнему в отсутствие поглощения) выражение для этого тензора не содержит, в отличие от выражения (80,12) для энергии, производных по частоте. В частности, для прозрачной диспергирующей изотропной жидкости в монохроматическом электрическом поле среднее значение $\overline{\sigma}_{ik}$ получается из (15,9) просто заменой ε на $\varepsilon(\omega)$ и произведений E_iE_k, $\mathbf{E}^2$ их средними значениями $\overline{E_iE_k}$, $\overline{\mathbf{E}^2}$ (*Л. П. Питаевский*, 1960).

Для доказательства этого утверждения вернемся к изложенному в § 15 выводу, несколько переформулировав его. Мы рассматривали там заполненный диэлектриком плоский конденсатор и определяли тензор напряжений из условия равенства работы пондеромоторных сил при смещении обкладки изменению соответствующего термодинамического потенциала. Напишем здесь это условие для полных (а не на единицу площади) величин, представив его в виде

$$A\sigma_{ik}\xi_i n_k = (\delta\mathcal{U})_{\mathcal{S},\,e} \tag{81,1}$$

(A — площадь обкладки конденсатора). Вместо потенциала $\tilde{\mathcal{F}}$ здесь использована обычная энергия $\mathcal{U}$, изменение которой рассматривается при заданных значениях энтропии $\mathcal{S}$ диэлектрика и полных зарядов $\pm e$ на обкладках конденсатора (вместо заданного потенциала φ); использовано, что согласно теореме о малых добавках

$$(\delta\tilde{\mathcal{F}})_{T,\,\varphi} = (\delta\mathcal{U})_{\mathcal{S},\,e}.$$

В виде (81,1) это условие имеет особенно простой смысл: теплоизолированный конденсатор с заданными зарядами на обкладках представляет собой электрически замкнутую систему; если же внешний источник производит над ним механическую работу (смещая обкладки), то вся эта работа идет на увеличение энергии конденсатора. Энергия конденсатора:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \frac{e^2}{2C}, \tag{81,2}$$

где $\mathcal{U}_0$ — энергия диэлектрика в отсутствие поля (при том же значении энтропии $\mathcal{S}$), а C — емкость конденсатора; для плоского конденсатора $C = \varepsilon A/4\pi h$, где h — расстояние между обкладками. Отсюда:

$$(\delta\mathcal{U})_{\mathcal{S}, e} = (\delta\mathcal{U}_0)_{\mathcal{S}} - \frac{e^2}{2C^2}(\delta C)_{\mathcal{S}}. \tag{81,3}$$

Выразив δC через смещение обкладок ξ (с учетом зависимости ε от плотности диэлектрика, меняющейся при смещении), легко получить формулу (15,9)[1]; ввиду очевидности результата, не будем на этом останавливаться.

При наличии дисперсии выражение для энергии $\mathcal{U}$ меняется. Покажем, что тем не менее соотношение (81,3) остается в силе для средней по времени вариации $\overline{\delta\mathcal{U}}$, а тем самым будет доказано и сделанное выше утверждение об усредненном тензоре напряжений.

Пусть заряд на обкладках конденсатора меняется по монохроматическому закону с частотой ω. Тогда конденсатор сам по себе уже не будет электрически замкнутой системой, ввиду необходимости подводить и отводить заряд. Такой системой, однако, является колебательный контур с собственной частотой ω, состоящий из конденсатора и должным образом подобранной самоиндукции[2]; поэтому для его энергии справедливо соотношение (81,1).

В отсутствие сопротивления разность потенциалов φ на обкладках конденсатора равна сумме внешней электродвижущей силы и электродвижущей силы самоиндукции:

$$\varphi = \mathcal{E} - \frac{1}{c^2} L \frac{dJ}{dt}, \tag{81,4}$$

а ток J связан с зарядом e на обкладках конденсатора равенством $J = de/dt$. Для величин, меняющихся со временем по монохроматическому закону, по определению емкости $C(\omega)$ имеем $\varphi = e/C(\omega)$. Положив в (81,4) $\mathcal{E} = 0$, $J = -i\omega e$, прежде всего найдем, что и при наличии дисперсии емкости собственная частота контура по-прежнему удовлетворяет соотношению Томсона (62,5):

$$\omega = c/\sqrt{LC(\omega)}. \tag{81,5}$$

Далее, умножив равенство (81,4) на $J = de/dt$ и рассматривая (как при выводе (80,12)) «почти монохроматические» величины, без труда получим:

$$\overline{\mathcal{E}J} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{L\overline{J^2}}{2} + \frac{d(\omega C)}{d\omega}\frac{\overline{\varphi^2}}{2}\right\}.$$

[1]) При этом она окажется выраженной через другие переменные: вместо изотермических производной $\partial\varepsilon/\partial\rho$ и функции P_0 в ней будут фигурировать адиабатические. Оба выражения, разумеется, эквивалентны.

[2]) Для выполнения условий квазистационарности необходимо, чтобы размеры контура были малыми по сравнению с длиной волны c/ω. Это ограничение, однако, не имеет принципиального характера и не умаляет общности излагаемого вывода.

Из вида этого равенства ясно, что выражение в фигурных скобках представляет собой энергию $\mathcal{U}$ колебательного контура. Первый член в этом выражении преобразуем, подставив $J=-i\omega e$ и используя (81,5):

$$\frac{1}{2c^2}L\overline{J^2}=\frac{1}{2c^2}L\omega^2\overline{e^2}=\frac{1}{2c^2}LC^2\omega^2\overline{\varphi^2}=\frac{C\overline{\varphi^2}}{2}.$$

Окончательно запишем энергию контура в виде[1])

$$\overline{\mathcal{U}}=\frac{1}{\omega}\frac{d(\omega^2C)}{d\omega}\frac{\overline{\varphi^2}}{2}. \tag{81,6}$$

Нам надо вычислить вариацию этой энергии при малом смещении обкладок конденсатора, т. е. при малом изменении его емкости. В переменном поле это смещение надо представлять себе как происходящее бесконечно медленно. Но при таком изменении остается постоянным адиабатический инвариант, равный (как и для всякой линейной колебательной системы) отношению энергии колебаний к частоте[2]). Таким образом, $\delta(\overline{\mathcal{U}}/\omega)=0$, т. е.

$$\delta\overline{\mathcal{U}}=\overline{\mathcal{U}}\frac{\delta\omega}{\omega}. \tag{81,7}$$

Из равенства (81,5) имеем, при малом изменении емкости конденсатора:

$$\frac{\delta\omega}{\omega}=-\frac{\delta C}{2C}. \tag{81,8}$$

Но изменение емкости складывается из двух частей:

$$\delta C=(\delta C)_{\text{ст}}+\frac{dC}{d\omega}\delta\omega. \tag{81,9}$$

Первый член есть «статическая» часть изменения, связанная с деформацией так же, как и в статическом случае (здесь существенно, что при наличии дисперсии емкость $C(\omega)$ выражается через $\varepsilon(\omega)$ так же, как в статическом случае). Второй же член связан просто с изменением частоты. Из (81,8—9) находим для «статической» части

$$(\delta C)_{\text{ст}}=-\frac{1}{\omega^2}\frac{d(\omega^2C)}{d\omega}\delta\omega. \tag{81,10}$$

При подстановке (81,6) в (81,7) с учетом (81,10) производная $dC/d\omega$ выпадает и вариация энергии получается в виде

$$\delta\overline{\mathcal{U}}=-\frac{\overline{\varphi^2}}{2}(\delta C)_{\text{ст}}=-\frac{\overline{e^2}}{2C^2}(\delta C)_{\text{ст}}, \tag{81,11}$$

[1]) Здесь и ниже для упрощения записи формул опускаем в энергии ее «неэлектромагнитную» часть $\mathcal{U}_0$.

[2]) Ср. I § 49. Инвариантность указанной величины особенно наглядна в терминах квантовой теории: отношение $\overline{\mathcal{U}}/\hbar\omega$ есть номер квантового состояния, не меняющийся при адиабатическом изменении условий.

действительно совпадающем с усредненным вторым членом в (81,3).

Заметим, что выпадение членов с производной по ω в $\delta\overline{\mathcal{U}}$ имеет совершенно общий характер и не связано с конкретным способом изменения состояния тела (в данном случае — конденсатора). В частности, для среды с дисперсией остается справедливой (с заменой $\mathbf{E}^2$ на $\overline{\mathbf{E}^2}$) формула (14,1) для изменения свободной энергии при малом изменении ε:

$$\delta\mathcal{F} = -\int \delta\varepsilon(\omega)\frac{\overline{\mathbf{E}^2}}{8\pi}\,dV. \tag{81,12}$$

Зная тензор напряжений, можно по формуле (75,17) найти силу, действующую на единицу объема диэлектрика. При этом члены, содержащие пространственные производные, совпадут с соответствующими членами усредненного по времени выражения (75,18) (в котором надо положить $\mu = 1$). Член же с производной по времени (сила Абрагама) оказывается другим.

Действительно, этот член возникает как разность

$$\frac{1}{4\pi c}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{DH}] - \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}]\right\},$$

которая должна быть теперь усреднена по времени. Для этого выражаем $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ в комплексном виде (т. е. заменяем их на $(\mathbf{D}+\mathbf{D}^*)/2$ и т. д.), после чего для производной $\partial\mathbf{D}/\partial t$ используем формулу (80,10). В результате получим силу Абрагама в виде

$$\frac{1}{8\pi c}(\varepsilon - 1)\,\mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}^*] + \frac{1}{8\pi c}\omega\frac{d\varepsilon}{d\omega}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,\mathbf{H}^*\right] \tag{81,13}$$

(*Х. Вашина, В. И. Карпман*, 1976).

Вопрос о тензоре напряжений в переменном поле имеет смысл не только для прозрачной, но и для поглощающей среды,— в противоположность вопросу о внутренней энергии, который может быть сформулирован лишь в пренебрежении диссипацией. Есть, однако, основания полагать, что в поглощающей среде тензор напряжений не может быть выражен через одну лишь диэлектрическую проницаемость, а потому вообще не может быть найден в общем виде макроскопическим путем.

§ 82. Аналитические свойства функции $\varepsilon(\omega)$

Функция $f(\tau)$ в (77,3) конечна при всех значениях своего аргумента, в том числе и при $\tau = 0$ [1]). У диэлектриков эта функция стремится при $\tau \to \infty$ к нулю. Это обстоятельство является

---

[1]) Именно для этой цели в интегральной зависимости (77,3) выделен член $\mathbf{E}(t)$; в противном случае функция $f(\tau)$ имела бы при $\tau = 0$ особенность типа δ-функции.

просто выражением того факта, что на значение $\mathbf{D}(t)$ в заданный момент времени не могут заметно влиять значения $\mathbf{E}(t)$ в очень давние моменты. Физический механизм, лежащий в основе интегральной зависимости вида (77,3), заключается в процессах установления электрической поляризации. Поэтому интервал значений, в котором функция $f(\tau)$ заметно отличается от нуля,— порядка величины времени релаксации, характеризующего скорость этих процессов.

Сказанное относится и к металлам, с той только разницей, что стремится к нулю при $\tau \to \infty$ не сама функция $f(\tau)$, а разность $f(\tau)-4\pi\sigma$. Это отличие связано с тем, что уже прохождение стационарного тока проводимости, хотя и не приводит к какому-либо реальному изменению физического состояния металла, но в наших уравнениях формально означает появление индукции $\mathbf{D}$ согласно

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}$$

или

$$\mathbf{D}(t)=\int_{-\infty}^{t} 4\pi\sigma\mathbf{E}(\tau)\,d\tau=4\pi\sigma\int_{0}^{\infty}\mathbf{E}(t-\tau)\,d\tau.$$

Функция $\varepsilon(\omega)$ была определена согласно (77,5):

$$\varepsilon(\omega)=1+\int_{0}^{\infty} e^{i\omega\tau}f(\tau)\,d\tau. \tag{82,1}$$

Оказывается возможным выяснить некоторые весьма общие свойства этой функции, рассматривая ω как комплексную переменную ($\omega=\omega'+i\omega''$). Эти свойства можно было бы сформулировать здесь сразу, заметив, что электрическая восприимчивость $[\varepsilon(\omega)-1]/4\pi$ относится к категории величин (обобщенных восприимчивостей), рассмотренных уже в V § 123. Тем не менее, мы частично повторим здесь соответствующие рассуждения и результаты — как с целью облегчения чтения, так и с целью подчеркнуть некоторые различия между случаями диэлектриков и металлов.

Из определения (82,1) и из указанных выше свойств функции $f(\tau)$ следует, что во всей верхней полуплоскости $\varepsilon(\omega)$ есть однозначная функция, нигде не обращающаяся в бесконечность, т. е. не имеющая никаких особых точек. Действительно, при $\omega''>0$ в подынтегральном выражении в формуле (82,1) имеется экспоненциально убывающий множитель $e^{-\omega''\tau}$, а поскольку и функция $f(\tau)$ конечна во всей области интегрирования, то интеграл сходится. Функция $\varepsilon(\omega)$ не имеет особенностей и на самой вещественной оси ($\omega''=0$), за исключением, возможно, лишь начала координат (у металлов $\varepsilon(\omega)$ имеет в этой точке простой полюс).

В нижней же полуплоскости определение (82,1) неприменимо, так как интеграл расходится. Поэтому функция $\varepsilon(\omega)$ в нижней полуплоскости может быть определена лишь как аналитическое продолжение формулы (82,1) из верхней полуплоскости. В этой области функция $\varepsilon(\omega)$ имеет, вообще говоря, особые точки. Функция $\varepsilon(\omega)$ в верхней полуплоскости имеет не только формальный математический, но и физический смысл: ею определяется связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ для полей с возрастающей (как $e^{\omega'' t}$) амплитудой. В нижней же полуплоскости такое физическое истолкование невозможно уже хотя бы потому, что наличие затухающего (как $\exp(-|\omega''|t)$) поля предполагает его бесконечную величину при $t \to -\infty$.

Обратим внимание на то, что вывод об отсутствии особых точек у функции $\varepsilon(\omega)$ в верхней полуплоскости является с физической точки зрения следствием принципа причинности. Последний проявляется в том, что интегрирование в (77,3) производится лишь по времени, предшествующему данному моменту t, в результате чего в формуле (82,1) область интегрирования и распространяется от 0 до ∞ (а не от $-\infty$ до $+\infty$).

Из определения (82,1) очевидно, далее, что

$$\varepsilon(-\omega^*) = \varepsilon^*(\omega). \tag{82,2}$$

Это есть обобщение соотношения (77,7), относящегося к вещественным значениям ω. В частности, для чисто мнимых значений ω имеем

$$\varepsilon(i\omega'') = \varepsilon^*(i\omega''). \tag{82,3}$$

Это значит, что на верхней мнимой полуоси функция $\varepsilon(\omega)$ вещественна [1]).

Подчеркнем, что свойство (82,2) выражает собой просто тот факт, что операторная связь $\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}$ должна обеспечивать вещественность $\mathbf{D}$ при вещественном $\mathbf{E}$. Если функция $\mathbf{E}(t)$ дается вещественным выражением

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^* e^{i\omega^* t}, \tag{82,4}$$

то, применяя оператор $\hat{\varepsilon}$ к каждому из двух членов, получим:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \varepsilon(-\omega^*)\,\mathbf{E}_0^* e^{i\omega^* t};$$

условие вещественности этой величины совпадает с (82,2).

Согласно результатам § 80 мнимая часть $\varepsilon(\omega)$ положительна при положительных вещественных значениях $\omega = \omega'$, т. е. на пра-

[1]) Для нижней мнимой полуоси такое заключение было бы, вообще говоря, несправедливо. Функция $\varepsilon(\omega)$ может иметь здесь точки ветвления, и для ее определения в нижней полуплоскости как аналитической функции может оказаться иеобходимым разрез по полуоси. Тогда равенство (82,2) означает лишь комплексную сопряженность значений $\varepsilon(\omega)$ на обоих берегах разреза.

вой части вещественной оси. Поскольку, согласно (82,2), $\operatorname{Im}\varepsilon(-\omega')=-\operatorname{Im}\varepsilon(\omega')$, то на левой части этой оси мнимая часть $\varepsilon(\omega)$ отрицательна. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Im}\varepsilon>0 \quad &\text{при} \quad \omega=\omega'>0,\\ \operatorname{Im}\varepsilon<0 \quad &\text{при} \quad \omega=\omega'<0.\end{aligned}\right\} \tag{82,5}$$

В точке же $\omega=0$ функция $\operatorname{Im}\varepsilon$ меняет знак, проходя через нуль (у диэлектриков) или через бесконечность (у металлов). Это — единственная точка на вещественной оси, в которой $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)$ может обратиться в нуль.

При стремлении ω к бесконечности по любому пути (в верхней полуплоскости) функция $\varepsilon(\omega)$ стремится к единице. Это обстоятельство было указано уже в § 78 для случая, когда $\omega\to\infty$ вдоль вещественной оси. В общем случае это видно из той же формулы (82,1): если $\omega\to\infty$ так, что $\omega''\to\infty$, то интеграл в (82,1) обращается в нуль благодаря наличию в подынтегральном выражении множителя $\exp(-\tau\omega'')$; если же ω'' остается конечным, а $|\omega'|\to\infty$, то обращение интеграла в нуль происходит благодаря наличию осциллирующего множителя $e^{i\omega'\tau}$.

Перечисленных свойств функции $\varepsilon(\omega)$ достаточно для того, чтобы доказать следующую теорему: функция $\varepsilon(\omega)$ не принимает вещественных значений ни в какой конечной точке верхней полуплоскости, за исключением лишь точек мнимой оси; на последней же $\varepsilon(\omega)$ монотонно убывает от значения $\varepsilon_0>1$ (у диэлектриков) или от $+\infty$ (у металлов) при $\omega=i0$ до 1 при $\omega=i\infty$. Отсюда следует, в частности, что функция $\varepsilon(\omega)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости. Мы не будем повторять здесь доказательство этих утверждений, приведенное в V § 123; нужно помнить лишь, что роль обобщенной восприимчивости играет не сама функция $\varepsilon(\omega)$, а разность $\varepsilon(\omega)-1$.

Мы не будем повторять также вывода соотношений, связывающих друг с другом мнимую и вещественную части функции $\varepsilon(\omega)$. Выпишем лишь окончательные формулы с соответствующим образом измененными обозначениями.

Напишем функцию $\varepsilon(\omega)$ вещественной переменной ω, как и в § 77, в виде $\varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)+i\varepsilon''(\omega)$. Если функция $\varepsilon(\omega)$ относится к диэлектрику, указанные соотношения гласят

$$\varepsilon'(\omega)-1=\frac{1}{\pi}\,\fint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varepsilon''(x)}{x-\omega}\,dx, \tag{82,6}$$

$$\varepsilon''(\omega)=-\frac{1}{\pi}\,\fint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varepsilon'(x)-1}{x-\omega}\,dx, \tag{82,7}$$

где перечеркнутый знак интеграла означает, что интеграл от полюсного выражения понимается в смысле его главного значения (*H. A. Kramers*, *R. L. Kronig*, 1927). Напомним, что единственным существенным свойством функции $\varepsilon(\omega)$, использованным при выводе этих формул, является отсутствие особых точек в верхней полуплоскости. Поэтому можно сказать, что формулы Крамерса—Кронига (как и указанное свойство функции $\varepsilon(\omega)$) являются прямым следствием физического принципа причинности.

Воспользовавшись нечетностью функции $\varepsilon''(\omega)$, можно привести формулу (82,6) к виду

$$\varepsilon'(\omega)-1=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{x\varepsilon''(x)}{x^2-\omega^2}\,dx. \tag{82,8}$$

Если речь идет о проводнике, то в точке $\omega=0$ функция $\varepsilon(\omega)$ имеет полюс, вблизи которого $\varepsilon=4\pi\sigma i/\omega$ (77,9). Это приводит к появлению в формуле (82,7) дополнительного члена (ср. V (123,18)):

$$\varepsilon''(\omega)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varepsilon'(x)}{x-\omega}\,dx+\frac{4\pi\sigma}{\omega}\,; \tag{82,9}$$

формула же (82,6) или (82,8) остается неизменной. Кроме того, в случае металлов надо сделать еще следующее замечание. В конце § 77 было указано, что у металлов могут существовать области частот, в которых функция $\varepsilon(\omega)$ теряет свой физический смысл в связи с эффектами пространственной неоднородности поля. Между тем, в рассматриваемых формулах интегрирование должно вестись по всем частотам. В таких случаях под $\varepsilon(\omega)$ в соответствующих областях частот надо понимать функцию, получающуюся в результате решения формальной задачи о поведении тела в фиктивном пространственно однородном периодическом электрическом поле (а не в неизбежно неоднородном поле электромагнитной волны).

Особенно существенна формула (82,8). Она дает возможность вычислить функцию $\varepsilon'(\omega)$, если известна хотя бы приближенным (например, эмпирическим) образом функция $\varepsilon''(\omega)$ для данного тела. При этом существенно, что для любой функции $\varepsilon''(\omega)$, удовлетворяющей физически необходимому требованию $\varepsilon''>0$ при $\omega>0$, формула (82,8) дает функцию $\varepsilon'(\omega)$, не противоречащую никаким необходимым физическим требованиям, т. е. принципиально возможную (знак и величина ε' не ограничиваются никакими общими физическими условиями). Это обстоятельство и дает возможность использовать формулу (82,8) даже по приближенной функции $\varepsilon''(\omega)$. Напротив, формула (82,7) не дает (в общем случае произвольной функции $\varepsilon'(\omega)$) физически возможной функции $\varepsilon''(\omega)$, так как не обеспечивает автоматическим образом положительность последней.

В теории дисперсии принято записывать выражение для $\varepsilon'(\omega)$ в виде

$$\varepsilon'(\omega)-1=-\frac{4\pi e^2}{m}\int\limits_0^\infty \frac{f(x)}{\omega^2-x^2}\,dx, \qquad (82,10)$$

где e, m — заряд и масса электрона, а $f(\omega)\,d\omega$ называется *силой осцилляторов* в интервале частот $d\omega$. Согласно (82,8) эта величина связана с $\varepsilon''(\omega)$ посредством

$$f(\omega)=\frac{m}{2\pi^2e^2}\,\omega\varepsilon''(\omega). \qquad (82,11)$$

У металлов $f(\omega)$ стремится к конечному пределу при $\omega\to0$.

При достаточно больших значениях ω в подынтегральном выражении в (82,8) можно пренебречь x по сравнению с ω. Тогда

$$\varepsilon'(\omega)-1=-\frac{2}{\pi\omega^2}\int\limits_0^\infty x\varepsilon''(x)\,dx.$$

С другой стороны, для диэлектрической проницаемости при больших частотах мы имеем формулу (78,1). Сравнение обоих выражений приводит к *правилу сумм*

$$\frac{m}{2\pi^2e^2}\int\limits_0^\infty \omega\varepsilon''(\omega)\,d\omega=\int\limits_0^\infty f(\omega)\,d\omega=N, \qquad (82,12)$$

где N — полное число электронов в единице объема вещества.

Если $\varepsilon''(\omega)$ не имеет особенности при $\omega=0$, то в формуле (82,8) можно перейти к пределу $\omega\to0$, и мы получим

$$\varepsilon'(0)-1=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon''(x)}{x}\,dx. \qquad (82,13)$$

Если же точка $\omega=0$ является особой для функции $\varepsilon''(\omega)$ (металлы), то предел, к которому стремится интеграл (82,8) при $\omega\to0$, не совпадает со значением, получающимся путем простого вычеркивания в нем ω. Для вычисления указанного предела необходимо предварительно заменить в подынтегральном выражении $\varepsilon''(x)$ на

$$\varepsilon''(x)-\frac{4\pi\sigma}{x};$$

эта замена не меняет значения интеграла, поскольку тождественно

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2-\omega^2}=0.$$

Формулу (82,13) для диэлектриков можно переписать в виде

$$\varepsilon_0-1=\frac{4\pi e^2N}{m}\,\overline{\omega^{-2}}, \qquad (82,14)$$

где черта обозначает усреднение с помощью силы осцилляторов:

$$\overline{\omega^{-2}} = \frac{1}{N}\int_0^\infty \frac{f(\omega)}{\omega^2}\,d\omega.$$

Это выражение может быть полезным при различных оценках величин ε_0.

Наконец, можно получить формулу, выражающую значения $\varepsilon(\omega)$ на верхней мнимой полуоси через значения $\varepsilon''(\omega)$ на вещественной оси (соответствующие вычисления тоже приведены в V § 123). Эта формула имеет вид

$$\varepsilon(i\omega) - 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x\varepsilon''(x)}{x^2+\omega^2}\,dx. \qquad (82,15)$$

Если проинтегрировать это соотношение с обеих сторон по ω, то получается

$$\int_0^\infty [\varepsilon(i\omega) - 1]\,d\omega = \int_0^\infty \varepsilon''(\omega)\,d\omega. \qquad (82,16)$$

Все изложенные результаты (с небольшим лишь видоизменением) относятся и к магнитной проницаемости $\mu(\omega)$. Отличие связано прежде всего с тем, что при увеличении частоты функция $\mu(\omega)$ сравнительно рано теряет физический смысл. Поэтому, например, применять формулы Крамерса—Кронига к $\mu(\omega)$ надо следующим образом. Вместо бесконечного рассматриваем конечный интервал значений ω (от 0 до ω_1), простирающийся до таких частот, при которых μ еще имеет смысл, но уже перестает меняться и ее мнимую часть можно считать равной нулю; соответствующее вещественное значение μ обозначим как μ_1[1]). Тогда формулу (82,8) надо писать в виде

$$\mu'(\omega) - \mu_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\omega_1} \frac{x\mu''(x)}{x^2-\omega^2}\,dx. \qquad (82,17)$$

В противоположность ε_0, значение $\mu_0 = \mu(0)$ может быть как меньше, так и больше 1. Изменение же $\mu(\omega)$ вдоль мнимой оси по-прежнему является монотонным убыванием—на этот раз от μ_0 до $\mu_1 < \mu_0$.

Наконец, отметим, что аналитическими свойствами, установленными в этом параграфе для функции $\varepsilon(\omega)$, в равной степени обладает и функция $\eta(\omega) \equiv 1/\varepsilon(\omega)$. Так, аналитичность $\eta(\omega)$

[1]) Фактически ω_1 должио удовлетворять условию $\omega_1\tau \gg 1$, где τ—наименьшее из времен релаксации ферро- или парамагннтных процессов в магнетике.