РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 85. Геометрическая оптика

Условие применимости геометрической оптики заключается, как известно, в малости длины волны λ по сравнению с характеристическими размерами задачи l (см. II § 53). Связь геометрической оптики с волновой устанавливается тем, что при $\lambda \ll l$ всякая величина φ, описывающая поле волны (любая из компонент **E** или **H**), выражается формулой вида

$$\varphi = ae^{i\psi},$$

где амплитуда a — медленно меняющаяся функция координат и времени, а фаза ψ — большая величина, являющаяся «почти линейной» функцией координат и времени. Последняя называется в геометрической оптике *эйконалом* и играет в ней основную роль. Ее производная по времени определяет частоту волны:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\omega, \tag{85,1}$$

а производные по координатам — волновой вектор:

$$\nabla\psi = \mathbf{k} \tag{85,2}$$

и тем самым — направление лучей в каждой точке пространства.

У монохроматической волны в стационарных условиях частота есть постоянная величина и зависимость эйконала от времени дается слагаемым $-\omega t$. Введем тогда вместо ψ другую функцию ψ_1 (которую тоже будем называть эйконалом) согласно

$$\psi = -\omega t + \frac{\omega}{c}\psi_1(x, y, z); \tag{85,3}$$

ψ_1 есть функция только координат, а ее градиент

$$\nabla\psi_1 = \mathbf{n}, \tag{85,4}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор, связанный с $\mathbf{k}$ посредством

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}. \tag{85,5}$$

Абсолютная величина вектора $\mathbf{n}$ равна показателю преломления n среды[1]). Поэтому уравнение эйконала для распростра-

[1]) В геометрической оптике рассматриваются лишь прозрачные среды.

нения лучей в среде с показателем преломления $n(x, y, z)$, являющимся заданной функцией координат, есть

$$(\nabla\psi_1)^2 \equiv \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)^2 = n^2. \tag{85,6}$$

Уравнение распространения лучей (в стационарных условиях) может быть получено также из *принципа Ферма*, согласно которому для траектории луча между двумя заданными точками пространства A и B минимален интеграл

$$\psi_1 = \int_A^B \mathbf{n}\,d\mathbf{l} = \int_A^B n\,dl.$$

Приравнивая нулю вариацию этого интеграла, имеем

$$\delta\psi_1 = \int_A^B (\delta n \cdot dl + n\delta\,dl) = 0.$$

Пусть $\delta\mathbf{r}$ — смещение траектории луча при варьировании. Тогда имеем

$$\delta n = \delta\mathbf{r}\cdot\nabla n, \quad \delta\,dl = \mathbf{l}\,d\,\delta\mathbf{r},$$

где $\mathbf{l}$ — единичный вектор касательной к лучу. Подставив в $\delta\psi_1$ и произведя во втором члене интегрирование по частям (учитывая, что в точках A и B $\delta\mathbf{r} = 0$), получим

$$\delta\psi_1 = \int_A^B \delta\mathbf{r}\cdot\nabla n\,dl + \int_A^B n\mathbf{l}\,d\,\delta\mathbf{r} = \int_A^B \left(\nabla n - \frac{d(n\mathbf{l})}{dl}\right)\delta\mathbf{r}\cdot dl = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d(n\mathbf{l})}{dl} = \nabla n. \tag{85,7}$$

Раскрыв производную и подставив $\frac{dn}{dl} = \mathbf{l}\nabla n$, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d\mathbf{l}}{dl} = \frac{1}{n}[\nabla n - \mathbf{l}(\mathbf{l}\nabla n)]. \tag{85,8}$$

Это и есть уравнение, определяющее форму лучей.

Как известно из дифференциальной геометрии, производная $d\mathbf{l}/dl$ вдоль луча равна $\mathbf{N}/R$, где $\mathbf{N}$ — единичный вектор главной нормали, а R — радиус кривизны луча. Умножив уравнение (85,8) с обеих сторон на $\mathbf{N}$ и учитывая взаимную перпендикулярность $\mathbf{N}$ и $\mathbf{l}$, получим

$$\frac{1}{R} = \mathbf{N}\,\frac{\nabla n}{n}. \tag{85,9}$$

Луч изгибается в сторону увеличения показателя преломления.

Скорость распространения лучей в геометрической оптике направлена вдоль $\mathbf{l}$ и дается производной

$$\mathbf{u}=\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}. \tag{85,10}$$

Эту скорость называют также *групповой*, а отношение ω/k — *фазовой* скоростью. Последняя не соответствует скорости реального физического распространения какой бы то ни было величины.

Легко написать также уравнение, определяющее изменение интенсивности света вдоль луча. Интенсивность I представляет собой абсолютную величину усредненного (по времени) вектора Пойнтинга. Последний направлен вместе с групповой скоростью вдоль $\mathbf{l}$:

$$\overline{\mathbf{S}}=I\mathbf{l}.$$

В стационарных условиях средняя плотность энергии поля в каждой точке пространства не меняется со временем. Поэтому уравнение сохранения энергии гласит: $\operatorname{div}\overline{\mathbf{S}}=0$, или

$$\operatorname{div}(I\mathbf{l})=0. \tag{85,11}$$

Это и есть искомое уравнение.

Наконец, рассмотрим вопрос о том, как меняется вдоль луча направление поляризации линейно поляризованного света (*С. М. Рытов*, 1938).

Как известно из дифференциальной геометрии, пространственная кривая (в данном случае луч) характеризуется в каждой своей точке тремя взаимно перпендикулярными единичными векторами касательной $\mathbf{l}$, главной нормали $\mathbf{N}$ и бинормали $\mathbf{b}$ (так называемый естественный трехгранник). В силу поперечности электромагнитных волн вектор $\mathbf{E}$ (или $\mathbf{H}$) лежит всегда в нормальной плоскости — плоскости $\mathbf{N}$, $\mathbf{b}$.

Пусть в некоторой точке луча направление $\mathbf{E}$ совпадает с направлением $\mathbf{N}$, т. е. лежит в соприкасающейся плоскости (плоскость $\mathbf{N}$, $\mathbf{l}$). Как известно, отклонение кривой на длине dl от соприкасающейся плоскости является бесконечно малой величиной высшего (третьего) порядка. Поэтому можно утверждать, что при перемещении вдоль луча на расстояние dl вектор $\mathbf{E}$ остается в первоначальной соприкасающейся плоскости. Новая же соприкасающаяся плоскость поворачивается относительно старой на угол $d\varphi=dl/T$, где T — радиус кручения кривой. Этому же будет равен, следовательно, угол поворота вектора $\mathbf{E}$ по отношению к вектору $\mathbf{N}$ в нормальной плоскости. Таким образом, при перемещении вдоль луча направление поляризации вращается в нормальной плоскости так, что его угол с направлением главной нормали меняется согласно уравнению

$$\frac{d\varphi}{dl}=\frac{1}{T}. \tag{85,12}$$

В частности, в отсутствие кручения, т. е. когда луч является плоской кривой, направление вектора $\mathbf{E}$ в нормальной плоскости остается неизменным, как это и заранее очевидно из соображений симметрии.

Задачи

1. Найти закон преобразования скорости распространения света в среде (групповой скорости) при преобразовании системы отсчета.

Решение. По определению групповой скорости $\mathbf{u}$,

$$d\omega = \mathbf{u}\, d\mathbf{k}, \qquad d\omega' = \mathbf{u}'\, d\mathbf{k}';$$

величины со штрихом относятся к системе отсчета K', движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно системы K (величины без штриха). Согласно формулам преобразования Лоренца для волнового 4-вектора имеем

$$k'_x = \gamma (k_x - v\omega/c^2), \qquad k'_y = k_y, \qquad k'_z = k_z,$$
$$\omega = \gamma (\omega' + v k'_x),$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (оси x, x' — в направлении $\mathbf{v}$). Из формулы во второй строке имеем

$$d\omega = \gamma (d\omega' + v\, dk'_x) = \gamma (\mathbf{u}'\, d\mathbf{k}' + v\, dk'_x).$$

Подставив сюда $d\mathbf{k}'$, выраженное через $d\mathbf{k}$ и $d\omega$, из формул первой строки и собрав вместе члены с $d\omega$, получим

$$\gamma \left(1 + \frac{1}{c^2} v u'_x\right) d\omega = \gamma (u'_x + v)\, dk_x + u'_y dk_y + u'_z dk_z.$$

Сравнив с $d\omega = \mathbf{u}\, d\mathbf{k}$, найдем, что скорости $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{v}$ складываются в $\mathbf{u}$ по обычным релятивистским формулам сложения скоростей — как это и следовало ожидать.

2. Определить скорость распространения света в движущейся (относительно наблюдателя) среде.

Решение. Пусть ω и $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор световой волны в неподвижной системе отсчета K, а ω', $\mathbf{k}'$ — те же величины в системе K', движущейся относительно K вместе с жидкостью со скоростью $\mathbf{v}$. В системе K' жидкость неподвижна, и потому ω' и $\mathbf{k}'$ связаны соотношением

$$ck' = \omega' n(\omega'). \tag{1}$$

Согласно формулам преобразования Лоренца для волнового 4-вектора, имеем, с точностью до членов первого порядка по v/c:

$$\omega' = \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}, \qquad \mathbf{k}' = \mathbf{k} - \frac{\omega}{c^2}\mathbf{v}, \qquad k' = k - \frac{\omega}{c^2}\mathbf{v}\mathbf{l}$$

($\mathbf{l} = \mathbf{k}/k$). Подставив эти выражения в (1) и разложив функцию $n(\omega')$ по степеням $\mathbf{v}$, получим с той же точностью[1]):

$$k = \frac{\omega}{c} n + \frac{\omega}{c^2}\left[1 - n\frac{d(n\omega)}{d\omega}\right]\mathbf{v}\mathbf{l}. \tag{2}$$

---

[1]) Отметим, что второй член в (2), а с ним и все дальнейшие эффекты первого порядка тождественно обращаются в нуль при $n^2 = \varepsilon = 1 - \mathrm{const}\cdot\omega^{-2}$,

Скорость распространения (групповая скорость) в неподвижной среде получается дифференцированием соотношения $ck = \omega n(\omega)$ и равна

$$\mathbf{u}_0 = \frac{c}{d(n\omega)/d\omega}\,\mathbf{l}. \tag{3}$$

В движущейся среде она получается дифференцированием соотношения (2), которое предварительно переписываем в виде

$$k = \frac{\omega}{c} n + \mathbf{kv}\left(\frac{1}{cn} - \frac{1}{u_0}\right).$$

Снова с точностью до членов первого порядка находим

$$u = u_0 + \mathbf{l}(\mathbf{lv})\left(\frac{u_0}{cn} - \frac{u_0^2}{c^2} - \frac{n\omega}{c}\frac{du_0}{d\omega}\right) + v\left(1 - \frac{u_0}{cn}\right). \tag{4}$$

При распространении света в направлении движения среды ($\mathbf{v} \parallel \mathbf{l}$) имеем отсюда[1])

$$u = u_0 + v\left(1 - \frac{u_0^2}{c^2}\right) - \frac{vn\omega}{c}\frac{du_0}{d\omega}. \tag{5}$$

Первые два члена могут быть получены просто путем применения релятивистской формулы сложения скоростей. Если же $\mathbf{v}$ и $\mathbf{l}$ взаимно перпендикулярны:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}\left(1 - \frac{u_0}{cn}\right). \tag{6}$$

Фазовая скорость волны получается из (2) в виде

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} + \mathbf{vl}\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right).$$

При $\mathbf{v} \perp \mathbf{l}$ эффект первого порядка в ней отсутствует.

§ 86. Отражение и преломление волн

Рассмотрим отражение и преломление монохроматической плоской электромагнитной волны на плоской границе раздела между однородными средами. Падение происходит из прозрачной среды (среда *1*); для второй же среды предположения о прозрачности пока делать не будем. Будем отмечать величины, относящиеся к падающей и отраженной волнам, соответственно индексами 0 и 1, а к преломленной волне — индексом 2 (рис. 46). Направление нормали к плоскости раздела выберем в качестве оси z (с положительным направлением в глубь среды *2*).

Ввиду полной однородности в плоскости xy, зависимость решения уравнений поля от этих координат во всем пространстве должна быть одинаковой. Это значит, что компоненты k_x, k_y волнового вектора для всех трех волн одинаковы. Отсюда сле-

[1]) Эта формула описывает так называемый *эффект Физо*, впервые предсказанный *Френелем* (*A. Fresnel*, 1818). Влияние дисперсии на этот эффект рассмотрено *Лорентцем* (*H. A. Lorentz*, 1895).

дует прежде всего, что направления распространения всех волн лежат в одной плоскости; выберем ее в качестве плоскости xz.

Из равенств

$$k_{0x} = k_{1x} = k_{2x} \tag{86,1}$$

следует для z-компонент этих векторов:

$$\begin{aligned} k_{1z} &= -k_{0z} = -\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0, \\ k_{2z} &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - k_{0x}^2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\theta_0}; \end{aligned} \tag{86,2}$$

в обеих средах полагаем $\mu = 1$. Вектор $\mathbf{k}_0$, по определению, вещественен. Вместе с ним вещественен также $\mathbf{k}_1$. Величина же k_{2z} в поглощающей среде комплексна, причем корень должен быть взят с таким знаком, чтобы было $\operatorname{Im} k_{2z} > 0$ в соответствии с тем, что преломленная волна затухает в глубь среды 2.

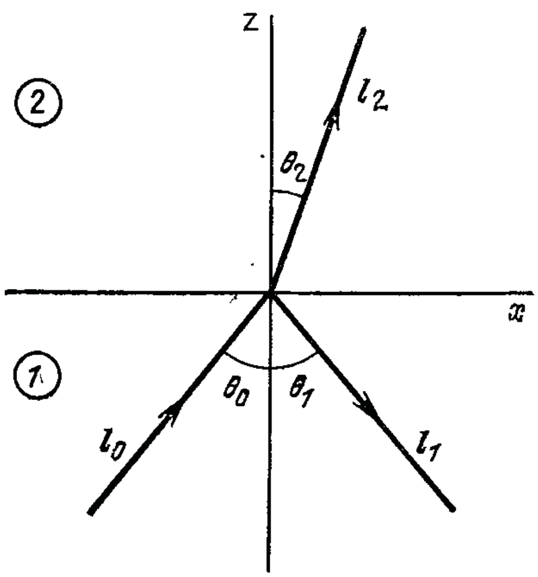

Рис. 46.

Если прозрачны обе среды, то из равенств (86,1) следуют известные законы отражения и преломления

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{86,3}$$

Для определения амплитуд отраженной и преломленной волн надо обратиться к граничным условиям на поверхности раздела ($z = 0$). При этом мы рассмотрим отдельно два случая — когда электрическое поле $\mathbf{E}_0$ лежит в плоскости падения или перпендикулярно к ней; тем самым мы рассматриваем и общий случай, когда $\mathbf{E}_0$ может быть разложено на две такие компоненты.

Предположим сначала, что $\mathbf{E}_0$ перпендикулярно к плоскости падения; из соображений симметрии очевидно, что то же будет относиться и к полям $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ в отраженной и преломленной волнах. Вектор же $\mathbf{H}$ лежит в плоскости xz. Граничные условия требуют непрерывности $E_y = E$ и H_x[1]; согласно (83,3) $H_x = -ck_zE_y/\omega$.

[1]) Граничные условия для нормальных компонент $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ не дают в данном случае ничего нового, в соответствии с тем, что уравнения $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ являются следствием уравнений (83,1).

Поле в среде 1 есть сумма полей падающей и отраженной волн, так что мы получаем два уравнения:

$$E_0+E_1=E_2, \quad k_{0z}(E_0-E_1)=k_{2z}E_2.$$

Экспоненциальные множители в E сокращаются в обеих сторонах равенства ввиду одинаковости k_x (а также частоты ω) во всех трех волнах; ниже под $\mathbf{E}$ подразумеваются везде комплексные амплитуды волн. Решение написанных уравнений приводит к следующим *формулам Френеля*:

$$\begin{gathered}E_1=\frac{k_{0z}-k_{2z}}{k_{0z}+k_{2z}}E_0=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0-\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0+\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0}}E_0,\\ E_2=\frac{2k_{0z}}{k_{0z}+k_{2z}}E_0=\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0+\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0}}E_0.\end{gathered} \tag{86,4}$$

Если прозрачны обе среды, то с помощью соотношений (86,3) можно представить эти формулы в виде

$$E_1=\frac{\sin(\theta_2-\theta_0)}{\sin(\theta_2+\theta_0)}E_0, \quad E_2=\frac{2\cos\theta_0\sin\theta_2}{\sin(\theta_2+\theta_0)}E_0. \tag{86,5}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда $\mathbf{E}$ лежит в плоскости падения; при этом удобнее производить вычисления для магнитного поля, перпендикулярного к плоскости падения. В результате получаются еще две формулы Френеля:

$$\begin{gathered}H_1=\frac{\varepsilon_2k_{0z}-\varepsilon_1k_{2z}}{\varepsilon_2k_{0z}+\varepsilon_1k_{2z}}H_0=\frac{\varepsilon_2\cos\theta_0-\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0)}}{\varepsilon_2\cos\theta_0+\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0)}}H_0,\\ H_2=\frac{2\varepsilon_2k_{0z}}{\varepsilon_1k_{2z}+\varepsilon_2k_{0z}}H_0=\frac{2\varepsilon_2\cos\theta_0}{\varepsilon_2\cos\theta_0+\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0)}}H_0.\end{gathered} \tag{86,6}$$

Если прозрачны обе среды, то эти формулы можно представить в виде

$$H_1=\frac{\operatorname{tg}(\theta_0-\theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0+\theta_2)}H_0, \quad H_2=\frac{\sin 2\theta_0}{\sin(\theta_0+\theta_2)\cos(\theta_0-\theta_2)}H_0. \tag{86,7}$$

Коэффициент отражения R определяется как отношение среднего (по времени) отраженного от поверхности потока энергии к падающему потоку. Каждый из этих потоков дается средним значением z-компоненты вектора Пойнтинга (83,11) соответствующей волны:

$$R=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1|\mathbf{E}_1|^2}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0|\mathbf{E}_0|^2}=\frac{|\mathbf{E}_1|^2}{|\mathbf{E}_0|^2}.$$

При нормальном падении ($\theta_0=0$) оба случая поляризации эквивалентны и коэффициент отражения дается формулой

$$R=\left|\frac{\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}\right|^2. \tag{86,8}$$

Эта формула справедлива как для прозрачной, так и для поглощающей отражающей среды. Если ввести n_2 и $\varkappa_2$ согласно $\sqrt{\varepsilon_2}=n_2+i\varkappa_2$, то, например, при падении из пустоты ($\varepsilon_1=1$) получим

$$R=\frac{(n_2-1)^2+\varkappa_2^2}{(n_2+1)^2+\varkappa_2^2}. \tag{86,9}$$

Дальнейшее обсуждение полученных формул произведем в предположении прозрачности обеих сред. Предварительно сделаем следующее общее замечание. Граница раздела между двумя различными средами представляет собой в действительности не геометрическую поверхность, а тонкий переходный слой. Справедливость формул (86,1) не связана с какими бы то ни было предположениями о характере этого слоя. Вывод же формул Френеля, основанный на использовании условий на границе раздела, предполагает малость толщины переходного слоя δ по сравнению с длиной волны λ. Обычно толщина δ сравнима с междуатомными расстояниями, во всяком случае малыми по сравнению с λ (в противном случае было бы вообще невозможным макроскопическое рассмотрение поля); поэтому и условие $\lambda\gg\delta$ обычно выполняется. В обратном же предельном случае явление преломления имело бы совсем другой характер. При $\delta\gg\lambda$ выполнены условия применимости геометрической оптики (λ мало по сравнению с размерами неоднородностей среды). Поэтому в таком случае можно было бы рассматривать распространение волны как распространение лучей, испытывающих в переходном слое рефракцию, но проходящих через него без всякого отражения. Другими словами, коэффициент отражения был бы равен нулю.

Вернемся к формулам Френеля. При отражении от прозрачной среды коэффициенты пропорциональности между $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_0$ в этих формулах вещественны[1]). Это значит, что фаза волны либо остается неизменной, либо испытывает скачок на π, смотря по знаку этих коэффициентов. В частности, фаза преломленной волны всегда совпадает с фазой падающей волны. Отражение же может сопровождаться изменением фазы[2]). Так, при нормальном падении фаза волны не меняется, если $\varepsilon_1>\varepsilon_2$. Если же $\varepsilon_2>\varepsilon_1$, то векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_0$ имеют противоположные знаки, т. е. происходит изменение фазы волны на π.

---

[1]) Мы оставляем пока в стороне случай так называемого полного отражения (см. ниже).

[2]) Отражение от поглощающей среды приводит, вообще говоря, к возникновению эллиптической поляризации. Явные выражения для амплитудных и фазовых соотношений между тремя волнами при этом очень громоздки. Их можно найти в книге *Стрэттона Дж. А.* Теория электромагнетизма, гл. IX.— М.: ГТТИ, 1948 (*Stratton J. A.* Electromagnetic Theory, ch. IX.— N.Y.: McGraw-Hill, 1941).

Коэффициенты отражения при наклонном падении даются согласно (86,5) и (86,7) формулами

$$R_{\perp}=\frac{\sin^2(\theta_2-\theta_0)}{\sin^2(\theta_2+\theta_0)}, \quad R_{\parallel}=\frac{\operatorname{tg}^2(\theta_2-\theta_0)}{\operatorname{tg}^2(\theta_2+\theta_0)}. \tag{86,10}$$

Здесь и ниже индексы $\perp$ и $\parallel$ отмечают случаи, когда поле $\mathbf{E}$ соответственно перпендикулярно или параллельно плоскости падения. Отметим следующую симметрию: выражения (86,10) не меняются при взаимной замене θ_2 и θ_0 (фазы же отраженных волн при этом меняются, согласно формулам (86,5) и (86,7), на π). Другими словами, коэффициент отражения для волны, падающей из среды *1* под углом θ_0, равен коэффициенту отражения для волны, падающей из среды *2* под углом θ_2.

Замечательным свойством обладает отражение света, падающего под таким углом θ_0, при котором $\theta_0+\theta_2=\pi/2$ (отраженный и преломленный лучи при этом взаимно перпендикулярны). Обозначим это значение посредством θ_p; написав $\sin\theta_p=\sin(\pi/2-\theta_2)=\cos\theta_2$ и воспользовавшись законом преломления (86,3), получим

$$\operatorname{tg}\theta_p=\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}. \tag{86,11}$$

При $\theta_0=\theta_p$ имеем $\operatorname{tg}(\theta_0+\theta_2)=\infty$ и $R_{\parallel}$ обращается в нуль. Поэтому при любом направлении поляризации света, падающего под этим углом, отраженный свет будет поляризован так, что электрическое поле в нем перпендикулярно к плоскости падения. Таким же поляризованным будет отраженный свет и при падении естественного света; все компоненты с другой поляризацией при этом вообще не отразятся. Угол θ_p называют *углом полной поляризации* или *углом Брюстера*. Отметим, что, в то время как отражение может приводить к полной поляризации естественного света, в преломленном свете полная поляризация не достигается ни при каком угле падения.

Отражение и преломление поляризованного света всегда приводит снова к плоскополяризованному свету, но с направлением поляризации, вообще говоря, не совпадающим с таковым у падающего света. Пусть γ_0 — угол между направлением $\mathbf{E}_0$ и плоскостью падения, а γ_1 и γ_2 — аналогичные углы для отраженной и преломленной волн. С помощью формул (86,5) и (86,7) легко получить соотношения

$$\operatorname{tg}\gamma_1=-\frac{\cos(\theta_0-\theta_2)}{\cos(\theta_0+\theta_2)}\operatorname{tg}\gamma_0, \quad \operatorname{tg}\gamma_2=\cos(\theta_0-\theta_2)\operatorname{tg}\gamma_0. \tag{86,12}$$

Углы γ_0, γ_1, γ_2 совпадают при всех углах падения лишь в очевидных случаях $\gamma_0=0$ и $\gamma_0=\pi/2$; они совпадают также при нормальном ($\theta_0=\theta_2=0$) и скользящем ($\theta_0=\pi/2$) падениях (в последнем случае преломленная волна вообще отсутствует). Во всех же остальных случаях из (86,12) следуют (учитывая, что

$0 < \theta_0, \theta_2 < \pi/2$ и полагая, что $0 < \gamma_0 < \pi/2$; $0 < \gamma_1$, $\gamma_2 < \pi$) неравенства

$$\gamma_1 > \gamma_0 > \gamma_2.$$

Таким образом, направление **E** при отражении поворачивается от плоскости падения, а при преломлении — к ней.

Сравнение двух формул (86,10) показывает, что при всех углах падения (за исключением только $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = \pi/2$)

$$R_{\parallel} < R_{\perp}.$$

Поэтому, например, при падении естественного света отраженный свет оказывается частично поляризованным с преимущественным направлением электрического поля, перпендикулярным к плоскости падения. Преломленный же свет будет частично поляризованным с преимущественным направлением **E** в плоскости падения.

Характер зависимости $R_{\parallel}$ и $R_{\perp}$ от угла падения существенно различен. Коэффициент $R_{\perp}$ монотонно возрастает по мере увеличения θ_0, начиная от значения (86,8) при $\theta_0 = 0$. Коэффициент же $R_{\parallel}$, равный тому же значению (86,8) при $\theta = 0$, по мере увеличения θ_0 сначала убывает, обращается в нуль при $\theta_0 = \theta_p$ и лишь затем начинает монотонно возрастать.

При этом надо различать два случая. Если отражение происходит, как говорят, от *оптически более плотной* среды, т. е. $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, то возрастание $R_{\parallel}$ и $R_{\perp}$ продолжается вплоть до $\theta_0 = \pi/2$ (*скользящее падение*), когда оба достигают значения 1. Если же отражающая среда *оптически менее плотная*, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, то оба коэффициента обращаются в 1 уже при угле падения $\theta_0 = \theta_r$, где θ_r определяется равенством

$$\sin\theta_r = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} = n_2/n_1 \tag{86,13}$$

и называется *предельным углом полного отражения*. При $\theta_0 = \theta_r$ угол преломления $\theta_2 = \pi/2$, т. е. преломленная волна распространяется параллельно поверхности раздела.

Отражение под углами $\theta_0 > \theta_r$ от оптически менее плотной среды требует особого рассмотрения. В этом случае k_{2z} (см. (86,2)) часто мнимо, т. е. поле в преломляющей среде затухает. Затухание волны в глубь среды при отсутствии в ней истинного поглощения (диссипации энергии) означает, что поток энергии из первой во вторую среду в среднем отсутствует (путем простого вычисления легко непосредственно убедиться в том, что вектор $\overline{\mathbf{S}}$ среднего потока энергии во второй среде действительно имеет лишь x-компоненту). Другими словами, вся падающая на границу раздела энергия отражается обратно в первую среду, т. е. коэффициенты отражения

$$R_{\perp} = R_{\parallel} = 1.$$

Это явление называется *полным отражением*[1]. В последнем равенстве для $R_\perp$ и $R_\parallel$ можно убедиться, разумеется, и непосредственно с помощью формул Френеля (86,4) и (86,6).

При $\theta_0 > \theta_r$ коэффициенты пропорциональности между $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_0$ становятся комплексными величинами вида $(a-ib)/(a+ib)$. Величины же $R_\perp$ и $R_\parallel$ даются квадратами модулей этих коэффициентов, равными единице. Эти формулы, однако, позволяют определить не только отношение абсолютных значений поля в отраженной и падающей волнах, но и разницу в их фазах. Для этого надо представить их в виде

$$E_{1\perp} = e^{-i\delta_\perp} E_{0\perp}, \quad E_{1\parallel} = e^{-i\delta_\parallel} E_{0\parallel}.$$

Имеем[2])

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_\perp}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \sin^2\theta_0 - \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0}, \quad \operatorname{tg}\frac{\delta_\parallel}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_1 \sin^2\theta_0 - \varepsilon_2)}}{\varepsilon_2\cos\theta_0}. \qquad (86,14)$$

Таким образом, полное отражение сопровождается изменением фазы волны, различным, вообще говоря, для компонент поля, параллельной и перпендикулярной к плоскости падения. Поэтому при отражении волны, поляризованной в плоскости, наклонной к плоскости падения, отраженная волна будет эллиптически поляризована. Для разности фаз $\delta = \delta_\perp - \delta_\parallel$ легко получается выражение

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\theta_0 \sqrt{\varepsilon_1 \sin^2\theta_0 - \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}\sin^2\theta_0}. \qquad (86,15)$$

Эта разность обращается в нуль лишь при $\theta_0 = \theta_r$ и $\theta_0 = \pi/2$.

Задачи

1. Найти закон обращения коэффициента отражения в 1 вблизи угла полного отражения.

Решение. Полагаем $\theta_0 = \theta_r - \delta$, где δ — малая величина, и разлагаем в формулах (86,10) $\sin\theta_0$ и $\cos\theta_0$ по степеням δ. В результате получаем:

$$R_\perp = 1 - 4\sqrt{2\delta}\,(n^2-1)^{-1/4}, \qquad R_\parallel = 1 - 4\sqrt{2\delta}\,n^2(n^2-1)^{-1/4},$$

где $n^2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2 > 1$. Производные $dR/d\delta$ обращаются при $\delta \to 0$ в бесконечность как $\delta^{-1/2}$.

2. Найти коэффициент отражения при почти скользящем падении света из пустоты на поверхность тела с близким к 1 значением ε.

Решение. Формулы (86,10) дают одинаковый коэффициент отражения:

$$R_\perp \approx R_\parallel \approx \frac{\left(\varphi_0 - \sqrt{\varphi_0^2 + \varepsilon - 1}\right)^4}{(\varepsilon-1)^2},$$

где $\varphi_0 = \pi/2 - \theta_0$.

---

[1]) Коэффициент отражения всегда равен единице при отражении от среды с вещественным, но отрицательным ε. В такой среде тоже нет истинного поглощения, но волна не может проникнуть в глубь ее.

[2]) Если $\dfrac{a-ib}{a+ib} = e^{-i\delta}$, то $\operatorname{tg}\dfrac{\delta}{2} = \dfrac{b}{a}$.

3. Определить коэффициент отражения при падении волны из пустоты на границу среды с отличными от единицы ε и μ.

Решение. Вычисления, полностью аналогичные произведенным в тексте, приводят к результату:

$$R_\perp = \left| \frac{\mu \cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0}}{\mu\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0}} \right|^2,$$

$$R_\parallel = \left| \frac{\varepsilon \cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0}}{\varepsilon\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0}} \right|^2.$$

4. Плоскопараллельный слой вещества *2* находится между вакуумом (среда *1*) и произвольной средой *3*. Из вакуума на слой падает свет, поляризованный в плоскости падения (или перпендикулярно к ней). Выразить коэффициент отражения от слоя R через коэффициенты отражения при падении света на полубесконечную среду *2* или *3*.

Решение. Обозначим посредством A_0 и A_1 амплитуды поля (**E** или **H** — смотря по тому, какой из этих векторов параллелен плоскости слоя) в падающей и отраженной волнах. Поле в слое складывается из преломленной волны (амплитуда A_2) и волны, отраженной от границы *2—3* (амплитуда A_2'). Граничное условие на поверхности *1—2* дает равенство вида

$$A_2' = a(A_1 - r_{12}A_0), \tag{1}$$

где a и r_{12} — постоянные. При отражении от полубесконечной среды *2* волна A_2' отсутствует, так что (1) дает $r_{12} = A_1/A_0$, т. е. r_{12} есть амплитуда отражения для этого случая. Еще одно уравнение получается из (1) перестановкой A_1 с A_0 и заменой A_2' на A_2, что соответствует просто изменению знака z-компоненты волнового вектора:

$$A_2 = a(A_0 - r_{12}A_1). \tag{2}$$

В среде *3* имеется только одна (прошедшая) волна. Для ее амплитуды A_3 имеем условия

$$A_2 e^{i\psi} = aA_3, \qquad A_2' e^{-i\psi} = -ar_{32}A_3 \tag{3}$$

(аналогичные условиям (1), (2) с $A_1 = 0$); экспоненциальные множители учитывают изменение фазы волны на толщине слоя h, причем

$$\psi = \frac{\omega}{c} h \sqrt{\varepsilon_2 - \sin^2\theta_0}. \tag{4}$$

Исключая из уравнений (3) A_3, имеем

$$A_2' e^{-i\psi} = r_{23}A_2 e^{i\psi} \tag{5}$$

($r_{23} = -r_{32}$).

Из уравнений (1), (2), (5) найдем амплитуду отражения от слоя:

$$r = \frac{A_1}{A_0} = \frac{r_{12}e^{-2i\psi} + r_{23}}{e^{-2i\psi} + r_{12}r_{23}} \tag{6}$$

(коэффициент отражения $R = |r|^2$). Смысл постоянной r_{23} выясняется из того, что при $h = 0$ r должно совпадать с амплитудой отражения r_{13} от полубесконечной среды *3*; отсюда находим

$$r_{23} = \frac{r_{12} - r_{13}}{r_{12}r_{13} - 1}. \tag{7}$$

Формулы (6), (7) решают поставленную задачу. Подчеркнем, что их вывод не связан с какими-либо предположениями о свойствах сред *2* и *3*, которые могут быть как прозрачными, так и поглощающими.

Если среды *2* и *3* прозрачны, то величины ψ, r_{12}, r_{13} вещественны, а r_{23} представляет собой амплитуду отражения на границе между полубесконечными средами *2* и *3*. Из (6) имеем при этом

$$R=\frac{(r_{12}+r_{23})^2-4r_{12}r_{23}\sin^2\psi}{(r_{12}r_{23}+1)^2-4r_{12}r_{23}\sin^2\psi}. \tag{8}$$

При изменении ψ эта величина меняется в пределах между

$$\left(\frac{r_{12}+r_{23}}{r_{12}r_{23}+1}\right)^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{r_{12}-r_{23}}{r_{12}r_{23}-1}\right)^2;$$

При нормальном падении света $r_{12}=\dfrac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$, и аналогичные соотношения имеют место для r_{13} и r_{23}. Если $n_2^2=n_1n_3$, то $r_{12}=r_{23}$ и при соответствующем выборе толщины слоя R может обратиться в нуль.

Если среда *3* является вакуумом, то $r_{13}=0$, $r_{23}=-r_{12}$ и из (6) имеем

$$r=\frac{r_{12}\left(e^{-2i\psi}-1\right)}{e^{-2i\psi}-r_{12}^2}=-\frac{\operatorname{sh} i\psi}{\operatorname{sh}\left[i\psi+\ln(-r_{12})\right]}. \tag{9}$$

Если при этом среда *2* прозрачна, то

$$R=\frac{4R_{12}\sin^2\psi}{(1-R_{12})^2+4R_{12}\sin^2\psi}.$$

Коэффициент прохождения D через слой (из вакуума в вакуум) совпадает с $1-R$, лишь если среда *2* прозрачна. В противном случае для вычисления D надо исходить из уравнений (1)—(3), положив в них $r_{32}=r_{12}$. «Амплитуда прохождения» d равна:

$$d=\frac{A_3}{A_0}=\frac{1-r_{12}^2}{e^{-i\psi}-r_{12}^2e^{i\psi}}, \tag{10}$$

а коэффициент прохождения $D=|d|^2$.

5. Определить коэффициенты отражения и прохождения при нормальном падении света на пластинку с очень большой комплексной диэлектрической проницаемостью ε.

Решение. В этом случае

$$r_{12}=\frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}\approx-\left(1-\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

и согласно формуле (9) предыдущей задачи

$$r=-\frac{1}{1-(2/\sqrt{\varepsilon})\operatorname{cth} i\psi}, \qquad \psi=\frac{\omega}{c}h\sqrt{\varepsilon}.$$

Если пластинка настолько тонка, что $h\omega/c\ll 1/\sqrt{|\varepsilon|}$, то можно написать

$$r=-\frac{1}{1+(2ic/\varepsilon\omega h)}.$$

При этом можно еще различать два случая:

$$\text{при } \frac{1}{|\varepsilon|}\ll\frac{\omega}{c}h\ll\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}: \quad R=1-\frac{4c}{\omega h}\frac{\varepsilon''}{|\varepsilon|^2},$$

$$\text{при } \frac{\omega}{c}h\ll\frac{1}{|\varepsilon|}: \quad R=\frac{\omega^2h^2}{4c^2}|\varepsilon|^2.$$