

ელ. და მაგ. ვედიანი მაქსველ-ბოლტცმანის განტოლებები

10-1

მაქსველ-ბოლტცმანის განტოლებები $\rho = 0$ და $\vec{J} = 0$.

$$\begin{cases} [\nabla \times \vec{E}] = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ [\nabla \times \vec{B}] = \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

თუ გავიყვანოთ განტოლებები ერთმანეთი: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$

მაქსველ-ბოლტცმანის განტოლებები უსაზღვრო სივრცეში და მაგნიტური ველები დატვირთულობის გარეშე.

$$\begin{cases} [\nabla \times \vec{E}] = - \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ [\nabla \times \vec{H}] = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

განვიხილოთ მაგნიტური ველები, სადა: $\begin{cases} \mu = \text{const.} \\ \epsilon \neq \text{const.} \end{cases}$
 $\epsilon = \epsilon(\vec{r})$

ვთქვათ ვიღაც დროში: $\vec{E} = \int \vec{\tilde{E}}(\omega, \vec{r}) \exp(i\omega t) d\omega$

და მოვიყვანოთ: $\vec{E} \sim \exp(i\omega t)$

მაშინ $\frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \sim i\omega \vec{E}(\omega)$

თუ მაქსველ-ბოლტცმანის განტოლებები უსაზღვრო სივრცეში დატვირთულობის გარეშე:

$$\begin{cases} [\nabla \times \vec{E}] = - i\omega \mu \vec{H} \\ [\nabla \times \vec{H}] = i\omega \epsilon \vec{E} \end{cases}$$

ճշգրտագին:

$$\begin{cases} \vec{H} = -\frac{[\nabla \times \vec{E}]}{i\omega\mu} \\ \vec{E} = \frac{[\nabla \times \vec{H}]}{i\omega\varepsilon} \end{cases}$$

Ենթադրենք, որ:

$$[\nabla \times \vec{H}] = [\vec{\nabla} \times \left(+\frac{[\nabla \times \vec{H}]}{i\omega\varepsilon} \right)] = -i\omega\mu\vec{H}$$

$\omega = \text{const.}$ $\left[\nabla \times \frac{[\nabla \times \vec{H}]}{\varepsilon} \right] = \omega^2\mu\vec{H}$

$$-\frac{(\nabla\varepsilon)}{\varepsilon^2} [\nabla \times \vec{H}] + \frac{1}{\varepsilon} [\nabla \times [\nabla \times \vec{H}]] = \omega^2\mu\vec{H}$$

ճշգրտագին: $[\nabla^a \times [\nabla^b \times \vec{H}^c]] = \vec{\nabla} \cdot (\nabla \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H}$

$\nabla \vec{H} = 0$ (որովհետև $\nabla \vec{B} = 0$)

$$-\frac{(\nabla\varepsilon)}{\varepsilon^2} [\nabla \times \vec{H}] - \frac{\nabla^2 \vec{H}}{\varepsilon} = \omega^2\mu\vec{H}, \quad (\nabla^2 \equiv \Delta)$$

$$\boxed{\Delta \vec{H} + \frac{(\nabla\varepsilon)}{\varepsilon} \cdot [\nabla \times \vec{H}] + \mu\varepsilon \cdot \omega^2 \vec{H} = 0}$$

ճշգրտագին թմադրենք $\vec{E}$ -ը:

$$\left[\nabla \times \left(-\frac{[\nabla \times \vec{E}]}{i\omega\mu} \right) \right] = +i\omega\varepsilon\vec{E}$$

$\omega, \mu = \text{const.}$

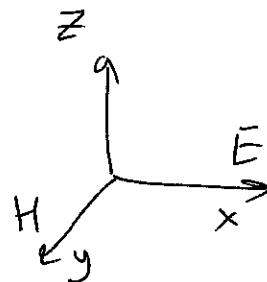
$$-[\nabla \times [\nabla \times \vec{E}]] = -\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}$$

გვინტერესებს, რომ ნივთიერება $\rho = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.

$$\text{და } [\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}]] = -\Delta \vec{E}$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} + \mu \epsilon \omega^2 \vec{E} = 0}$$

დავიხილოთ კოორდინატის სისტემა.



z - ძალის გავრცელების მიმართულება.

ნივთიერება უცვლელია, რომ $\vec{E} \perp \vec{H}$, დავუშვათ რომ $\begin{pmatrix} \vec{E} \parallel \vec{e}_x, \\ \vec{H} \parallel \vec{e}_y \end{pmatrix}$

მა სისტემაში: $\vec{E} = (E, 0, 0)$

$$\vec{H} = (0, H, 0)$$

$$\nabla E = \left(\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial y}, \frac{\partial E}{\partial z} \right)$$

დავუშვათ

$$\boxed{E = E(z)}$$

აქედან: $\nabla E = (0, 0, E'(z))$

$$, \quad \left(E'(z) \equiv \frac{dE(z)}{dz} \right)$$

ჩვენ გვინტერესებს განვიხილოთ x მიმართულებით

$$(\Delta \vec{E})_x + (\mu \epsilon \omega^2 \vec{E})_x = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E + \mu \epsilon \omega^2 E = 0}$$

გვინტერესებს განვიხილოთ y მიმართულებით

$$(\Delta \vec{H})_y + \left(\frac{\nabla E}{E} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{H}] \right)_y + (\mu \epsilon \omega^2 \vec{H})_y = 0$$

$$\Delta H + \frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial z} + \mu \varepsilon \omega^2 H = 0$$

14-4

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H + \frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial z} + \mu \varepsilon \omega^2 H = 0$$

სივსრულის დაშლა:

$$\begin{cases} E \sim \exp(-i\alpha x) \\ H \sim \exp(-i\alpha y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial x} = -i\alpha E \\ \frac{\partial H}{\partial y} = -i\alpha H \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 E}{dz^2} + (\mu \varepsilon \omega^2 - \alpha^2) E = 0 \\ \frac{d^2 H}{dz^2} + \frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon} \frac{dH}{dz} + (\mu \varepsilon \omega^2 - \alpha^2) H = 0 \end{cases}$$

სადა, როგორც აღვნიშნეთ უმ. შტ. ძალის ანგარიშს
გავრცელება, სადაც $\mu = \text{const}$, $\varepsilon = \varepsilon(z)$.

დავუშვათ:

გამოყვება უმ. შტ. ძალის ანგარიშს
გავრცელება, სადაც:

$$1) \quad \varepsilon = \varepsilon(z)$$

$$\mu = \mu(z)$$

$$2) \quad \varepsilon = \varepsilon(z)$$

$$\mu = \mu(x)$$

აშუბლსა და პარტიკულარულ უმნიშვნელობას:

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + (\mu \epsilon \omega^2 - \kappa^2) E = 0$$

$$\Omega^2 \equiv \mu \epsilon \omega^2 - \kappa^2, \quad \frac{d^2 E}{dz^2} + \Omega^2 E = 0$$

WKB აშუბლნი: საშუალო, რეალური ($\Omega'(z) \ll \Omega^2$)

აღიზიანებული პარტიკულარული. (ე.წ. ძალა) = $\begin{pmatrix} \text{გამოძახებული} \\ \text{რეალური} \\ \text{პარტიკულარული} \end{pmatrix}$

აშუბლნი: $E = \frac{Ae}{\sqrt{\Omega}} \exp\left(\pm i \int \Omega dz\right)$

1) $\Omega^2 > 0$ $E = \text{Re}\left(\frac{Ae}{\sqrt{\Omega}} \exp\left(\pm i \int \Omega dz\right)\right) \sim \sin \varphi$
 მსხვილობის აშუბლნი.

2) $\Omega^2 < 0$ $E \sim \exp(\pm \sigma z)$ $\sigma = i\Omega$

გამოსახული Ω : ელემენტარული პიკი და კლასიკური
 აშუბლნი.

$|E| = \left(\frac{Ae}{\sqrt{\Omega}}\right)^2$, ანუ უ.წ. ძალის პარტიკულარული რეალური
 ე.წ. აშუბლნი რეალური: I_A .

$$I_A \equiv E \cdot \Omega$$

შეგვიჩვენა გარტმალა შეგვიძენ- სმბნგნგნგნგ.

11-6

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + \frac{\epsilon'(z)}{\epsilon} \frac{dH}{dz} + (\mu \epsilon \omega^2 - \alpha^2) H = 0$$

შეგვიჩვენა გარტმალა, რამდენად გააჩნდა ნივთი ნივთივთი $\left(\frac{dH}{dz}\right)$

$$H \equiv \bar{H} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{\epsilon'(z)}{\epsilon} dz\right)$$

შეგ:

$$H' = \bar{H}' \cdot \exp + \frac{1}{2} \frac{\epsilon'(z)}{\epsilon} \cdot \bar{H} \cdot \exp.$$

$$H'' = \bar{H}'' \cdot \exp - \frac{\epsilon'(z)}{\epsilon} \bar{H}' \cdot \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon'(z)}{\epsilon}\right)' \bar{H} \exp + \frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon'(z)}{\epsilon}\right)^2 \bar{H} \exp;$$

შეგ:

$$\bar{H}'' \exp - \frac{\epsilon'}{\epsilon} \bar{H}' \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon'(z)}{\epsilon}\right)' \bar{H} \exp + \frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right)^2 \bar{H} \exp + \frac{\epsilon'(z)}{\epsilon} \cdot \left(\bar{H}' \exp - \frac{1}{2} \frac{\epsilon'}{\epsilon} \bar{H} \exp\right) + [\mu \epsilon \omega^2 - \alpha^2] \bar{H} \exp = 0$$

exp - სმბნგნგნგ;

$$\bar{H}'' + \left[\mu \epsilon \omega^2 - \alpha^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right)' - \frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right)^2 \right] \bar{H} = 0$$

გარტმალა E სმბნგნგნგ გარტმალა დაბნენა

შეგნგ - გარტმალა, შეგნგ შეგნგ შეგნგნგნგ:

$$\begin{cases} \bar{H} = H \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \int \frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon} dz\right) \\ \bar{\Omega}^2 \equiv \mu \varepsilon \omega^2 - \mathcal{E}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)' - \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^2 = \Omega^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)' - \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^2 \end{cases}$$

$$\frac{d^2 \bar{H}}{dz^2} + \bar{\Omega}^2 \bar{H} = 0$$

შინჯის WKB მიხედვით:

$$\bar{H} = \frac{A_m}{\sqrt{\bar{\Omega}}} \exp\left(\pm i \int \bar{\Omega} dz\right)$$

ძველს შევხვდებით ყოველთვის:

$$\bar{\Omega}^2 > 0$$

$$\text{ახლ } \Omega^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)' - \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^2$$

დავუბნო.

1. შიდა ელექტრონული დონეები
ელექტრონული E და შიდა-ფოტონური H ვალს
დავუბნოთ, როდესაც
$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{z}{z_0}\right)$$

2. დამყარება (კომპლექსური) ელექტრონული
ელექტრონული და შიდა-ფოტონური კომპლექსები
შეიქმნება შიდა-ფოტონური შიდა: A_e, A_m

შეიქმნება შიდა-ფოტონური ელექტრონული კომპლექსები:
 $-i \mathcal{E} E = \mu \omega H$