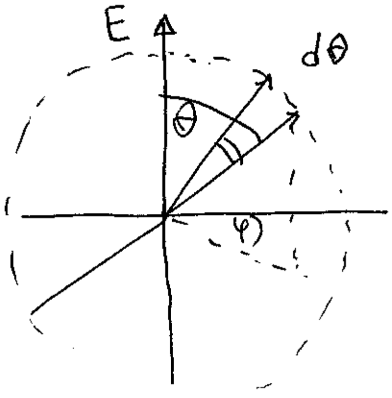
დიელექტრიკის პოლარიზაცია არანულოვანი დიპოლური მომენტის მოლეკულების შემთხვევაში

მოლეკულას გააჩნია არანულოვანი ელექტრული მომენტი გარეშე ველის გარეშეც:
$$\begin{cases}\vec{E}=0\\ \vec{P}_i\neq 0\end{cases}$$

ამ შემთხვევაში დიელექტრიკის მაკროსკოპული პოლარიზაცია მნიშვნელოვანია მოლეკულების მაკროსკოპული მომენტების ჯამი.

ვიფიქროთ უგულვებელვყოთ მოლეკულების ურთიერთქმედება და განვიხილოთ ამ დიპოლების ჯამური პოლარიზაცია რომლებიც ლაგდებიან უპირატესად ველის გასწვრივ.



სფერული კოორდინატთა სისტემა:
(r,θ,φ)

სფერული ინტეგრალი:
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} f(r,\theta,\varphi)\, r^2 dr\cdot d\varphi\cdot \sin\theta\, d\theta$$

ჯამური პოლარიზაციის დასადგენად მნიშვნელოვანი ხდება მოლეკულა დიპოლის ელექტრული ველის გასწვრივ, არა რა კუთხით ლაგდება, არამედ მნიშვნელოვანია კუთხე θ.

dN – მოლეკულების რიცხვი, რომელთა დიპოლის მიმართ

მიმართულია კუთხით: θ-დან, $\theta+d\theta$-მდე.

მოლეკულების სრული რიცხვი:

$$N = \int_0^{\pi} C \cdot \sin\theta \, d\theta$$

მოლეკულები მიმართულია ქაოსურად. მათი განაწილების სიმკვრივის ალბათობა U პოტენციურ ველში მოთავსებული მოლეკულების განაწილება:

$$\exp\left(-\frac{U}{kT}\right)$$

ველის პოტენციალური ენერგია: ელექტრული პოლარიზაციის ენერგია:

$$U = -\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E} = -\frac{1}{2}P_0 E\cos\theta$$

P_0 – ინდუცირებული მოლეკულის დიპოლური მომენტი. ე.ი.

$$dN = C \cdot \exp\left(\frac{P_0 E\cos\theta}{2kT}\right) \cdot \sin\theta \, d\theta$$

$$\boxed{\alpha \equiv \frac{P_0 E}{2kT}}\ , \quad \text{ანუ} \quad dN = C \cdot \exp(\alpha\cos\theta)\sin\theta \, d\theta$$

ჩვეულებრივ ელექტრულ ველებში $\alpha \ll 1$, ანუ ელექტრული ველის პოლარიზაცია ბევრად სუსტია ვიდრე მოლეკულების სითბური მოძრაობის ენერგია. ამ შემთხვევაში

$$\exp(\alpha\cos\theta) \approx 1 + \alpha\cos\theta$$

და

$$dN = C(1+\alpha\cos\theta)\sin\theta \, d\theta$$

$$N = \int dN = C\int_0^{\pi}(1+\alpha\cos\theta)\sin\theta \, d\theta = C\left[\cos\theta + \frac{\alpha}{2}\cos^2\theta\right]_0^{\pi} = 2C$$

ანუ $\boxed{C = N/2}$

ე მოლეკულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$dN = \frac{N}{2}(1+\alpha\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$d\theta$ სხეულოვანი კუთხის დიპოლების ჯამური პოლარიზაციის ტოლია:

$$dP = P_0 \cdot \cos\theta \cdot dN$$

ანუ ჯამური პოლარიზაცია:

$$P = \int_0^{\pi} P_0 \cdot \cos\theta\, dN = \frac{P_0 N}{2}\int_0^{\pi}(1+\alpha\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\cos\theta =$$

$$= \frac{P_0 N}{2}\int_0^{\pi}(\cos\theta + \alpha\cos^2\theta)\, d\cos\theta = \frac{P_0 N}{2}\left[\frac{\cos^2\theta}{2} + \alpha\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi}$$

ჩასმით:

$$P = \frac{P_0 N}{2}\cdot\frac{2\alpha}{3}$$

$$P = \frac{1}{3}N P_0 \alpha$$

α-ს ჩასმით: (ვ. 5.2)

$$\boxed{P = \frac{N P_0^2 E}{6KT}}$$

ველის ძალიან მაღალი მნიშვნელობისას, როდესაც შეიძლება მიიღოს დიპოლურ მომენტს მიიღწევა მაქს, როდესაც ყველა დიპოლი დალაგდება ველის გასწვრივ:

$$P_{max} = N P_0$$

მაგრამ როდესაც $\mathcal{P} \sim \frac{1}{T}$, $T \to \infty$ $P \to \infty \neq N P_0$ $\boxed{5.4.}$

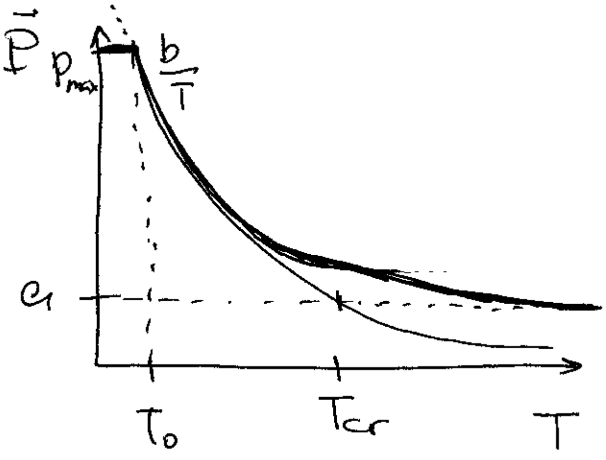
$P \sim \frac{1}{T}$ მიღებული მაღალტემპერატურულ ზღვარში $\left(\alpha = \frac{P_0 E}{2kT} \ll 1 \right)$

და ეს არის სამართლიანი მაღალტემპერატურული დიელექტრიკებისათვის.

ზოგადად ნივთიერებაში გვხვდება ორივე ეფექტი: დიპოლების მობრუნება და მოლეკულების პოლარიზაცია დეფორმაციით:

$$\vec{\mathcal{P}} = N\beta \vec{E} + \frac{N P_0^2}{6kT} \vec{E}$$

ნივთიერების დიელექტრიკული ტემპერატურული შემდეგი ფორმა ველის ნიმუშზე:



$$\mathcal{P} \sim a + \frac{b}{T}$$

$$\begin{cases} T \gg T_{cr}, & \mathcal{P} = const, \\ T \ll T_{cr} & \mathcal{P} \sim \frac{1}{T} \quad \left(\frac{N P_0^2 E}{6kT}\right) \\ T < T_0 < T_{cr} & \frac{N P_0^2 E}{6kT_0} = P_0 N, \text{ აქ} \quad T_0 = \frac{P_0 E}{6k} \\ & \mathcal{P} = P_{max} = P_0 N \end{cases}$$

თუ გავითვალისწინებთ: $\vec{\mathcal{P}} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}$

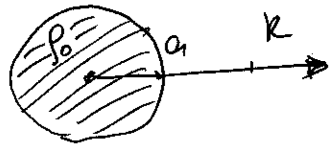
$$(\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} = N\beta \vec{E} + \frac{N P_0^2}{6kT} \vec{E}$$

$$\boxed{\varepsilon - \varepsilon_0 = N\left(\beta + \frac{P_0^2}{6kT}\right)}$$

β – მოლეკულის დეფორმაციის კოეფიციენტი, P_0 – მოლეკულის დიპოლური მომენტი $(\vec{E} = 0)$

ელექტრული ველი $\vec{\Phi}$ პოტენციალის დიელექტრიკში.

დამხმარე ამოცანა: ბურთულა a რადიუსის



დამუხტული სფერული დიელექტრიკის ელ. ველი
მუხტის სიმკვრივე დიელექტრიკში: $\rho_0 = const.$

ამოვხსნათ ამოცანა პოტენციალისთვის Φ სფერულ კოორდინატებში:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Phi\right) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}, \quad \text{სადაც } \rho(r) = \begin{cases} \rho_0 : r<a \\ 0 : r>a \end{cases}$$

(წარმოებულები φ და θ კუთხეებით ნული)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Phi\right) = \frac{1}{\varepsilon} r^2 \rho(r)$$

$$r^2\frac{\partial}{\partial r}\Phi = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^r r^2\rho(r)\,dr$$

1) $\underline{\underline{r>a}}$:
$$r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^a r^2\rho_0\,dr + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}\int_a^r r^2\cdot 0\cdot dr}_{0} = \frac{\rho_0}{\varepsilon}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$\Phi(r) = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon}\int\frac{dr}{r^2} = -\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\right]$$

$$\Phi(r>a) = -\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}$$

$\boxed{5.6.}$

სფეროს მოცულობა: $\quad V_0 = \frac{4}{3}\pi a^3$

სფეროს ჯამური მუხტი: $\quad q = \rho_0 V_0$

$$\rho_0 = \frac{q}{V_0} = \frac{3q}{4\pi a^3}$$

$$\Phi(r>a) = -\frac{\cancel{3}q}{4\pi \cancel{a^3}}\cdot\frac{\cancel{a^3}}{\cancel{3}\varepsilon}\cdot\frac{1}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}$$

2) $\underline{\underline{r<a}}$

$$r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^r r^2\rho_0\,dr = \frac{\rho_0}{\varepsilon}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^r = \frac{\rho_0}{3\varepsilon}\cdot r^3$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon}\cdot r$$

$$\Phi(r<a) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon}\int r\,dr = \frac{\rho_0}{6\varepsilon}r^2 + \text{const.}$$

$$\Phi = \begin{cases} -\dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon}\dfrac{1}{r} & : r \geq a \\[2ex] \dfrac{\rho_0}{6\varepsilon}\cdot r^2 + C_0 & : r \leq a \end{cases}$$

$$\Phi(r=a) = -\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon}\cdot\frac{1}{a}$$

$$\parallel$$

$$\Phi(r=a) = \frac{\rho_0}{6\varepsilon}\cdot a^2 + C_0$$

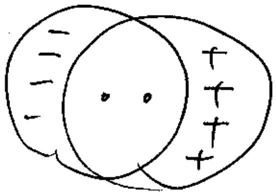
$$-\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon}\cdot\frac{1}{a}=\frac{\rho_0}{6\varepsilon}a^2+c_0$$

$$c_0=-\frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon}\left(+1+\frac{1}{2}\right)=-\frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon}$$

ე.ი. $$\Phi(r)=\begin{cases}-\dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon}\dfrac{1}{r} & : \; r\geqslant a\\[2ex] \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon}\left(\dfrac{r^2}{3}-a^2\right) & : \; r\leqslant a\end{cases}$$

ელექტრული ველი ნორმირებული დამატებით შეჭრილი
წარმოსახვითი დამუხტული ღრუს შიგ.

წარმოვიდგინოთ, რომ დადებითი მუხტები ნაწილობრივ
უარყოფითი მუხტების სიმკვრივეებით მიმართულებით
და შეჭრილი დამუხტული ღრუს.



უარყოფითად დამუხტული სფეროს პოტენციალი:
(გამოვიყენოთ ადრე მიღებული r<a შემთხვევაში)

$$\Phi_-=-\frac{\rho_0}{2\varepsilon}\left(\frac{R_-^2}{3}-a^2\right)$$

დადებითი მუხტების სფეროს პოტენციალი:

$$\Phi_+=+\frac{\rho_0}{2\varepsilon}\left(\frac{R_+^2}{3}-a^2\right)$$

ჯამური პოტენციალი: $$\Phi=\Phi_++\Phi_-=\frac{\rho_0}{3\varepsilon}\left(R_+^2-R_-^2\right)$$

დადებითი და უარყოფითი მუხტების ცენტრების შორის წანაცვლების ვექტორი: $\vec{e}$

სფეროების საწყისი ცენტრიდან გადაზომილი რადიუსი: $\vec{R}$

$$\begin{cases} \vec{R}_+ = \vec{R} + \vec{e} \\ \vec{R}_- = \vec{R} - \vec{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_+^2 = R^2 + e^2 + 2\vec{R}\vec{e} \\ R_-^2 = R^2 + e^2 - 2\vec{R}\vec{e} \end{cases}$$

შესაბამისად: $R_+^2 - R_-^2 = 4\vec{R}\vec{e}$

ანუ: $\varphi = \frac{\rho_0}{3\varepsilon} \cdot 4\vec{R}\vec{e}$

ელექტრული ველი: $\vec{E}' = -\nabla\varphi = -\nabla \frac{\rho_0}{3\varepsilon} 4\vec{R}\vec{e}$

მუხტების მუდმივი განაწილების შემთხვევაში ($\rho_0 = const$)

$$\nabla \frac{\rho_0}{3\varepsilon} 4\vec{R}\vec{e} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon} \cdot 4 (\underbrace{\nabla \vec{R}}_{1}) \vec{e} = \frac{4}{3\varepsilon} \rho_0 \vec{e} = \frac{4}{3\varepsilon} \vec{P}$$

სადაც $\vec{P} = \rho_0 \vec{e}$ - დიელექტრიკის მოცულობითი პოლარიზაცია

ანუ: $\boxed{\vec{E}' = \frac{4}{3\varepsilon} \cdot \vec{P}}$ ელექტრული ველი დიელექტრიკის პოლარიზაციის გამო

ჯამური ელ. ველი: $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{4}{3\varepsilon} \vec{P}}$

გარეშე ველის და დიელექტრიკის პოლარიზაციით გამოწვეული ველების ჯამი.

ცვლადი დიელექტრიკული შეღწევადობის გარემო

$$\varepsilon = \varepsilon(r) \neq const.$$

იზოტროპული, მაგრამ არაერთგვაროვანი დიელექტრიკი:

$$\vec{P} \parallel \vec{E}, \qquad \varepsilon(r) \neq const.$$

გაუსის თეორემა $\vec{D}$ ვექტორისათვის ლოკალური ფორმით:

$$\nabla \vec{D} = \rho(\vec{r})$$

ელ: ველის პოტენციალი $\vec{E} = -\nabla \varphi$

$$\vec{D} = \varepsilon(r)\, \vec{E}$$

$$\nabla \left(\varepsilon(r) \cdot \vec{E} \right) = \rho(\vec{r})$$

$$\nabla \left(\varepsilon(r)\, \nabla \varphi \right) = -\rho(\vec{r})$$

$$\nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \cdot \frac{\nabla \varepsilon(r)}{\varepsilon(r)} = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon(r)}$$

პუასონის განტოლების ასეთი არაერთგვაროვანი დიელექტრიკებისთვის:

$$\boxed{\Delta \varphi + \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

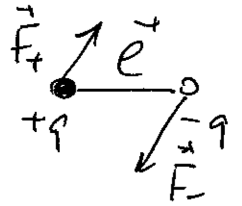
ერთგვაროვან გარემოში $\varepsilon = const$, $\nabla \varepsilon = 0$, და $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$.

დიელექტრიკზე მოქმედი პონდერომოტორული ძალები

დიელექტრიკის ყოველ მოლეკულაზე მოქმედებს გარე ელ. ველი. ელექტრული ველის გარემოზე მექანიკური ზემოქმედების პონდერომოტორული ზემოქმედების ვუწოდებთ.

მაკროსკოპული პონდერომოტორული ძალა ყველა მოლეკულაზე მოქმედი მიკროსკოპული ძალების ჯამია.

ვთქვათ დიელექტრიკი შედგება მოლეკულური დიპოლებისაგან.



დიპოლზე მოქმედი ძალა:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q\vec{E}_1 - q\vec{E}_2$$

მცირე ზომის დიპოლისთვის: $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{e}} \cdot \vec{e} \approx \vec{e}\,\nabla \vec{E}'$

$$\vec{F}_i = q\vec{e}\,\nabla \vec{E}' = \vec{P}_i \nabla \vec{E}'$$

$\vec{P}_i$ – ინდივიდუალური დიპოლის ელ. მომენტი.

ჯამური პონდერომოტორული ძალა $\vec{F} = \langle \vec{F}_i \rangle = N \langle \vec{P}_i \nabla \vec{E}' \rangle$

$$\vec{F} \approx N \langle \vec{P}_i \rangle \cdot \langle \nabla \vec{E}' \rangle = \vec{\mathcal{P}} \cdot \nabla \vec{E}$$

$\vec{E}'$ – მიკროსკოპული ველი, $\vec{E}$ – გასაშუალოებული მიკროსკოპული ველი

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$$

$$\vec{F}_{3} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\vec{E} \cdot \nabla \vec{E}$$

a b c

$$\left[\vec{E}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right] = \nabla\cdot\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right) - \vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)$$

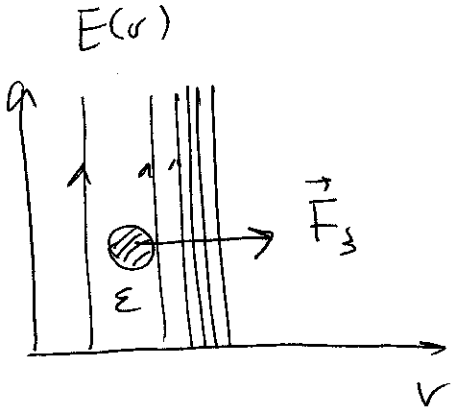
$$E\left(\nabla\vec{E}\right) = \nabla E^2 - \left[\vec{E}\times\left[\nabla\times\vec{E}\right]\right]$$

სტატიკის შემთხვევა:

$$\nabla\times\vec{E} = 0$$

ე.ი. $\vec{E}\left(\nabla\vec{E}\right) = \nabla E^2$

$$\boxed{\vec{F}_ვ = \left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)\nabla E^2}$$



ვთქვა $E(r) = \alpha r$

$$\frac{\partial E(r)}{\partial r} > 0$$

$$\vec{F}_ვ = \alpha\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right) > 0 \quad \Big| \quad \varepsilon > \varepsilon_0$$

დიელექტრიკზე მოქმედებს ძალა რომელიც მიმართულია ელ. ველის ზრდადობის მიმართულებით.