ელექტრული ველის ენერგია დიელექტრიკში

წერტილოვანი მუხტის გადაადგილებისას შესრულებული მუშაობა:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad \varphi \text{ - ელ. ველის პოტენციალი}$$

დიელექტრიკში მუხტების განაწილების შეცვლისას შესრულებული მუშაობა:

$$\delta A = \int \delta\rho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

$\delta\rho(\vec{r})$ – მუხტის განაწილების სიმკვრივის ცვლილება.

გაუსის კანონი დიელექტრიკული გარემოსათვის: $\nabla\vec{D} = \rho$

$$\nabla(\delta\vec{D}) = \delta\rho$$

ე.ი. $$\delta A = \int \nabla(\delta\vec{D})\,\varphi\, d^3\vec{r}$$

ნაწილობითი ინტეგრება:

$$\delta A = \left[\delta\vec{D}\cdot\varphi\right]_{\text{საზღვრებზე}}^{\to 0} - \int \delta\vec{D}\cdot\nabla\varphi\cdot d^3\vec{r}$$

ელექტროსტატიკური ველისათვის: $\vec{E} = -\nabla\varphi$

ლოკალიზებული ველი: $\delta\rho = 0$ – საზღვარზე; ე.ი. $\delta D_{\text{ს.ზ.}} = 0$

ე.ი. $$\delta A = \int \delta\vec{D}\cdot\vec{E}\cdot d^3\vec{r}$$

გარე სისტემაზე ხდება მუშაობა და მივიღებთ:

$$\delta A = \delta W$$ – ელ.სტატიკური ველის ენერგიის ცვლილება

წრფივი იზოტროპული დიელექტრიკებისათვის: $\vec{D} \sim \vec{E}$ და $\vec{D} \sim \vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\delta \vec{D} \cdot \vec{E} = \varepsilon\, \delta \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{\varepsilon}{2} \delta\left(\vec{E} \cdot \vec{E}\right) = \frac{1}{2} \delta\left(\vec{D} \cdot \vec{E}\right)$$

ელექტროსტატიკური ველის ენერგიის ცვლილება დიელექტრიკში:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \delta\left(\vec{D} \cdot \vec{E}\right) d^3\vec{r}$$

ან სრული ენერგიისათვის:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot d^3\vec{r}}$$

ენერგიის სიმკვრივე:

$$\boxed{w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}}$$

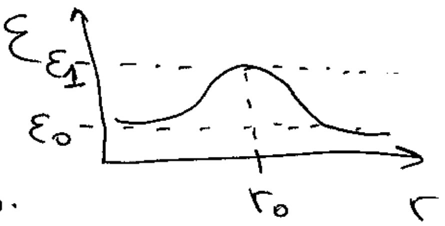
ან

$$w = \frac{\varepsilon}{2} E^2 \qquad \left(\text{ვაკუუმში: } w = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2\right)$$

დიელექტრიკში ველის სრული ენერგია სინამდვილეში შედგება ორი ნაწილისგან: ელ.სტატიკური ველის ენერგია და დიელექტრიკის პოლარიზაციის ენერგია. ჯამ-ჯამობით დეფინიციაა მხოლოდ ველის ენერგია.

დიელექტრიკის პოლარიზაციის ენერგია

ვთქვათ გარემოში შეიცვალა დიელექტრიკული შეღწევადობა ლოკალურად



დავიანგარიშოთ დიელექტრიკის პოლარიზაციის ენერგია: ენერგიის ცვლილება ε-ის ცვლილებისას.

საწყისი ენერგია:

$$W_0 = \frac{1}{2} \int \vec{E}_0 \vec{D}_0 \, d^3\vec{r}$$

საბოლოო ენერგია:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{E} \vec{D} \, d^3\vec{r}$$

წრფივობის პირობა:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r}) \, \vec{E}(\vec{r})$$

ენერგიის ცვლილება:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int \left(\vec{E} \cdot \vec{D} - \vec{E}_0 \vec{D}_0 \right) d^3\vec{r} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \int \left(\vec{E} + \vec{E}_0 \right) \left(\vec{D} - \vec{D}_0 \right) d^3\vec{r}}_{\mathcal{J}_1} + \frac{1}{2} \int \left(\vec{E} \vec{D}_0 - \vec{E}_0 \vec{D} \right) d^3\vec{r}$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int \left(\vec{E} \vec{D}_0 - \vec{E}_0 \vec{D} \right) d^3\vec{r} + \mathcal{J}_1$$

4.4.

$$J_1 = \frac{1}{2}\int (\vec{E}+\vec{E}_0)(\vec{D}-\vec{D}_0)\, d^3\vec{r}$$

სტატიკის განტოლება $\quad \nabla \times \vec{E} = 0, \quad \nabla \times \vec{E}_0 = 0, \quad$ ე.ი. $\nabla \times (\vec{E}+\vec{E}_0) = 0$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \quad \vec{E}_0 = -\nabla\varphi_0$$

$$(\vec{E}+\vec{E}_0) \equiv -\nabla\varphi_2 \qquad (\varphi_2 = \varphi + \varphi_0)$$

ე.ი. $\quad J_1 = -\frac{1}{2}\int \nabla\varphi_2 (\vec{D}-\vec{D}_0)\, d^3\vec{r}$

ნაწილობითი ინტეგრება:

$$J_1 = -\frac{1}{2}\left[\varphi_2(\vec{D}-\vec{D}_0)\right]_{\text{საზღვარზე}} \to 0 \; + \; \frac{1}{2}\int \nabla(\vec{D}-\vec{D}_0)\varphi_2\, d^3\vec{r}$$

საზღვარზე $\quad \vec{D} = \vec{D}_0,$

$\nabla\vec{D} = \rho, \quad \nabla\vec{D}_0 = \rho, \quad \rho$ — გარე (თავისუფალი) მუხტის სიმკვრივე

$$\nabla(\vec{D}-\vec{D}_0) = 0$$

ე.ი. $\quad J_1 = 0$

ანუ ელექტრული ველის ენერგიის ცვლილებისთვის:

$$\Delta W = \frac{1}{2}\int (\vec{E}\vec{D}_0 - \vec{E}_0\vec{D})\, d^3\vec{r}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_1 \vec{E}$$

$$\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

$$\boxed{\Delta W = -\frac{1}{2} \int \left(\varepsilon_1(\vec{r}) - \varepsilon_0\right) \vec{E} \cdot \vec{E}_0 \, d^3 \vec{r}}$$

წრფივი იზოტროპული დიელექტრიკი:

$$\vec{P} = \underline{\varepsilon_0 \chi} \vec{E}, \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi) \qquad \text{ანუ} \qquad \underline{\varepsilon_0 \chi} = \varepsilon - \varepsilon_0$$

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}$$

ანუ: $\Delta W = -\frac{1}{2} \int \vec{P} \cdot \vec{E}_0 \, d^3 \vec{r}$

დიელექტრიკის პოლარიზაციის ენერგიის სიმკვრივე:

$$\boxed{w_p = -\frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}_0}$$

დიელექტრიკზე მოქმედი ძალა

არაერთგვაროვანი სტატიკური ელექტრული ველი.

$\vec{E} = \text{const}, \quad \varphi = \text{const}.$ (მაგ. მიერთებულია ბოლოზე ძაბვის წყაროს)

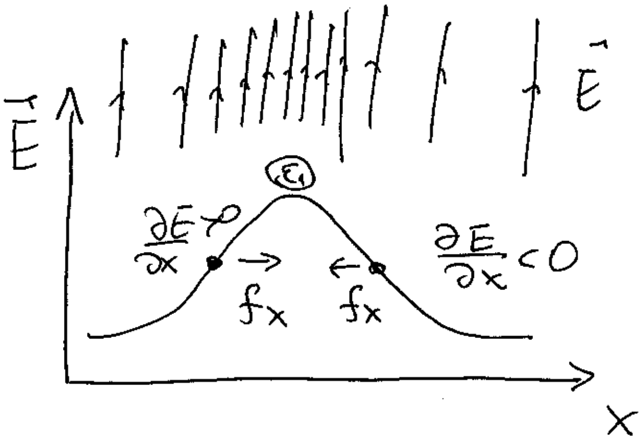
ε_1 დიელ. შეღწევადობის სხეულზე მოქმედი ძალა X მიმართულებით:

$$F_x = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_Q \rightarrow$$ წარმოებული მუხტების მუდმივი გამტარებისათვის

ძაბვის სიმუდმივით $$f_x = -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_\varphi$$

$$w = -\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}_0 = -\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,\vec{E}\cdot\vec{E}_0$$

ან $$f_x \sim \frac{\partial E}{\partial x}$$



დიელექტრიკი მიიზიდება ძლიერი ელექტრული ველის არეში ($\varepsilon_1 > \varepsilon_0$)

თუ $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ (არა დიელექტრიკი) მაშინ პირიქით. (განიდევნება ძლიერი ელ. ველიდან).

ინდუცირებული დიპოლები

დიელექტრიკის ორი სახე:

1) ნივთიერების მოლეკულებში დადებითი და უარყოფითი მუხტის სიმძიმის ცენტრები ერთმანეთს ემთხვევიან. ანუ გარეშე ელ. ველის გარეშე მოლეკულას **არ გააჩნია** დიპოლური მომენტი:

$$\vec{P}_i = 0$$

მაგ. N_2, O_2, CO_2, ...

2) მოლეკულაში დადებითი და უარყოფითი მუხტების განაწილება ასიმეტრიულია. ასე მოლეკულას გააჩნია დიპოლური მომენტი გარეშე ველის გარეშეც:

$$\vec{P}_i \neq 0$$

მაგ. H_2O, NH_3, ...

1) პირველ შემთხვევაში დიელექტრიკის მაკროსკოპული ნიმუშის პოლარიზაცია გამოწვეულია გარე ველში მოლეკულების დეფორმაციით ($\vec{P}_i \neq 0$).

2) მეორე შემთხვევაში დიელექტრიკის მაკ. ნიმუშის პოლარიზაცია გამოწვეულია მოლეკულების არსებული დიპოლური მომენტების ველის გასწვრივ ორიენტაციით.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა, როდესაც ელ. ველი იწვევს მოლეკულის **ინდუცირებულ** დეფორმაციას.

კვაზიდრეკადი მოლეკულის პოლარიზება გარეშე ელექტრულ ველში:

$$\vec{P}_i = \beta \vec{E}$$

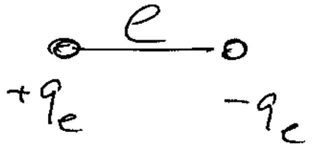
β – მოლეკულის პოლარიზების პარამეტრი.

მაკროსკოპული პოლარიზაციის ვექტორი:

$$\vec{P} = \langle \vec{P}_i \rangle = N \beta \vec{E}$$

N – მოლეკულების რაოდენობა მოცულობის ერთეულში.

დრეკადი მოდელი: $\vec{p} = q_e \vec{\ell}$



$$\vec{p} = q_e \vec{\ell} = \beta \vec{E}$$

ℓ – დიპოლის ზომა

$(E = 0, \ \ell = 0)$

რაკი დიპოლის ზომა პროპორციულია გარეშე ველის, მაშინ აქედან ჩანს მოლეკულა არის კვაზიდრეკადი.

$$\vec{F} = \varkappa \vec{\ell} \quad — \ \varkappa \text{ დრეკადობის კოეფიციენტი.}$$

მეორეს მხრივ:

$$\vec{F} = q_e \vec{E} = \frac{q_e^2}{\beta} \vec{\ell} \qquad \left(\vec{E} = \frac{q_e}{\beta} \vec{\ell} \right)$$

ანუ

$$\varkappa \vec{\ell} = \frac{q_e^2}{\beta} \vec{\ell}$$

$$\boxed{\varkappa = \frac{q_e^2}{\beta}} \qquad \boxed{\beta = \frac{q_e^2}{\varkappa}}$$

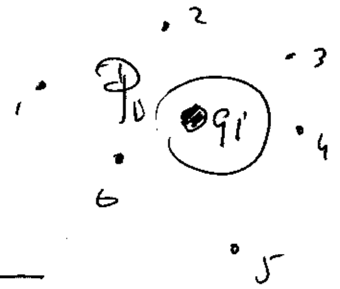
ელექტროსტატიკური მუხტების წონასწორობის მდგრადობა

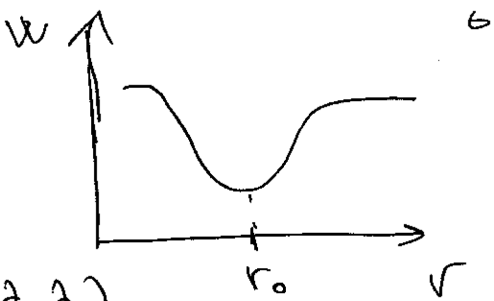
კითხვა გვაქვს: ყველა ელექტრული მუხტების განაწილება $(q_1, q_2, \dots)$ რამდენად მდგრადია სისტემა?

სისტემის ენერგია:
$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \qquad i \neq j$$

ან
$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$$

სადაც φ_i არის სისტემის ყველა მუხტების მიერ შექმნილი პოტენციალი q_i მუხტის ადგილმდებარეობის წერტილში q_i მუხტის გამოკლებით.
(მუხტი საკუთარ თავზე არ მოქმედებს)





მდგრადი წონასწორობის პირობა:

1) ექსტრემუმის არსებობა (მინიმუმი)
$$\frac{\partial W}{\partial r} = 0$$

2) მინიმუმი (ჩაღუნული ფუნქცია) $\quad \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} > 0.$

მდგრადობა x მიმართულებით: $\quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} > 0$

y მიმართულებით: $\quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} > 0$

z მიმართულებით: $\quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} > 0$

$$\Delta W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Delta \varphi_i$$

$\Delta \varphi_i = 0$, ანუ:

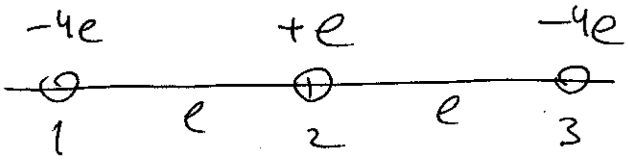
$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

რაც ეწინააღმდეგება მდგრადობის პირობას $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} > 0 \right)$

> ირნშოუს თეორემა: ელექტრული მუხტების სტატიკური განაწილება არ არსებობს (მდგრადი)

როგორ გავხადოთ სისტემა მდგრადი? ე.ი. არა ელექტროსტატიკური ძალები, მაგ. კვაზიელასტიური ძალა. (ქიმიური ბმების მექანიზმი)

მაგალითი:



$$\begin{cases} F_1 = F_{12} + F_{13} = 0 \\ F_2 = F_{21} + F_{23} = 0 \\ F_3 = F_{31} + F_{32} = 0 \end{cases}$$

F_i — i მუხტზე მოქმედი ჯამური ძალა

F_{ik} — i-ზე k-მუხტიდან მოქმედი ძალა

რაა სწორი?

<u>წონასწორობა არამდგრადია</u>

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} < 0$$