ГЛАВА III

# ПОСТОЯННЫЙ ТОК

## § 21. Плотность тока и проводимость

От изучения электрических полей, создаваемых неподвижными зарядами, мы перейдем теперь к рассмотрению стационарного движения зарядов в проводниках (постоянный электрический ток).

Будем обозначать среднюю плотность потока зарядов посредством $\mathbf{j}$; ее называют *плотностью электрического тока*[1]). В постоянном токе пространственное распределение $\mathbf{j}$ не зависит от времени и подчиняется уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \tag{21,1}$$

выражающему собой постоянство полного среднего заряда, заключенного в любой части объема проводника.

Электрическое поле, существующее внутри проводника, по которому течет постоянный ток, тоже постоянно, а потому удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{21,2}$$

т. е. имеет потенциал.

К уравнениям (21,1) и (21,2) должно еще быть присоединено уравнение, связывающее между собой величины $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$. Эта связь зависит от свойств вещества проводника. В огромном большинстве случаев ее можно считать линейной (*закон Ома*).

Если проводник однороден и изотропен, то линейная зависимость сводится к простой пропорциональности

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \tag{21,3}$$

Коэффициент $\sigma$ зависит от рода и состояния проводника; его называют *коэффициентом электропроводности*, или просто *проводимостью* тела.

В однородном проводнике $\sigma = \mathrm{const}$ и подстановка (21,3) в (21,1) дает $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. Поэтому в этом случае потенциал электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

На границе раздела двух проводящих сред нормальная компонента плотности тока должна, очевидно, быть непрерывной.

[1]) В этой главе мы не рассматриваем создаваемого током магнитного поля и соответственно не учитываем обратного влияния этого поля на ток. Учет этого влияния потребует уточнения определения плотности тока, что будет сделано в § 30.

Кроме того, согласно общему условию непрерывности тангенциальной компоненты напряженности (следующему из уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$, ср. (1,7) и (6,9)) должно быть непрерывно отношение $\mathbf{j}/\sigma$. Таким образом, граничные условия для плотности тока гласят:

$$j_{n1}=j_{n2}, \quad \mathbf{j}_{t1}/\sigma_1=\mathbf{j}_{t2}/\sigma_2 \tag{21,4}$$

или для напряженности поля

$$\sigma_1 E_{n1}=\sigma_2 E_{n2}, \quad \mathbf{E}_{t1}=\mathbf{E}_{t2}. \tag{21,5}$$

На границе же проводника с непроводящей средой имеем просто $j_n=0$ или $E_n=0$ [1]).

Электрическое поле, поддерживающее ток, производит над перемещающимися в проводнике заряженными частицами (носителями тока) механическую работу; работа, производимая в 1 с в единице объема, равна, очевидно, произведению $\mathbf{jE}$. Эта работа диссипируется в веществе проводника, переходя в тепло. Таким образом, количество тепла, выделяющегося в 1 с в 1 см$^3$ однородного проводника, равно

$$\mathbf{jE}=\sigma E^2=j^2/\sigma \tag{21,6}$$

(*закон Джоуля—Ленца*).

Выделение тепла приводит к возрастанию энтропии тела. При выделении тепла $dQ=\mathbf{jE}\,dV$ энтропия данного элемента объема увеличивается на $dQ/T$. Поэтому скорость изменения полной энтропии тела равна

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt}=\int\frac{\mathbf{jE}}{T}\,dV. \tag{21,7}$$

В силу закона возрастания энтропии эта производная должна быть положительной. Подставив в нее $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$, мы видим, что из этого требования можно сделать заключение о положительности проводимости $\sigma$.

В анизотропном теле (монокристалле) направления векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$, вообще говоря, не совпадают и линейная связь между ними выражается формулами вида

$$j_i=\sigma_{ik}E_k, \tag{21,8}$$

где величины $\sigma_{ik}$ составляют симметричный (см. ниже) тензор второго ранга (*тензор проводимости*).

---

[1]) Обратим внимание на то, что уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$, $\operatorname{div}(\sigma\mathbf{E})=0$ и граничные условия (21,5) к ним обнаруживают формальную аналогию с уравнениями электростатического поля в диэлектриках, отличаясь от них лишь заменой $\varepsilon$ на $\sigma$. Это обстоятельство позволяет находить решения задач о распределении тока в неограниченной проводящей среде непосредственно по решениям аналогичных электростатических задач. При наличии границ проводника с непроводящей средой эта аналогия не приводит к цели, так как в электростатике нет сред с $\varepsilon=0$.

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Сама по себе симметрия кристалла могла бы допустить наличие свободного члена в линейной связи между **j** и **E**, т. е. формулу вида

$$j_i = \sigma_{ik} E_k + j_i^{(0)}$$

с постоянным вектором $\mathbf{j}^{(0)}$. Наличие такого члена означало бы «пироэлектричность» проводника — в отсутствие тока ($\mathbf{j}=0$) в нем существовало бы отличное от нуля поле. В действительности, однако, это невозможно в силу закона возрастания энтропии: член $\mathbf{j}^{(0)}\mathbf{E}$ в подынтегральном выражении в (21,7) заведомо мог бы иметь оба знака, в результате чего $d\mathcal{S}/dt$ не могла бы быть существенно положительной величиной.

Подобно тому как в изотропной среде условие $d\mathcal{S}/dt > 0$ приводит к положительности $\sigma$, так в анизотропном теле из этого условия следует положительность главных значений тензора $\sigma_{ik}$.

Зависимость числа независимых компонент тензора от симметрии кристалла такая же, как у всякого симметричного тензора второго ранга (см. § 13): у двухосных кристаллов все три главных значения различны, у одноосных — два из них одинаковы, а у кубических — все три одинаковы, т. е. кубический кристалл в отношении своих свойств проводимости ведет себя как изотропное тело.

Симметричность тензора проводимости

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \tag{21,9}$$

является следствием *принципа симметрии кинетических коэффициентов*. Формулировка этого общего принципа, принадлежащего *Л. Онсагеру*, удобная для применения здесь и ниже (в §§ 26—28), заключается в следующем (ср. V § 120).

Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — некоторые величины, характеризующие состояние тела в каждой его точке. Наряду с ними вводим величины

$$X_a = -\frac{\partial S}{\partial x_a}, \tag{21,10}$$

где $S$ — энтропия единицы объема тела, а производная берется при постоянной энергии этого объема. В состоянии, близком к равновесному, величины $x_a$ близки к своим равновесным значениям, а величины $X_a$ малы. При этом в теле будут происходить процессы, стремящиеся привести его в состояние равновесия. О скоростях изменения величин $x_a$ при этих процессах можно обычно утверждать, что они являются в каждой точке тела функциями только значений величин $x_a$ (или $X_a$) в тех же точках. Разлагая эти функции в ряд по степеням $X_a$ и ограничиваясь линейными членами в разложении, получим соотношения вида

$$\frac{\partial x_a}{\partial t} = -\sum_b \gamma_{ab} X_b. \tag{21,11}$$

Тогда можно утверждать, что коэффициенты $\gamma_{ab}$ (*кинетические коэффициенты*) симметричны по индексам $a$ и $b$ [1]):

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}. \tag{21,12}$$

Для фактического использования этого принципа необходимо, выбрав тем или иным способом величины $x_a$ (или прямо их производные $\dot{x}_a$), определить соответствующие $X_a$. Эта задача обычно может быть весьма просто решена с помощью формулы, определяющей скорость изменения со временем полной энтропии тела:

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = -\int \sum_a X_a \frac{\partial x_a}{\partial t} dV, \tag{21,13}$$

где интегрирование производится по всему объему тела.

В данном случае при прохождении тока через проводник для этой скорости мы имеем формулу (21,7). Сравнивая ее с (21,13), мы видим, что если в качестве величин $\dot{x}_a$ выбрать компоненты вектора плотности тока $\mathbf{j}$, то соответствующими величинами $X_a$ будут компоненты вектора $-\mathbf{E}/T$. Сравнение же формул (21,8) и (21,11) показывает, что роль кинетических коэффициентов играют при этом умноженные на $T$ компоненты тензора проводимости, симметрия которого следует, таким образом, непосредственно из общих соотношений (21,12).

### Задачи

1. В проводящую среду погружена система электродов, поддерживаемых при постоянных потенциалах $\varphi_a$. С каждого из электродов стекает ток $J_a$. Определить полное джоулево тепло, выделяющееся в среде в 1 секунду.

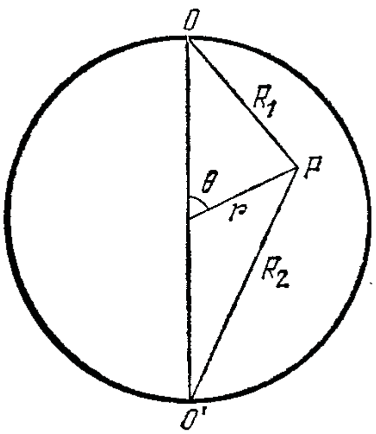

Рис. 15.

Решение. Искомое тепло $Q$ дается интегралом

$$Q = \int \mathbf{jE}\, dV = -\int \mathbf{j}\nabla\varphi\, dV = -\int \operatorname{div}(\varphi\mathbf{j})\, dV,$$

взятым по объему среды. Преобразуем этот интеграл в интеграл по поверхности, учитывая, что на внешней границе среды $j_n = 0$, а на поверхностях электродов $\varphi = \text{const} \equiv \varphi_a$. В результате получим

$$Q = \sum_a \varphi_a J_a.$$

2. Определить распределение потенциала в проводящей сфере, в которую ток $J$ входит через один полюс и выходит через противоположный полюс.

Решение. Вблизи полюсов $O$ и $O'$ (рис. 15) потенциал соответственно должен иметь вид

$$\varphi = \frac{J}{2\pi\sigma R_1} \quad \text{и} \quad \varphi = -\frac{J}{2\pi\sigma R_2},$$

[1]) Подразумевается, что величины $x_a$ и $x_b$ ведут себя одинаковым образом по отношению к изменению знака времени.

где $R_1$, $R_2$ — расстояния до полюсов. Эти функции удовлетворяют уравнению Лапласа, а интегралы $-\sigma\int\nabla\varphi\cdot d\mathbf{f}$ по бесконечно малым полусферам вокруг точек $O$ и $O'$ равны $\pm J$. Ищем потенциал в произвольной точке $P$ сферы в виде

$$\varphi=\frac{J}{2\pi\sigma}\left\{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\psi\right\},$$

где $\psi$ есть решение уравнения Лапласа, не имеющее полюсов внутри сферы и на ее поверхности. Из симметрии очевидно, что $\psi$ (как и $\varphi$) есть функция только сферических координат $r$ и $\theta$.

На поверхности сферы ($r=a$) должно быть $\partial\varphi/\partial r=0$. Произведя дифференцирование, найдем отсюда для $\psi$ следующее граничное условие:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \quad \text{при} \quad r=a.$$

Если $f(r,\theta)$ есть какое-либо решение уравнения Лапласа, то функция $\int\limits_0^r r^{-1}f(r,\theta)\,dr$ тоже есть решение[1]). Сравнивая с написанным граничным условием, легко заключить, что ему удовлетворяет решение

$$\psi=\frac{1}{2}\int\limits_0^r\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\frac{dr}{r}.$$

Подставив $R_{1,2}=(a^2+r^2\mp 2ar\cos\theta)^{1/2}$ и произведя интегрирование, получим окончательно

$$\varphi=\frac{J}{2\pi\sigma}\left\{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{2a}\left(\operatorname{Arsh}\frac{a+r\cos\theta}{r\sin\theta}-\operatorname{Arsh}\frac{a-r\cos\theta}{r\sin\theta}\right)\right\}$$

($\varphi$ отсчитывается от значения $\varphi=0$ при $r=0$).

3. Показать, что распределение тока в проводящей среде отвечает минимуму диссипации энергии.

Решение. Речь идет о минимуме интеграла

$$\int\mathbf{jE}\,dV=\int\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}\,dV$$

при дополнительном условии $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$, выражающем сохранение заряда. Варьируя по $\mathbf{j}$ интеграл

$$\int\left(\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}-2\varphi\operatorname{div}\mathbf{j}\right)dV$$

($2\varphi$ — лагранжев неопределенный множитель) и приравнивая вариацию нулю, получим уравнение $\mathbf{j}=-\sigma\nabla\varphi$ или

$$\operatorname{rot}(\mathbf{j}/\sigma)=0,$$

совпадающее с уравнениями (21,2) и (21,3).

[1]) В этом легко убедиться как непосредственной проверкой, так и на основании того, что искомое решение $f(r,\theta)$ уравнения Лапласа, зависящее только от переменных $r$, $\theta$, может быть представлено в виде

$$f=\sum_n c_n r^n P_n(\cos\theta),$$

где $c_n$ — постоянные, а $P_n$ — полиномы Лежандра.

## § 22. Эффект Холла

Если проводник находится во внешнем магнитном поле **H**, то связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля по-прежнему дается соотношениями

$$j_i = \sigma_{ik} E_k,$$

но компоненты тензора проводимости $\sigma_{ik}$ являются функциями **H** и, что особенно существенно, уже не симметричны по индексам $ik$. Симметрия этого тензора была доказана в § 20, исходя из принципа симметрии кинетических коэффициентов. Но в магнитном поле, как известно, формулировка этого принципа несколько меняется: одновременно с перестановкой индексов у кинетических коэффициентов должно быть изменено на обратное также и направление магнитного поля (см. V § 120). Поэтому для компонент тензора $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ будем теперь иметь соотношения

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H}) = \sigma_{ki}(-\mathbf{H}). \tag{22,1}$$

Величины же $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ и $\sigma_{ki}(\mathbf{H})$ отнюдь не равны друг другу.

Как и всякий общий тензор второго ранга, тензор $\sigma_{ik}$ можно разделить на симметричную и антисимметричную части, которые мы обозначим соответственно как $s_{ik}$ и $a_{ik}$:

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + a_{ik}. \tag{22,2}$$

По определению,

$$s_{ik}(\mathbf{H}) = s_{ki}(\mathbf{H}), \quad a_{ik}(\mathbf{H}) = -a_{ki}(\mathbf{H}), \tag{22,3}$$

а из (22,1) следует, что

$$\begin{aligned} s_{ik}(\mathbf{H}) &= s_{ki}(-\mathbf{H}) = s_{ik}(-\mathbf{H}), \\ a_{ik}(\mathbf{H}) &= a_{ki}(-\mathbf{H}) = -a_{ik}(-\mathbf{H}). \end{aligned} \tag{22,4}$$

Таким образом, компоненты тензора $s_{ik}$ являются четными, а тензора $a_{ik}$—нечетными функциями магнитного поля.

Как известно, всякий антисимметричный тензор второго ранга $a_{ik}$ эквивалентен (дуален) некоторому аксиальному вектору, с которым его компоненты связаны посредством

$$a_{xy} = a_z, \quad a_{xz} = -a_y, \quad a_{yz} = a_x. \tag{22,5}$$

С помощью этого вектора компоненты произведения $a_{ik}E_k$ могут быть написаны в виде компонент векторного произведения $[\mathbf{Ea}]$:

$$j_i = \sigma_{ik} E_k = s_{ik} E_k + [\mathbf{Ea}]_i. \tag{22,6}$$

Джоулево тепло, выделяющееся при прохождении тока, определяется произведением $\mathbf{jE}$. В силу перпендикулярности векторов $[\mathbf{Ea}]$ и $\mathbf{E}$ их произведение обращается тождественно в нуль, так что

$$\mathbf{jE} = s_{ik}E_iE_k, \tag{22,7}$$

т. е. джоулево тепло определяется (при заданной напряженности $\mathbf{E}$) одной лишь симметричной частью тензора проводимости.

Если магнитное поле достаточно слабое, можно разложить компоненты тензора проводимости по его степеням. Ввиду нечетности функции $\mathbf{a}(\mathbf{H})$, в разложение этого вектора войдут только члены нечетных степеней. Первые члены разложения линейны по полю, т. е. имеют вид

$$a_i = \alpha_{ik}H_k. \tag{22,8}$$

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{H}$ оба аксиальны; поэтому постоянные $\alpha_{ik}$ составляют обычный (полярный) тензор. В разложение же четных функций $s_{ik}(\mathbf{H})$ входят только члены с четными степенями. Первый член разложения есть проводимость $\sigma_{ik}^{(0)}$ в отсутствие поля, а первые поправочные члены квадратичны по полю:

$$s_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} + \beta_{iklm}H_lH_m. \tag{22,9}$$

Тензор $\beta_{iklm}$ симметричен как по индексам $ik$, так и по индексам $lm$.

Таким образом, основной, линейный по полю, эффект влияния магнитного поля заключен в члене $[\mathbf{Ea}]$ (*эффект Холла*). Он состоит, как мы видим, в появлении тока, перпендикулярного к электрическому полю и по величине пропорционального напряженности магнитного поля. Следует, однако, иметь в виду, что в общем случае произвольной анизотропной среды холловский ток не является единственным, перпендикулярным к $\mathbf{E}$; такие составляющие может иметь и не холловский ток $s_{ik}E_k$.

Эффект Холла имеет и другой аспект, явствующий из обратных формул, выражающих поле $\mathbf{E}$ через плотность тока:

$$E_i = \sigma_{ik}^{-1}j_k.$$

Обратный тензор $\sigma_{ik}^{-1}$, как и прямой, можно разложить на симметричную часть (которую мы обозначим как $\rho_{ik}$) и антисимметричную, дуальную некоторому аксиальному вектору $\mathbf{b}$:

$$E_i = \rho_{ik}j_k + [\mathbf{jb}]_i. \tag{22,10}$$

Тензор $\rho_{ik}$ и вектор $\mathbf{b}$ обладают такими же свойствами, как и $s_{ik}$ и $\mathbf{a}$. В частности, в слабых полях вектор $\mathbf{b}$ линеен по магнитному полю. В формулах (22,10) эффект Холла представляется членом $[\mathbf{jb}]$, т. е. появлением электрического поля, перпендикулярного к току и по величине пропорционального магнитному полю (и току $\mathbf{j}$).

Все написанные выше соотношения очень упрощаются, если проводник изотропен. В этом случае из соображений симметрии очевидно, что вектор **b** (или **a**) может быть направлен только вдоль магнитного поля. Единственными же отличными от нуля компонентами тензора $\rho_{ik}$ являются $\rho_{xx}=\rho_{yy}$ и $\rho_{zz}$, где ось $z$ выбрана вдоль направления поля. Обозначив эти две величины посредством $\rho_\perp$ и $\rho_\parallel$ и выбрав плоскость $xz$ проходящей через направление тока, будем иметь

$$E_x=\rho_\perp j_x,\quad E_y=-bj_x,\quad E_z=\rho_\parallel j_z. \tag{22,11}$$

Отсюда видно, что в изотропном проводнике холловское поле есть единственное электрическое поле, перпендикулярное одновременно току и магнитному полю.

В слабых магнитных полях связь векторов **b** и **H** дается (в изотропном теле) просто соотношением

$$\mathbf{b}=-R\mathbf{H}. \tag{22,12}$$

Постоянная $R$ (*постоянная Холла*) может быть как положительной, так и отрицательной. Что касается квадратичных по **H** членов в зависимости между **E** и **j** (входящих через тензор $\rho_{ik}$), то их вид ясен из того, что единственными векторами, которые можно составить из **j** и **H** (линейными по **j** и квадратичными по **H**), являются $\mathbf{H}(\mathbf{jH})$ и $\mathbf{j}H^2$. Поэтому общий вид зависимости между **E** и **j** в изотропном теле с учетом квадратичных по **H** членов дается формулой

$$\mathbf{E}=\rho^{(0)}\mathbf{j}+R[\mathbf{Hj}]+\beta_1\mathbf{j}H^2+\beta_2\mathbf{H}(\mathbf{Hj}). \tag{22,13}$$

**Задача**

Выразить компоненты обратного тензора $\sigma_{ik}^{-1}$ через компоненты $s_{ik}$ и **a**.

Решение. Проще всего производить вычисления, выбрав систему координат $x$, $y$, $z$, в которой тензор $s_{ik}$ приведен к главным осям, после чего по виду получающихся выражений легко заключить об их общей форме в произвольной системе координат. Определитель тензора:

$$|\sigma|=\begin{vmatrix} s_{xx} & a_z & -a_y \\ -a_z & s_{yy} & a_x \\ a_y & -a_x & s_{zz} \end{vmatrix}=s_{xx}s_{yy}s_{zz}+s_{xx}a_x^2+s_{yy}a_y^2+s_{zz}a_z^2.$$

Очевидно, что в общем случае

$$|\sigma|=|s|+s_{ik}a_ia_k.$$

Составляя также миноры этого определителя, найдем компоненты обратного тензора

$$\sigma_{xx}^{-1}=\rho_{xx}=\frac{s_{yy}s_{zz}+a_x^2}{|\sigma|},\quad \sigma_{xy}^{-1}=\rho_{xy}+b_z=\frac{a_xa_y-a_zs_{zz}}{|\sigma|},\ \ldots$$

Общие выражения, переходящие в эти при нашем выборе системы координат:

$$\rho_{ik}=\frac{1}{|\sigma|}\left\{s_{ik}^{-1}|s|+a_ia_k\right\},\qquad b_i=-\frac{1}{|\sigma|}s_{ik}a_k,$$

чем и решается поставленная задача.