

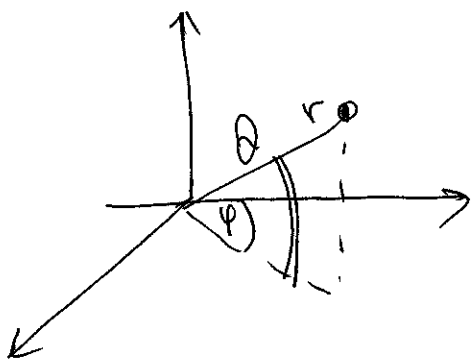
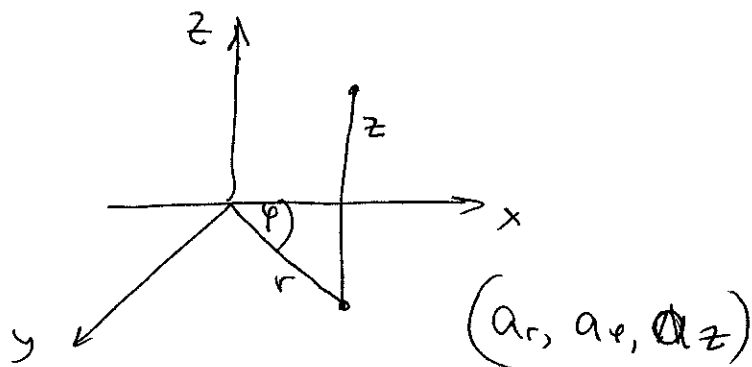
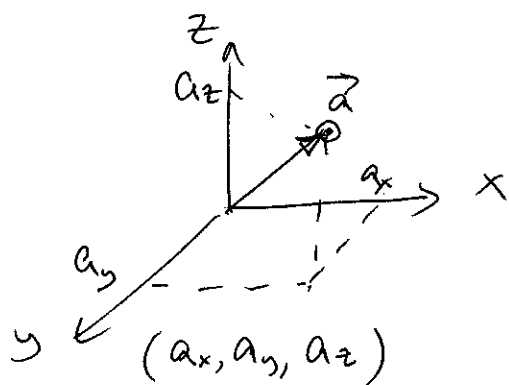
წილ-მნიშვნელობა სივრცეში

2.1

დეკარტის სივრცეობა სივრცეში: (x, y, z)

ცილინდრული სივრცეობა სივრცეში: (r, φ, z)

სფერული სივრცეობა სივრცეში: (r, φ, θ)



ცილინდრული:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

სფერული:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{Cartesian})$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{Cylindrical})$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A_\theta) \quad (\text{Spherical})$$

Եզրային լավանդան:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right);$$

Միակերպային լավանդան:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Եզրային լավանդան:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Սկզբնական ծանոթություն.
Ձեռն. Ватерман Топтыгуш,
ՅՅ. 20

შავალაი:

იზოვრ მუხის სივსკის განწლუბ აუ ცნობილ ზოტწლუბ:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$$

მნიშვნელოვანია უმწლბათ სსტეშის ასტვია:
ამოცანის სსტეშის გავალწლწწწწ.

ტეშის სსტეშა: $\Phi(x, y, z)$ $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

სვსტეშ სსტეშა: $\Phi(r, \varphi, \theta) = \Phi(r)$

მუხის განწლუბის სპწწწლუბ გმწწწწწ წესწწის განწლუბ:

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ამოცანის გაწწწა ცეწწწლუბი სსტეშა:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0.$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

$\rho(r)$ — მუხის განწლუბის სივსკის

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e^{-\alpha r}}{r} \cdot \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{r} e^{-\alpha r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right) - \frac{e^{-\alpha r}}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right) \right] = \boxed{2.4}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\cancel{\frac{\alpha}{2r}} - \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{r^2} - \cancel{\frac{\alpha}{2r}} \right] e^{-\alpha r} = -\frac{q e^{-\alpha r}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{2} \right)$$

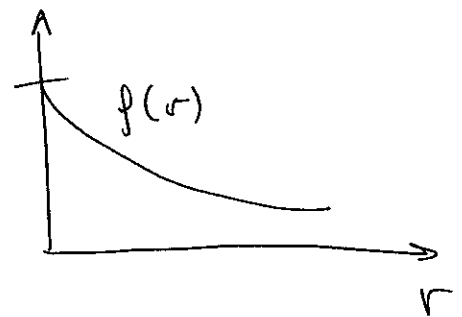
$$r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} e^{-\alpha r} \left(1 + \alpha r + \frac{\alpha^2 r^2}{2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[(\alpha + \alpha r) e^{-\alpha r} - \left(\alpha + \alpha r + \frac{\alpha^2 r^2}{2} \right) e^{-\alpha r} \right] =$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\cancel{\alpha} + \cancel{\alpha r} - \cancel{\alpha} - \cancel{\alpha r} - \frac{\alpha^2 r^2}{2} \right] e^{-\alpha r} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \cdot \alpha^2 r^2 e^{-\alpha r}$$

$$\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0} \cdot \alpha^2 e^{-\alpha r}$$

$$\rho(r) = -\frac{q}{8\pi} \cdot \alpha^2 e^{-\alpha r}$$



დატოვებული გამოვლიანების ფუნქციის
სხვა ფორმის გამოხატულება:

$$\rho(x, y, z) = -\frac{q}{8\pi} \cdot \alpha^2 \cdot \exp\left(-\alpha(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\right)$$

ელექტრული პოტენციალი

2.5

განვიხილოთ მუხტები q_1, q_2, q_3 ,

სხვათაშორის ელექტრული ძალები ძალიან მუხტების ნებისმიერ წყვილ-წყვილად უხარისხებლად ეხმარებას უნდა:

$$W = W_{12} + W_{13} + W_{23}$$

სადაც უხარისხებლად სიმეტრიულად $W_{12} = W_{21}$

$$W = \frac{1}{2} (W_{12} + \underline{W_{21}}) + \frac{1}{2} (W_{13} + \underline{W_{31}}) + \frac{1}{2} (\underline{W_{23}} + \underline{W_{32}})$$

$$W = \frac{1}{2} \left((W_{12} + W_{13}) + (W_{21} + W_{23}) + (W_{31} + W_{32}) \right)$$

ან ზოგადად:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_{ij} \quad i \neq j$$

პოტენციალი ელექტრული: $W_{ij} = q_i \Phi_j$

საკუთარი პოტენციალი: $\Phi_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r}_j|}$

$$W_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

სხვათაშორის:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

ձյնծրծի յնքնաժամանակացի:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \iint \frac{\rho(\vec{r}_1)\rho(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2$$

և համարժեցում:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r}) dV$$

լապլասի թանձրացում $\rho(\vec{r}) = -\epsilon_0 \Delta\Phi(\vec{r})$

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \Phi(\vec{r}) \Delta\Phi(\vec{r}) dV$$

$$\int \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx = \int \Phi d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \left[\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot d\Phi$$

(հստակագործում, թանձրացում)

$$\Phi(\pm\infty) = 0$$

ձյնծրծի

ձյնծրծի թանձրացում (ընդհանուր ինտեգրում)

$$\int \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx = - \int \frac{\partial \Phi}{\partial x} d\Phi = - \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla\Phi)^2 dV$$

$$\nabla\Phi = -\vec{E}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

(ընդհանուր ինտեգրում) ↑

ელექტრონული ურთერქმედების ელემენტს დავსა ნებისმიერი მუხტების შემთხვევაში.

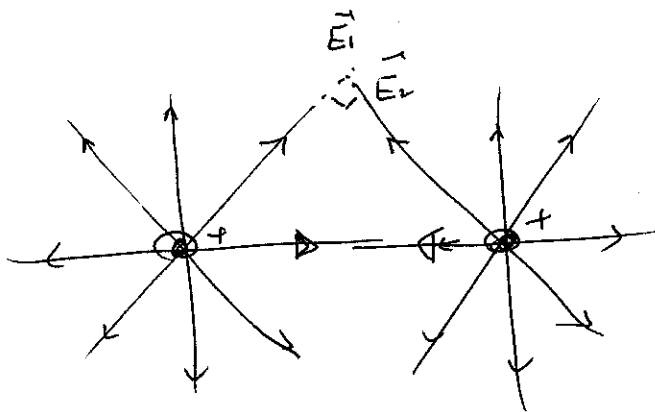
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} (E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1 \vec{E}_2)$$

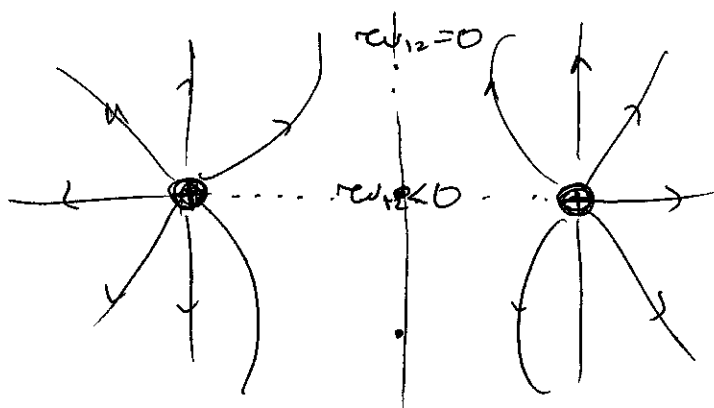
$$w \equiv w_1 + w_2 + w_{12}$$

$$w_1 = \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2, \quad w_2 = \frac{\epsilon_0}{2} E_2^2 \quad - \text{მუხტების საკუთარი ელემენტი}$$

$$w_{12} = \epsilon_0 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \quad \text{მუხტების ურთერქმედების ელემენტი.}$$



$w_{12} = 0: \vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$
ურთერქმედების ელემენტს
სამყარო გეგმაში არ გვხვდება.
მუხტის პოლარი მდებარეობს

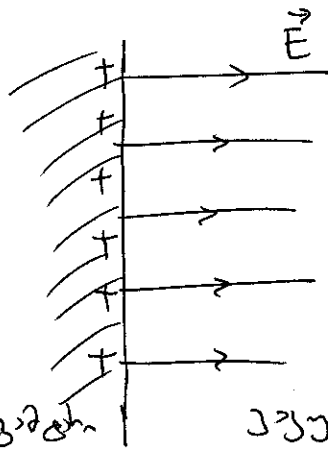


სადაც არ არის

ელექტრული ველის ენერგია ვამატის ზედაპირი

2.8.

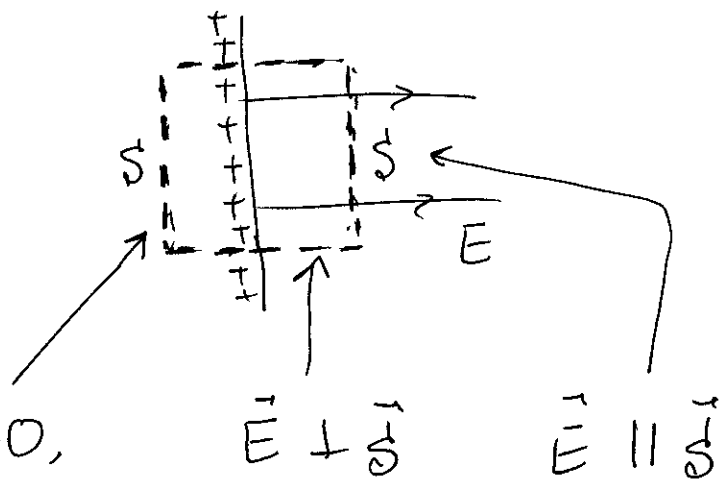
ვაჩვენებთ ვაჩვენებთ ზედაპირს
ვამატის ზედაპირი.



ვამატის ზედაპირიდან ზედაპირს
ელექტრული ველის ზედაპირი
მართებული.

ვამატის ზედაპირი:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



ვამატის ზედაპირი

$$E=0,$$

$$\vec{E} \perp \vec{S}$$

$$\vec{E} \parallel \vec{S}$$

$$E \cdot S = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ვამატის ზედაპირიდან ზედაპირს
ელექტრული ველის ზედაპირი

$$q = \int \sigma \cdot dS$$

$$\sigma = \text{const} :$$

$$E \cdot S = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma \cdot S$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \left(\begin{array}{l} \text{ვამატის ზედაპირიდან} \\ \text{ელექტრული ველი} \end{array} \right)$$

ელექტრული
ელექტრული

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

$$\boxed{w = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0}}$$