И.Е. ТАММ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

Издание одиннадцатое,
исправленное и дополненное

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов физических специальностей университетов

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2003

УДК 537.1(075.8)
ББК 22.33
Т17

Тамм И. Е. **Основы теории электричества:** Учеб. пособие для вузов. — 11-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 616 с. — ISBN 5-9221-0313-X.

Дано систематическое изложение основных положений теории электричества. Главное внимание уделено физическому содержанию теории. Подготовлено 11-е издание, как и предыдущее, без переработки, с тем чтобы дать возможность современному читателю ознакомиться именно с оригинальной, фундаментальной в мировой литературе работой академика И.Е. Тамма. Добавлена таблица физических констант, изменено несколько примечаний, обновлены ссылки на литературу и, наконец, исправлены замеченные опечатки.

Для студентов физических специальностей вузов, а также научных и инженерно-технических работников.

Табл. 5. Ил. 107.

ISBN 5-9221-0313-X

© ФИЗМАТЛИТ, 1989, 2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к одиннадцатому изданию 9
Предисловие к десятому изданию 9
Из предисловия к девятому изданию 10
Из предисловия к первому изданию 11
Список важнейших обозначений 12
Введение 14

Глава I. **Электрическое поле неподвижных зарядов в отсутствие диэлектриков**

1. Закон Кулона 17
2. Электрическое поле 21
3. Теорема Гаусса 23
4. Электрическое поле заряженных поверхностей 27
5. Проводники в электрическом поле 32
6. Истоки электрического поля. Поверхностная дивергенция 34
7. Работа электрических сил. Независимость ее от формы пути. Непрерывность тангенциальных слагающих вектора **E** 39
8. Потенциал электростатического поля 43
9. Емкость. Конденсаторы 48
10. Градиент электростатического потенциала. Линии сил . . . 52
11. Уравнения Пуассона и Лапласа 57
12. Потенциал объемных и поверхностных зарядов 61
13. Типичные задачи электростатики 68
14. Двойной электрический слой 71
15. Энергия взаимодействия электрических зарядов 76
16. Энергия электрического поля 79
17. Пондеромоторные силы 85
18. Определение пондеромоторных сил из выражения энергии 88
19. Неустойчивость электрических систем. Связи 92

Глава II. **Диэлектрики**

20. Диэлектрики. Электрический момент и потенциал нейтральной молекулы. Поляризация диэлектрика 97
21. Свободные и связанные заряды. Потенциал электрического поля при наличии диэлектриков. Зависимость поляризации от поля 101

22. Вектор электрической индукции. Дифференциальные уравнения поля в произвольной среде. Линии индукции 105
23. Электрическое поле в однородном диэлектрике 110
24. Непосредственный подсчет поля при наличии диэлектрика (в простейших случаях) 113
25. Микро- и макроскопические значения физических величин 117
26. Вывод уравнений поля в диэлектриках путем усреднения микроскопического поля 120
27. Два класса диэлектриков. Квазиупругие диполи 123
28. Отличие действующего на диполь поля от среднего 125
29. Поляризация диэлектриков, молекулы которых обладают постоянным электрическим моментом. Зависимость диэлектрической проницаемости от температуры 130
30. Энергия электрического поля в диэлектриках 136
31. Преобразования энергии, связанные с поляризацией диэлектриков. Свободная энергия электрического поля 139
32. Пондеромоторные силы в диэлектриках 146
33. Сведение объемных сил к натяжениям 153
34. Тензор натяжений электрического поля 158

Глава III. **Постоянный электрический ток**

35. Электрический ток в металлах. Законы Ома и Джоуля. Напряжение 166
36. Плотность тока. Дифференциальная форма уравнений Ома и Джоуля 170
37. Условия стационарности токов. Уравнение непрерывности. Нити тока 173
38. Сторонние электродвижущие силы. Квазилинейные токи. Второй закон Кирхгофа 177
39. Превращения энергии в цепи тока. Контактные ЭДС . . . 182
40. Основные представления электронной теории металлов. Опыты Толмена 188
41. Электронная теория электропроводности. Трудности классической теории. Теория Зоммерфельда 192

Глава IV. **Пондеромоторное взаимодействие постоянных токов и их магнитное поле (в отсутствие намагничивающихся сред)**

42. Магнитное поле токов 199
43. Взаимодействие элементов тока. Электродинамическая постоянная 203
44. Переход от линейных токов к токам конечного сечения . . 206
45. Лоренцева сила 210
46. Вектор-потенциал магнитного поля 214
47. Дифференциальные уравнения магнитного поля. Циркуляция напряженности магнитного поля 218

48. Поля потенциальные и поля соленоидальные. Сопоставление дифференциальных уравнений электрического и магнитного полей 220
49. Пограничные условия в магнитном поле токов. Поверхностные токи. Поверхностный ротор. Поле бесконечного соленоида 221
50. Пондеромоторные силы, испытываемые в магнитном поле замкнутым током. Потенциальная функция тока во внешнем магнитном поле 227
51. Пондеромоторное взаимодействие токов. Коэффициент взаимной индукции 231
52. Коэффициент самоиндукции. Полная потенциальная функция системы токов 236
53. Магнитные силовые линии 239
54. Топология вихревого (магнитного) поля. Условные перегородки 244
55. Магнитные листки. Эквивалентность их токам 248
56. Магнитный момент тока. Элементарные токи и магнитные диполи 253
57. Непосредственное определение поля элементарных токов и сил, ими испытываемых 257
58. Эволюция представлений о природе магнетизма. Спин электронов 264
59. Абсолютная (гауссова) и другие системы единиц. Электродинамическая постоянная 268

Глава V. **Магнетики (намагничивающиеся среды)**

60. Намагничение магнетиков. Молекулярные токи и токи проводимости 277
61. Векторный потенциал магнитного поля при наличии магнетиков. Средняя плотность объемных и поверхностных молекулярных токов 281
62. Дифференциальные уравнения макроскопического магнитного поля в магнетиках. Напряженность магнитного поля в магнетиках и вектор магнитной индукции 287
63. Зависимость намагничения от напряженности магнитного поля. Пара-, диа- и ферромагнетики 290
64. Полная система уравнений поля постоянных токов. Однородная магнитная среда 293
65. Механические силы, испытываемые токами в магнитном поле. Взаимодействие токов 295
66. Пондеромоторные силы, испытываемые магнетиками в магнитном поле 298
67. Дополнение к выводу макроскопических уравнений магнитного поля в магнетиках 301
68. Механизм намагничения магнетиков. Теорема Лармора . . 304

69. Диамагнетизм 309
70. Парамагнетизм 311
71. Уточнения и дополнения к теории намагничения. Роль спина. Гиромагнитные явления 317
72. Ферромагнетизм. Молекулярное поле Вейсса 322
73. Уравнения поля в идеализированных ферромагнетиках (обычный вариант). Постоянные магниты 330
74. Другой вариант уравнений магнитного поля в идеализированных ферромагнетиках. Эквивалентность электрических токов и постоянных магнитов 336
75. Пондеромоторные силы, испытываемые постоянными магнитами во внешнем магнитном поле 344

Глава VI. **Квазистационарное электромагнитное поле**

76. Индукция токов в движущихся проводниках 349
77. Закон электромагнитной индукции. Закон Ома для переменных токов 353
78. Квазистационарные токи. Дифференциальные уравнения переменных токов 358
79. Преобразование энергии в поле переменных токов. Энергия магнитного взаимодействия токов. Правило Ленца 361
80. Простейшие применения теории переменных токов. Трансформатор 366
81. Энергия магнитного поля. Энергетическое значение коэффициентов индукции 374
82. Преобразование энергии при намагничении пара- и диамагнетиков. Свободная энергия магнитного поля 381
83. Определение пондеромоторных сил магнитного поля из выражения энергии 385
84. Тензор натяжения магнитного поля 390
85. Вихри электрического поля 392
86. Зависимость электрического напряжения от пути интегрирования. Напряжение переменного тока 395
87. Уравнение непрерывности 400
88. Токи смещения 402
89. Конденсатор в цепи квазистационарного тока. Электрические колебания 408
90. Скин-эффект 413

Глава VII. **Переменное электромагнитное поле в неподвижной среде и его распространение. Электромагнитные волны**

91. Система максвелловых уравнений макроскопического электромагнитного поля 421
92. Теорема Пойнтинга. Поток энергии 427
93. Однозначность решений уравнений Максвелла 433

94. Дифференциальные уравнения для потенциалов электромагнитного поля 436
95. Решение волнового уравнения и уравнения Даламбера . . 439
96. Запаздывающие и опережающие потенциалы. Калибровочная инвариантность 446
97. Скорость распространения электромагнитных возмущений. Условия квазистационарности 453
98. Осциллятор. Запаздывающие потенциалы поля осциллятора 457
99. Поле осциллятора. Его излучение 465
100. Электромагнитная природа света. Плоские волны в диэлектрике 474
101. Отражение и преломление плоских волн в диэлектриках . 480
102. Распространение волн в проводящей среде. Отражение света от металлической поверхности 489
103. Световое давление. Количество движения электромагнитного поля 493
104. Электромагнитный момент количества движения. Частный случай статического поля 499
105. Тензор натяжений и пондеромоторные силы электромагнитного поля 504
106. Пример неквазистационарных токов: волны вдоль кабеля 509
107. Приближенная теория быстропеременных токов. «Уравнение телеграфистов» 517
108. Свободная энергия ферромагнетиков. Гистерезис 522
109. Общая характеристика теорий близко- и дальнодействия 528

Глава VIII. **Электромагнитные явления в медленно движущихся средах**

110. Дифференциальные уравнения поля в движущихся средах 533
111. Конвекционный ток. Поляризация и намагничение движущихся сред 537
112. Закон Ома и электромагнитная индукция в движущихся проводниках. Униполярная индукция 544
113. Диэлектрик, движущийся в электромагнитном поле . . . 550
114. Распространение света в движущихся диэлектриках. Коэффициент увлечения Френеля. Отражение от движущегося зеркала 552
115. Преобразования системы отсчета. Относительный характер различия между электрическими и магнитными полями 556

Решения задач 561

Приложения

I. Векторный анализ

1. Векторная алгебра 574
2. Векторные и скалярные поля. Градиент 576

3. Поток вектора через поверхность 581
4. Теорема Гаусса. Дивергенция 583
5. Циркуляция вектора. Ротор вектора. Теорема Стокса . . 589
6. Производная вектора по направлению 596
7. Оператор набла. Вторые производные. Производные от произведений 597
8. Интегральные соотношения. Теорема Грина 603
9. Важнейшие формулы векторного анализа 606

II. Основные формулы в СИ и в гауссовой системе . . . 608

III. Фундаментальные физические константы 610

Дополнения

1. Сверхпроводимость (к § 41) 611
2. Магнитные монополи и «истинные» магнитные диполи. Тороидные моменты (к § 54, 57, 58) 611
3. Антиферромагнетизм и ферриты (к § 71) 611
4. Диспергирующие среды. Пространственная дисперсия (к § 92) 612
5. Анизотропные среды (к § 92) 613
6. Эффект Вавилова–Черенкова (к § 99) 613
7. Плазма (к § 102) 614

ПРЕДИСЛОВИЕ К ОДИННАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание книги является уже третьим посмертным. Из публикуемого ниже предисловия к 9-му изданию ясно, чем мы руководствовались при переиздании книги. В 10-м издании (1989 г.) мы следовали по тому же пути. То же сделано и в настоящем 11-м издании, необходимость которого очевидна в связи с ценностью книги, успешной работой высшей школы в России и тем, что курс И.Е. Тамма давно уже отсутствует в книжных магазинах.

То, что сделано в новом издании, — это несколько примечаний и замена части рекомендуемой литературы на более современную. При этом, как и ранее, учтены замечания некоторых сотрудников Отдела теоретической физики им. И.Е. Тамма ФИАН. В подготовке настоящего издания принял участие Е.З. Мейлихов (РНЦ «Курчатовский Институт»). Мы надеемся, что появление нового издания классической книги И.Е. Тамма принесет немалую пользу.

2003 г. *В.Л. Гинзбург*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕСЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Предыдущее девятое, уже посмертное, издание классического курса И.Е. Тамма вышло в свет в 1976 г. Книга, несмотря на довольно значительный тираж, давно разошлась и поэтому сейчас сравнительно трудно доступна. Между тем курс И.Е. Тамма в основном не устарел и в силу своих многочисленных достоинств продолжает использоваться. Естественно стремление предоставить возможность познакомиться с курсом также и новому поколению физиков и инженеров и в особенности студентам. Этим и объясняется переиздание книги.

По причинам, указанным в помещенном ниже предисловии к девятому изданию, практически никаких изменений в текст и сейчас не вносилось. Добавлено лишь несколько подстрочных примечаний (примеч. ред.). Внесены также небольшие изменения в дополнения (новым является дополнение 2; обновились ссылки на литературу). В списке важнейших обозначений сделаны некоторые пояснения, касающиеся общепринятой в настоящее время терминологии. Наконец, исправлены замеченные опечатки.

Основная работа по подготовке нового издания выполнена Б.М. Болотовским. При этом были учтены замечания, сделанные рядом сотрудников Отдела теоретической физики им. И.Е. Тамма Физического института им. П.Н. Лебедева АН СССР. Мы надеемся, что появление нового издания книги И.Е. Тамма принесет немалую пользу.

1986 г. *В.Л. Гинзбург*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ДЕВЯТОМУ ИЗДАНИЮ

«Основы теории электричества» — классический курс электродинамики, написанный одним из самых выдающихся и известных советских физиков Игорем Евгеньевичем Таммом (1895–1971).

При жизни автора книга выдержала восемь изданий и уже более сорока лет эффективно используется весьма широким кругом читателей.

Как подчеркнул сам И.Е. Тамм в предисловии к последнему (восьмому) прижизненному изданию (1965 г.), книгу «следовало бы существенно переработать». Фактически, однако, Игорь Евгеньевич счел возможным внести в книгу лишь небольшое число изменений. Тем меньше оснований менять что-либо существенное сейчас, когда мы не можем учесть пожеланий и мнение самого автора. Да и вообще попытки модернизировать уже зарекомендовавшие себя классические курсы, как правило, не приносят подлинного успеха — первоначальный курс теряет свою цельность и стройность, а нового вполне современного курса тоже не получается.

По этим причинам настоящее издание является по сути дела перепечаткой предыдущего восьмого издания. Исправлена лишь неточность (указанная Д.В. Сивухиным), допущенная при вычислении поляризуемости газа из молекул с постоянным дипольным моментом (с. 135 и 148 восьмого издания), исправлены замеченные опечатки, изменено или внесено вновь несколько слов в тексте (в частности, в дополнениях), помещено небольшое число примечаний редактора и, наконец, сделаны некоторые изменения, касающиеся ссылок на литературу (устранены отдельные ссылки на старые труднодоступные источники, приведено несколько новых ссылок). При этом, поскольку книга является учебным пособием, а не изданием академического типа, представилось нецелесообразным как-то специально отмечать в самом тексте все подобные второстепенные изменения. По той же причине мы отказались от весьма соблазнительной идеи поместить в виде дополнения к книге некоторые оригинальные рабо-

ты И.Е. Тамма, посвященные электродинамическим вопросам. К тому же с этими работами читатель легко сможет познакомиться по недавно опубликованному двухтомному собранию научных трудов И.Е. Тамма (издательство «Наука», 1975).

В заключение должен с благодарностью отметить существенную помощь, оказанную при подготовке настоящего издания Б.М. Болотовским и В.А. Угаровым. Все мы надеемся, что настоящее издание книги И.Е. Тамма, как и предыдущие, принесет большую пользу.

1975 г. *В.Л. Гинзбург*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга предназначена для лиц, владеющих дифференциальным и интегральным исчислениями и векторной алгеброй; основы же векторного анализа излагаются в тексте по мере надобности.

Основной целью этого курса является выяснение *физического смысла и содержания* основных положений теории электричества; по сравнению с этой целью формально-логической стройности, строгости и общности изложения отводилась лишь соподчиненная роль.

Не стремясь к полноте изложения, я опускал даже сравнительно важные вопросы, если они выпадали из общей нити изложения (например, термоэлектрические явления, электролиз и т. д.). С другой стороны, на некоторых вопросах (например, в теории диэлектриков и магнетиков) я позволил себе остановиться несколько подробнее, чем это обыкновенно принято. Технических приложений теории я не излагал, но стремился по возможности подготовить читателя к непосредственному переходу к изучению прикладной теории электричества.

Ввиду неразработанности русской научной *терминологии* я принужден был ввести два новых термина: «сторонняя» электродвижущая сила (eingeprägte Kraft) и «магнетик». Кроме того, я позволил себе уклониться от общепринятого, но устарелого и нерационального словоупотребления терминов «свободный» и «связанный» заряд. Наконец, гауссову (симметрическую) систему единиц в отличие от электростатической и электромагнитной я называю просто абсолютной системой (без прилагательного).

Большинство помещенных в книге задач составляет органическую часть текста; решения многих задач необходимы для понимания последующего изложения.

1929 г. *И.Е. Тамм*

СПИСОК ВАЖНЕЙШИХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Векторы обозначаются жирным прямым шрифтом (например $\mathbf{R}$); та же буква светлым шрифтом (например R) означает *числовое значение* соответствующего вектора.

Интегралы любой кратности обозначаются одним-единственным знаком $\int$ и различаются лишь обозначением элемента интегрирования: элемент объема (трехкратного интеграла) — dV, элемент поверхности (двукратного интеграла) — dS, элемент линии (одинарного интеграла) — ds.

Знак $\oint$ означает интеграл по *замкнутой* поверхности или по *замкнутому* контуру.

О смысле индексов a и q у знаков grad, div и т. д. (например $\mathrm{grad}_a R$, $\mathrm{grad}_V R$) см. в приложении.

При ссылках в тексте на формулы векторного анализа, помещенные в приложении, формулы эти отмечаются звездочкой, например (17*). В случае, если под одним номером объединено несколько формул, то в ссылках на каждую из этих формул номер ее указывается дополнительным индексом справа внизу, например (43^*_3).

A — работа
$\mathbf{A}$ — вектор-потенциал
$\mathbf{B}$ — магнитная индукция
c — электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме
C — емкость, циркуляция вектора
$\mathbf{D}$ — электрическая индукция (электрическое смещение)
e — электрический заряд (элементарный заряд)
$\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля
$\mathscr{E}$ — напряжение (электродвижущая сила)
$\mathscr{E}^{\text{стр}}$ — сторонняя электродвижущая сила
$\mathbf{f}$ — плотность сил
$\mathbf{F}$ — пондеромоторная сила
$\mathbf{g}$ — плотность электромагнитного количества движения
$\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля
$\mathbf{i}$ — единичный вектор по оси x, плотность поверхностных токов
$\mathbf{I}$ — намагничение (намагниченность)
$\mathbf{I}_0$ — постоянное намагничение
$\mathbf{j}$ — единичный вектор по оси y, плотность объемного тока
$\mathbf{J}$ — сила тока
k — постоянная Больцмана, волновое число
$\mathbf{k}$ — единичный вектор по оси z
$\mathbf{K}$ — момент количества движения (импульса)
L — кривая, в частности замкнутый контур
L_{ii} — коэффициент самоиндукции (индуктивность)
L_{ik} — коэффициент взаимной индукции (взаимная индуктивность) $(i \neq k)$

m — магнитный (фиктивный) заряд
$\mathbf{M}$ — магнитный момент
$\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали
N — поток вектора, в частности электрического; число молекул в единице объема (плотность числа частиц)
$\mathbf{N}$ — единичный вектор нормали, момент пары сил
$\mathbf{o}$ — угловая скорость прецессии
$\mathbf{p}$ — электрический момент диполя
P — работа сторонних электродвижущих сил
$\mathbf{P}$ — поляризация (поляризованность), вектор Герца
Q — количество теплоты, выделяемое током в единицу времени
R — сопротивление
$\mathbf{R}$ — радиус-вектор
$\mathbf{r}$ — вектор кратчайшего расстояния от заданной оси
$d\mathbf{s}$ — элемент длины
S — поверхность
$\mathbf{S}$ — вектор Пойнтинга
t — время
$\mathbf{t}$ — единичный касательный вектор
T — абсолютная (термодинамическая) температура, кинетическая энергия, период колебаний
$\mathbf{T}$ — натяжение, тензор натяжения
$\mathbf{u}$ — скорость
U — потенциальная функция магнитного поля токов
$\mathbf{v}$ — скорость
V — объем
w — плотность энергии
W — энергия
α — азимут, поляризуемость единицы объема
α, β, γ — направляющие углы вектора
β — поляризуемость молекулы
ε — диэлектрическая проницаемость [1])
ϑ — полярный угол
$\varkappa$ — магнитная восприимчивость, линейная плотность заряда
λ — коэффициент электропроводности (удельная проводимость), длина волны
μ — магнитная проницаемость
ρ — объемная плотность электрических зарядов
$\rho_{\text{м}}$ — объемная плотность магнитных фиктивных зарядов
σ — поверхностная плотность электрических зарядов
$\sigma_{\text{м}}$ — поверхностная плотность магнитных фиктивных зарядов
τ — плотность, масса единицы объема
φ — электрический потенциал
Φ — магнитный поток
ψ — магнитный скалярный потенциал
Ψ — поток магнитной индукции, свободная энергия
ω — циклическая (круговая) частота
Ω — телесный угол
∇ — оператор Гамильтона («набла»)
∇^2, Δ — оператор Лапласа

[1]) В оригинале «диэлектрическая постоянная». Однако, поскольку в настоящее время общепринятым является термин «диэлектрическая проницаемость», то в тексте произведена соответствующая замена. (*Примеч. ред.*)

ВВЕДЕНИЕ

Согласно современным воззрениям атомы всех тел построены из электрически заряженных частиц — сравнительно легких электронов, заряженных отрицательно, и сравнительно тяжелых атомных ядер, заряженных положительно. Нейтральные в электрическом отношении тела кажутся нам таковыми только потому, что отрицательный заряд входящих в их состав электронов равен положительному заряду входящих в их состав атомных ядер, так что влияние противоположных зарядов взаимно нейтрализуется (по крайней мере на расстояниях, достаточно больших по сравнению с расстоянием между отдельными электрическими частицами, входящими в состав нейтрального тела). Перераспределение электрических зарядов и, в частности, электрический ток обусловливается перемещением электрических частиц и притом большей частью электронов, а не атомных ядер, ибо в состав атомов химических элементов всегда входит некоторое число «внешних» электронов, сравнительно слабо связанных с массивным центральным атомным ядром и сравнительно легко от него отщепляющихся.

Отрицательный заряд электрона равен $4{,}80 \cdot 10^{-10}$ абсолютных электростатических единиц электричества (или $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ кулонов), положительные же заряды атомных ядер по абсолютной величине равны целым кратным этого так называемого элементарного заряда, являющегося неделимым атомом электричества. Заряды различных атомных ядер варьируются от одного (водород) до девяноста двух (уран) элементарных зарядов [1]. Самым легким атомным ядром является ядро водорода, носящее название протона; масса протона ($1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г) примерно в 2000 раз больше массы электрона ($9{,}11 \cdot 10^{-28}$ г). Геометрические размеры как атомных ядер, так и электронов настолько малы по сравнению со средними расстояниями между этими частицами в атомах и молекулах, что при рассмотрении громадного большинства физических и химических явлений как атомные ядра, так и электроны можно считать материальными точками, характеризуемыми определенным электрическим зарядом и определенной массой. Вопрос же о том, как построены атомные ядра из более

[1]) В настоящее время искусственным путем получен ряд новых тяжелых элементов, стоящих за ураном в периодической системе.

элементарных частиц (протонов и нейтронов), имеет значение только для сравнительно ограниченного круга физических явлений, относящегося к области ядерной физики, которую мы рассматривать не будем. Только для этой области явлений имеют значение и так называемые ядерные силы, которыми определяется взаимодействие частиц (протонов и нейтронов), входящих в состав атомных ядер.

Исходя из указанных представлений современная физика ставит своей задачей определить электрическую структуру всех встречающихся в природе веществ (число, расположение и характер движения входящих в состав их электрических частиц) и вывести законы физических и химических явлений из основных законов взаимодействия электрических зарядов и законов их движения (которые в микромире носят квантовый характер). Единственное исключение нужно сделать для тех явлений, для которых имеют существенное значение силы тяготения и силы ядерные, ибо только эти силы не сводятся к взаимодействию электрических зарядов.

Первым шагом на пути к разрешению указанной задачи должно быть выяснение законов взаимодействия электрических зарядов, законов электромагнитного поля. Громадное большинство применяемых на практике способов наблюдения и измерения слишком грубы для того, чтобы с их помощью можно было обнаружить существование отдельных частиц электричества. Наименьшие электрические заряды, доступные наблюдению с помощью этих способов, содержат в себе многие миллионы и миллиарды частиц электричества, отделенных друг от друга ничтожными расстояниями. При таком суммарном или макроскопическом[1]) изучении электрических явлений в масштабе, доступном непосредственному наблюдению, мы можем, не внося сколько-нибудь существенной ошибки в результаты рассуждений, вовсе не учитывать атомистического строения электричества и пользоваться представлением о непрерывно протяженных электрических зарядах; иными словами, мы можем считать, что электрические заряды сплошным, непрерывным образом заполняют заряженные участки материальных тел (так называемые «объемные заряды»). Упрощая таким образом нашу задачу, мы лишь следуем примеру механики. Ввиду того что изучение механики весомых тел при учете атомистической структуры вещества связано со значительными математическими трудностями, теория упругости, гидродинамика и аэродинамика оперируют с идеализированным представлением о непрерывно протяженных материальных телах. В известных, и притом довольно широких, пределах подобная замена вполне законна, и результаты,

[1]) Греческое «макрос» — большой и «скопейн» — видеть.

полученные при рассмотрении непрерывных сред, оказываются применимыми к реальным телам прерывного строения.

Следуя историческому ходу развития электродинамики, мы начнем с изложения макроскопической теории электромагнитных явлений, основанной на представлении о непрерывном распределении электрических зарядов. По накоплении известного количества сведений мы перейдем к параллельному изложению основных представлений микроскопической теории, основанной на учете атомистического строения электричества (так называемая «электронная теория»), и покажем, что приближенные макроскопические законы суммарных явлений вытекают из более точных микроскопических законов явлений элементарных. При этом, однако, нужно иметь в виду, что сколько-нибудь полное и строгое изложение микроскопической теории неизбежно должно базироваться на *квантовой теории* в ее современной форме. Ввиду того, что мы не можем предполагать у читателя основательного знакомства с квантовой механикой, мы вынуждены будем в основном ограничиться изложением только тех вопросов микроскопической теории, которые с достаточной степенью точности могут быть рассмотрены в рамках классической (доквантовой) физики.

В главе VII мы вновь ограничимся рассмотрением макроскопической теории поля с тем, чтобы на основе полученных результатов сформулировать полную систему основных положений этой теории (формулировка существенной их части содержится в так называемых уравнениях Максвелла). Эта система основных положений, или «постулатов», играет в электродинамике такую же роль, какую в классической механике играют «аксиомы» Ньютона. В частности, справедливость этих основных постулатов макроскопической электродинамики (как и справедливость аксиом Ньютона) может быть наиболее убедительным образом обоснована не индуктивным методом (на который только и можно опираться при отыскании основных закономерностей, но который, однако, не может дать совершенно строгого доказательства их справедливости), а согласием с опытом всей совокупности следствий, вытекающих из теории и охватывающих все закономерности макроскопического электромагнитного поля. В главе VII мы рассмотрим некоторые из этих следствий, относящихся, в частности, к электромагнитным волнам.

Наконец, в главе VIII мы рассмотрим электромагнитные явления в движущихся средах, ограничившись случаем, когда скорость этих сред мала по сравнению со скоростью света.

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НЕПОДВИЖНЫХ ЗАРЯДОВ В ОТСУТСТВИЕ ДИЭЛЕКТРИКОВ

§ 1. Закон Кулона

В этой главе мы будем предполагать, что в электрическом поле неподвижных зарядов, кроме проводников электричества, никаких других материальных тел нет.

1. В основе *теории* электростатического поля лежит закон Кулона, являющийся обобщением данных *опыта*. Этот закон, как известно, гласит, что два заряженных тела *бесконечно малых размеров* (два *точечных* заряда) отталкиваются, если заряды их одноименны, и притягиваются, если они разноименны, причем сила их взаимодействия F пропорциональна $e_1 e_2 / R_{12}^2$:

$$F \sim \frac{e_1 e_2}{R_{12}^2}, \tag{1.1}$$

где e_1 и e_2 — заряды первого и второго тел, а R_{12} — расстояние между ними.

Если зарядов имеется не два, а больше, то на каждый заряд будут действовать со стороны всех остальных зарядов силы типа (1.1). В частности, если заряды e_1 и e_2 помещены в воздух, керосин или какую-либо другую непроводящую среду, то, помимо непосредственного взаимодействия зарядов e_1 и e_2 друг с другом по закону (1.1), необходимо учитывать также и взаимодействие этих зарядов e_1 и e_2 с зарядами электронов и атомных ядер, входящих в состав нейтральных молекул среды.

В настоящей главе мы ограничимся рассмотрением электростатического поля в вакууме. Конечно, абсолютный вакуум неосуществим на опыте, и в эвакуируемых сосудах всегда остается некоторое, хотя бы и ничтожное, количество воздуха. Однако это вовсе не значит, что законы электрического поля в вакууме недоступны опытному исследованию. Изучая изменение характера поля по мере уменьшения давления воздуха, можно установить тот предел, к которому стремятся свойства поля (например силы взаимодействия зарядов) по мере приближения к абсолютному вакууму. Эти предельные свойства (предельное значение силы), очевидно, и будут характеризовать собою поле в абсо-

лютном вакууме. Впрочем, как показывает опыт, при уменьшении плотности воздуха от нормальной до достижимого на опыте предела, свойства поля изменяются столь незначительно, что если нет нужды в особой точности, то этими изменениями можно в большинстве случаев вовсе пренебречь и считать, что свойства поля в воздухе тождественны свойствам поля в вакууме.

2. Выражаемая формулой (1.1) обратная пропорциональность силы взаимодействия зарядов квадрату расстояния между ними может быть непосредственно проверена на опыте [1]). Что же касается зависимости этой силы от зарядов, то дело обстоит несколько сложнее, ибо сами заряды в свою очередь могут быть определены только путем измерения силы их взаимодействия. Однако если число зарядов не меньше четырех, то искомая зависимость все же может быть проверена путем последовательного измерения попарных сил взаимодействия между ними.

Предположим для простоты, что при этих измерениях исследуемые заряды всякий раз помещаются на одном и том же расстоянии друг от друга (остальные же заряды устраняются). При этом условии из уравнения (1.1) вытекают соотношения

$$\frac{F_{23}}{F_{13}} = \frac{e_2}{e_1} \quad \text{и} \quad \frac{F_{24}}{F_{14}} = \frac{e_2}{e_1},$$

где F_{ik} — сила взаимодействия зарядов e_i и e_k.

Таким образом, отношение e_2/e_1 (а также и отношения e_3/e_1, e_4/e_1 и т. д.) может быть определено из двух *независимых* рядов измерений (сил F_{13} и F_{23}, с одной стороны, и сил F_{14} и F_{24} — с другой). Совпадение результатов этих независимых измерений и дает нам право утверждать, что каждый заряд может быть охарактеризован некоторым постоянным числом e_i так, чтобы сила F_{ik} была пропорциональна произведению $e_i e_k$.

Конечно, путем измерения сил взаимодействия можно определить только *отношение* величин зарядов e_i/e_k, единица же заряда может быть выбрана произвольно. Единица заряда в абсолютной системе единиц выбрана так, чтобы при измерении сил и расстояний в системе СГС фактор пропорциональности между F и $e_1 e_2/R_{12}^2$ равнялся единице, т. е. чтобы осуществлялось *равенство*

$$F = \frac{e_1 e_2}{R_{12}^2}. \tag{1.2}$$

Стало быть, абсолютная единица электричества есть такое количество электричества, которое действует на равное ему количество электричества, находящееся на расстоянии 1 см, с силой в одну дину. В практической же системе единиц за единицу

[1]) В настоящее время экспериментально установлено, что отличие показателя степени в знаменателе формулы (1.1) от 2 не превышает 10^{-15}.

электричества принят кулон (К):

$$1 \text{ кулон} = 3 \cdot 10^9 \text{ абс. единиц электричества}\ ^{1}).$$

Что касается знака зарядов, то чисто условно принято считать положительными те заряды, которые появляются на стекле при натирании его шелком или фланелью, а стало быть, и те, которые отталкиваются этими зарядами, возникшими на стекле.

Из уравнения (1.2) следует, что в абсолютной системе единиц *размерность* $[e]$ электрического заряда e, т. е. зависимость единицы заряда от единиц длины (L), времени (T) и массы (M), такова:

$$[e] = \left[R\sqrt{F}\right] = \mathrm{L} \cdot \sqrt{\mathrm{MLT}^{-2}} = \mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{T}^{-1}.$$

3. Весьма существенно, что закон Кулона (1.1) или (1.2) справедлив только для взаимодействия *точечных* зарядов, т. е. заряженных тел бесконечно малых размеров. Только в этом случае само понятие расстояния между зарядами имеет вполне определенный, однозначный смысл, и только в этом случае взаимодействие заряженных тел не зависит от их формы.

Конечно, выражение «бесконечно малый» нужно понимать в этом случае, как и всегда в физике, не в строго математическом смысле слова. В физике выражение «бесконечно малая» (или «бесконечно большая») величина всегда понимается в смысле «достаточно малой» (или «достаточно большой») величины, — достаточно малой по отношению к некоторой другой, *вполне определенной*, физической величине. Встречаясь с термином «бесконечный», всегда необходимо давать себе ясный отчет в том, какая именно величина взята в каждом отдельном случае в качестве мерила.

В формулировке закона Кулона *бесконечная малость* (*точечность*) *размеров заряженных тел понимается в смысле достаточной их малости по отношению ко взаимному расстоянию этих тел*, достаточной в том смысле, что при данном расстоянии тел сила их взаимодействия уже не изменяется в пределах *заданной точности измерений* при дальнейшем уменьшении

---

[1]) Заметим, что, помимо той абсолютной (гауссовой) системы единиц, которой мы будем пользоваться в настоящей книге под названием «абсолютной системы», в физике и технике часто применяются две другие системы единиц — электростатическая и электромагнитная. Соотношение между этими системами будет рассмотрено в гл. IV, пока же достаточно заметить, что абсолютные (гауссовы) единицы *электрических* величин (заряд, напряженность поля, потенциал, сила тока и т. д.) совпадают с единицами электростатическими, а абсолютные единицы *магнитных* величин (напряженность магнитного поля, коэффициент самоиндукции, магнитный момент) — с электромагнитными единицами.

Далее, и в отношении практических единиц необходимо различать так называемые «абсолютные» и «международные» практические единицы (см. § 59).

их размеров и при произвольном изменении их формы. Поскольку мы пока ограничиваемся макроскопическим рассмотрением явлений, мы должны помнить, что физически бесконечно малый, или «точечный», заряд может в действительности содержать в себе чрезвычайно большое число отдельных электронов и протонов. Так, например, если бы возникла необходимость определить силу электрического взаимодействия двух заряженных электричеством звезд, то, несмотря на громадные размеры звезд, мы были бы вправе считать их точечными зарядами, ибо при колоссальном расстоянии между звездами размеры и форма их не могут сколько-нибудь существенно сказаться на силе их взаимодействия. С другой стороны, два заряженных бузиновых шарика радиуса 0,1 см, находящихся на расстоянии 0,5 см друг от друга, не могут считаться точечными зарядами, и закон Кулона к ним непосредственно неприменим. Чтобы определить силу их взаимодействия, нужно мысленно разбить эти шарики на бесконечно малые (т. е. достаточно малые по сравнению с расстоянием в 0,5 см) элементы объема и определить по закону Кулона взаимодействие между зарядами каждой пары этих элементов объема. Сила взаимодействия между шариками будет равна равнодействующей этих элементарных сил [1].

4. При определении равнодействующей электрических сил нужно, конечно, принять во внимание, что силы эти суть векторы, и применять к ним правила векторного исчисления. Мы будем обозначать векторы жирным прямым шрифтом, а их числовое значение светлым курсивом. Так, например, $\mathbf{R}_{12}$ будет обозначать радиус-вектор, проведенный из точки 1 в точку 2, а R_{12} — числовое значение расстояния между точками 1 и 2. Очевидно, что $\mathbf{R}_{21} = -\mathbf{R}_{12}$, а $R_{21} = R_{12}$ [2]. При записи закона Кулона (1.2) в векторной форме необходимо отличать силу $\mathbf{F}_{12}$, с которой заряд e_1 действует на заряд e_2, от силы $\mathbf{F}_{21}$, с которой заряд e_2 действует на заряд e_1, ибо эти силы равны по величине, но противоположны по направлению ($\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$). Если заряды e_1 и e_2 одноименны по знаку (отталкивание), то направления векторов $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{R}_{12}$ совпадают между собой, так что

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{e_1 e_2}{R_{12}^2} \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{e_1 e_2}{R_{12}^3} \mathbf{R}_{12}, \tag{1.3}$$

[1] В основе этого вычисления лежит допущение, что сила взаимодействия двух (точечных) зарядов не зависит от того, подвергаются эти заряды воздействию других зарядов или нет. Это предположение вместе с утверждением, что равнодействующая электрических сил равна векторной сумме этих сил, составляет содержание принципа *наложения* или *суперпозиции* электрических полей. Принцип этот является обобщением данных опыта и лежит в основе современной теории электричества. См. также *примечание автора* на с. 291 и *примечание редактора* на с. 104.

[2] Для краткости мы будем иногда называть вектор $\mathbf{R}_{12}$ просто расстоянием точки 2 от точки 1, а вектор $\mathbf{R}_{21}$ — расстоянием точки 1 от точки 2.

ибо числовое значение вектора $\mathbf{R}_{12}/R_{12}$ равно единице, а произведение e_1e_2 положительно. Очевидно, что это уравнение остается справедливым и для разноименных зарядов, ибо в этом случае произведение e_1e_2 отрицательно, а сила $\mathbf{F}_{12}$ направлена обратно вектору $\mathbf{R}_{12}$ (притяжение). Наконец, очевидно, что

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = \frac{e_2e_1}{R_{21}^3}\mathbf{R}_{21}.$$

5. Отметим в заключение, что решающее значение в вопросе о справедливости закона Кулона, как и вообще любого закона, лежащего в основе того или иного отдела теоретической физики, имеет не только непосредственная опытная проверка этого закона, но также, что гораздо существеннее, и согласие с опытом всей совокупности выводов теории, одним из исходных пунктов которой является этот закон.

§ 2. Электрическое поле

1. Если в точку P, находящуюся на расстоянии R от заряда e, внести «пробный» заряд e', то можно обнаружить силу, действующую на этот пробный заряд и обусловленную присутствием заряда e. Сила эта *обнаруживается* только при наличии второго (пробного) заряда, и можно считать, что она и *возникает* лишь при наличии *обоих* зарядов e' и e. Однако изучение электрических явлений чрезвычайно облегчается, если исходить из представления, что как в точке P, так и во всех точках пространства, окружающего заряд e, *всегда* существует электрическая сила, обусловленная присутствием этого заряда, вне зависимости от того, проявляется ли существование этой силы в воздействии ее на другой (пробный) заряд (в случае наличия такового) или же ни в чем не проявляется (в случае отсутствия других зарядов).

Если в пространстве существуют электрические силы, обнаруживающиеся при внесении в него электрических зарядов, то мы говорим, что в нем существует *электрическое поле*. В дальнейшем мы будем исходить из представления, что всякий заряд возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле. Пока мы остаемся в пределах электростатики, понятие поля может рассматриваться как понятие чисто условное, введенное лишь для удобства описания электрических явлений. Однако, перейдя к учению о переменном электромагнитном поле, в частности к учению об электромагнитных волнах, мы убедимся, что понятие поля имеет глубокий физический смысл и что электромагнитное поле есть объективная реальность.

2. Согласно закону Кулона, сила, действующая на «пробный» заряд e' при внесении его в поле других зарядов, пропорциональна величине этого пробного заряда e'. Поэтому силы электриче-

ского поля будут вполне определены, если определена в каждой точке этого поля сила, действующая на помещенный в ней единичный, положительный заряд. Эта сила, действующая на заряд $e' = 1$, называется *напряженностью*, или *напряжением*, или *силой электрического поля*, или же просто электрическим вектором и обозначается буквой $\mathbf{E}$. Мы будем пользоваться первым из этих терминов, сохранив термин «напряжение» для совершенно иного понятия разности потенциалов и линейного интеграла вектора $\mathbf{E}$ (см. § 35).

Как следует из закона Кулона (1.3), напряженность поля точечного заряда e на расстоянии $\mathbf{R}$ от этого заряда равна

$$E = \frac{e}{R^2}, \quad \mathbf{E} = \frac{e}{R^3}\mathbf{R}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный из точки нахождения заряда e в рассматриваемую точку поля.

Напряженность поля двух или нескольких зарядов равна векторной сумме напряженностей поля каждого из этих зарядов в отдельности.

3. Необходимо помнить, что напряженность, или сила поля $\mathbf{E}$, вовсе не является силой в обычном, употребляемом в механике смысле этого слова. Механическая, или, как ее иногда называют, *пондеромоторная*, сила $\mathbf{F}$ (от латинского «пондус» — вес, «пондеромоторный» —движущий весомые тела), действующая на заряженное тело, определяется *произведением* силы поля $\mathbf{E}$ на заряд тела e:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}. \tag{2.2}$$

Соответственно этому в абсолютной системе единиц напряженность, или сила поля $\mathbf{E}$, имеет размерность (см. с. 19)

$$[E] = \frac{[F]}{[e]} = \frac{\mathrm{MLT}^{-2}}{\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{T}^{-1}} = \mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{-1/2}\mathrm{T}^{-1}.$$

4. На основании соотношения (2.2) одна из основных задач электростатики — определение механических сил взаимодействия заданной системы зарядов — сводится к определению *поля* $\mathbf{E}$ этих зарядов. Заметим при этом, что определить поле электрического вектора $\mathbf{E}$, как и вообще *определить поле* любого вектора, *значит определить значение вектора в каждой точке этого поля*. В дальнейшем мы рассмотрим способы теоретического вычисления электрических полей, в отношении же экспериментального изучения этих полей отметим следующее.

Экспериментальное изучение электрического поля может быть осуществлено внесением в него пробного заряда известной величины и измерением пондеромоторных сил $\mathbf{F}$, действующих на этот заряд в различных точках поля. Однако самый факт внесения в поле пробного заряда, вообще говоря, изменяет характер этого поля, ибо силы поля пробного заряда вызывают

перераспределение зарядов на находящихся в поле проводниках (электрическая индукция), сдвиг этих проводников и т. д. Чтобы избежать этого искажения первоначального характера поля, необходимо производить измерения с помощью *бесконечно малых пробных зарядов*, т. е. зарядов столь малых, что вызываемое их присутствием изменение распределения зарядов в пределах заданной точности наблюдений не может сказаться на результатах измерения. Говоря о пробных зарядах, мы в дальнейшем всегда будем предполагать, что это условие выполнено (если не оговорено противное).

§ 3. Теорема Гаусса

1. Если известно расположение зарядов, то поле $\mathbf{E}$ этих зарядов может быть определено путем суммирования кулоновых полей типа (2.1), возбуждаемых каждым из элементов этих зарядов в отдельности. Такого рода непосредственное суммирование, вообще говоря, требует в каждом отдельном случае довольно сложных вычислений. Во многих случаях задача эта может быть, однако, чрезвычайно облегчена применением некоторых теорем, трактующих об общих свойствах электрического поля, к рассмотрению которых мы теперь и перейдем.

Для этой цели вычислим поток вектора $\mathbf{E}$ через бесконечно малую площадку dS [1]). Предположим сначала, что поле $\mathbf{E}$ возбуждается точечным зарядом e, находящимся в точке O.

Если $\mathbf{R}$ есть радиус-вектор, проведенный из заряда к площадке dS (рис. 1), то на основании (2.1) и (12*) поток dN вектора $\mathbf{E}$ через эту площадку будет равен

$$dN = \mathbf{En}\,dS = \frac{e}{R^3}\,\mathbf{Rn}\,dS = \\ = \frac{e}{R^2}\cos(\mathbf{R},\,\mathbf{n})\,dS. \quad (3.1)$$

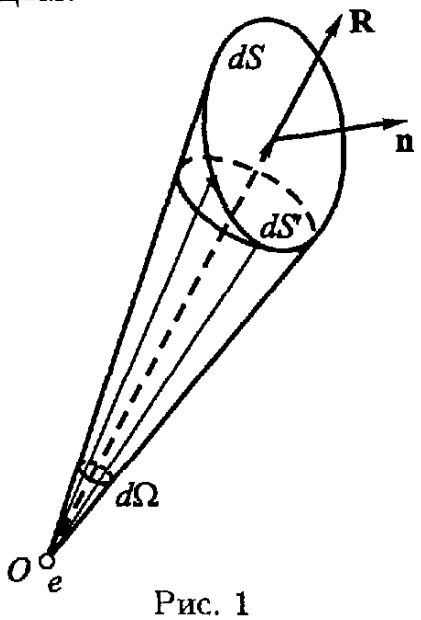

Рис. 1

Произведение $\cos(\mathbf{R},\,\mathbf{n})\cdot dS$ численно равно проекции площадки dS на поверхность, перпендикулярную к $\mathbf{R}$, причем это произведение положительно, если из O видна внутренняя сторона площадки dS [угол $(\mathbf{R},\,\mathbf{n})$ острый], и отрицательно, если видна ее внешняя сторона:

$$\cos(\mathbf{R},\,\mathbf{n})\,dS = \pm dS',$$

[1]) Основы векторного анализа изложены в приложении. Формулы приложения отмечаются значком *, например (21*).

где dS' есть абсолютная величина перпендикулярной к $\mathbf{R}$ проекции площадки dS.

Перпендикулярная к радиусу-вектору $\mathbf{R}$ площадка dS' совпадает с элементом шаровой поверхности радиуса R с центром в точке O. Если обозначить через $d\Omega$ телесный угол, под которым площадка dS' видна из O, то, как известно,

$$d\Omega = \frac{dS'}{R^2} = \pm\frac{\cos(\mathbf{R}, \mathbf{n})\, dS}{R^2}, \tag{3.2}$$

и, стало быть,

$$dN = \pm e\, d\Omega.$$

Площадка dS будет, очевидно, видна из точки O под тем же самым телесным углом $d\Omega$. Если условиться приписывать этому углу $d\Omega$ положительный знак, если из O видна внутренняя сторона dS и знак отрицательный, если видна ее внешняя сторона, то можно написать:

$$dN = E_n\, dS = e\, d\Omega. \tag{3.3}$$

Итак, в поле точечного заряда e поток электрического вектора $\mathbf{E}$ *через произвольно ориентированную площадку* dS *зависит*, помимо величины этого заряда, только от того телесного угла, положительного или отрицательного, под которым эта площадка *видна из занимаемой зарядом точки* O [1].

2. Обращаясь к потоку N вектора $\mathbf{E}$ через конечную поверхность S, получим [2]

$$N = \int\limits_S E_n\, dS = e \int\limits_S d\Omega = e\Omega, \tag{3.4}$$

где Ω — положительный или отрицательный телесный угол, под которым видна из заряда e вся поверхность S, т. е. телесный угол, образованный радиусами-векторами, проведенными из e к краевой линии этой поверхности (рис. 2). Крайне существенно, что в том случае, если поверхность S *замкнута*, угол этот может иметь только одно из двух значений: 4π и 0.

Действительно, точечный заряд может быть расположен либо внутри замкнутой поверхности, либо вне ее. Рассмотрение же

[1]) Как явствует из вывода формулы (3.3), она является следствием того, что напряженность поля $\mathbf{E}$ направлена радиально и при удалении от заряда убывает по тому же закону (обратно пропорционально R^2), по которому изменяется телесный угол $d\Omega$, соответствующий данной площадке dS. Поэтому для всех вообще центральных полей, обратных квадрату расстояния (например, поля тяготения, поля магнитных полюсов и т. д.), также будут справедливы формулы, аналогичные уравнению (3.3) и всем непосредственно вытекающим из него уравнениям.

[2]) Кратные интегралы в книге обозначаются одним-единственным знаком интеграла. См. с. 12.

точечного заряда, расположенного на самой поверхности, лишено физического смысла, ибо пользоваться представлением о точечном заряде можно лишь при условии, что действительные размеры заряда малы по сравнению с расстоянием его до рассматриваемых точек поля. Представление же о точечном заряде, расположенном на поверхности, поток электрического вектора через которую мы определяем, этому условию, очевидно, не удовлетворяет.

Если заряд расположен внутри замкнутой поверхности S, то эта поверхность окружает его со всех сторон и, стало быть, видна из него под углом $\Omega = 4\pi$. Следовательно, в этом случае

$$N = \oint\limits_S E_n \, dS = 4\pi e.$$

Если же заряд e находится в точке O, лежащей вне замкнутой поверхности S, то из O можно провести к поверхности S пучок касательных (рис. 3). Совокупность этих касательных образует конус, соприкасающийся с S вдоль некоторой замкнутой

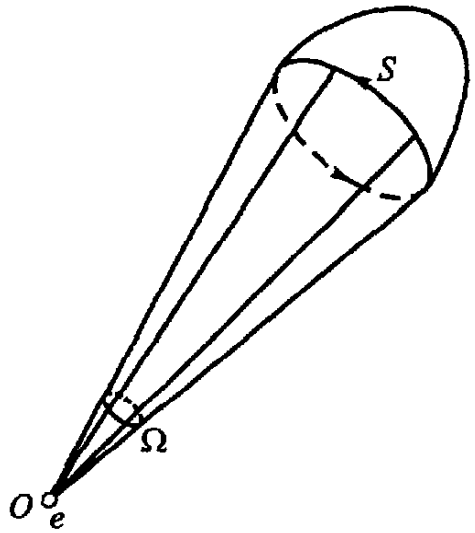

Рис. 2

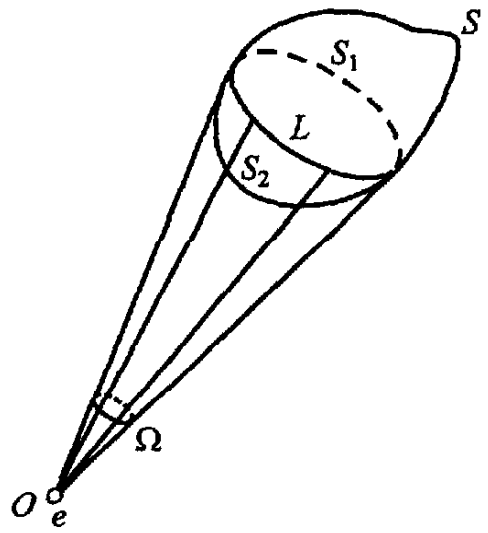

Рис. 3

линии L, которая разделит поверхность S на две части: S_1 и S_2. Обе части поверхности S будут видны из точки O под одним и тем же телесным углом, соответствующим раствору касательного конуса, причем одна из этих частей будет видна с ее внутренней стороны, а другая — с внешней. Таким образом, частям поверхности S_1 и S_2 будут соответствовать углы Ω_1 и Ω_2, равные по величине и противоположные по знаку. Стало быть, и потоки электрического вектора через S_1 и S_2 будут равны по величине, но противоположны по знаку и в сумме дадут нуль. Таким образом, поток вектора $\mathbf{E}$ через всякую замкнутую поверхность, не

охватывающую заряда e, равен нулю:

$$N = \oint_S E_n \, dS = 0.$$

Оба эти возможные случаи (заряд внутри и вне поверхности) могут быть выражены одной-единственной формулой

$$N = \oint_S E_n \, dS = 4\pi e, \tag{3.5}$$

если только условиться понимать в этой формуле под e величину заряда, расположенного *внутри* поверхности S, и, стало быть, полагать e равным нулю, если заряд расположен вне этой поверхности.

3. Отличающаяся чрезвычайной простотой формула (3.5), выведенная нами для поля, возбуждаемого одним-единственным точечным зарядом, остается справедливой и для поля произвольной системы электрических зарядов. Действительно, любая система зарядов может быть разложена на совокупность элементарных (точечных) зарядов. Пусть $\mathbf{E}$ — напряженность результирующего поля всей системы зарядов, а $\mathbf{E}_i$ — напряженность поля i-го элементарного заряда e_i. Тогда

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$$

и

$$E_n = \sum_i E_{in}.$$

Стало быть,

$$N = \oint_S E_n \, dS = \sum_i \oint_S E_{in} \, dS = 4\pi \sum_i e_i, \tag{3.6}$$

причем последняя сумма распространяется только на те заряды, которые расположены внутри поверхности S. Эта формула выражает собой фундаментальную *теорему Гаусса* [1]:

В произвольном электростатическом поле (в вакууме) *поток электрического вектора* $\mathbf{E}$ *через произвольную замкнутую поверхность равен умноженной на* 4π *величине заряда, расположенного внутри этой поверхности.* Эта величина заряда есть, конечно, алгебраическая сумма всех зарядов, находящихся внутри S.

[1]) Эту теорему не следует смешивать с известной из векторного анализа (см. (17*)) теоремой Гаусса, устанавливающей связь между потоком произвольного вектора через замкнутую поверхность и объемным интегралом дивергенции этого вектора. Для отличия от этой последней мы будем иногда называть формулу (3.6) *электростатической* теоремой Гаусса.

§ 4. Электрическое поле заряженных поверхностей

1. Применение теоремы Гаусса чрезвычайно упрощает решение ряда задач электростатики. В этом параграфе мы применим ее к рассмотрению некоторых свойств поля заряженных поверхностей.

Конечно, строго говоря, заряд всегда занимает известный объем и не может быть сосредоточен на бесконечно тонкой (геометрической) поверхности. Однако слой заряда, толщина которого достаточно мала по сравнению с его расстоянием от исследуемых точек поля, можно считать зарядом поверхностным с тем же правом, с каким мы рассматриваем заряды точечные.

Плотностью поверхностного заряда σ называется, как известно, заряд, приходящийся на единицу площади данной поверхности. В том случае, когда заряд распространен по поверхности неравномерно, плотностью его в данной точке поверхности называется предел отношения

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta S} = \frac{de}{dS}, \tag{4.1}$$

где Δe есть заряд элемента поверхности ΔS.

2. *Скачок нормальной слагающей вектора* $\mathbf{E}$ *на заряженной поверхности.* Рассмотрим произвольную заряженную поверхность S. Выберем произвольным образом направление внешней нормали $\mathbf{n}$ к этой поверхности и условимся обозначать индексами 1 и 2 величины, относящиеся соответственно к внутренней и внешней (по отношению к нормали $\mathbf{n}$) стороне поверхности.

Выделим мысленно около рассматриваемой точки заряженной поверхности прямую призму с образующими dl, перпендикулярными к поверхности. Пусть эта призма вырезает из поверхности элемент S' столь малый, что его можно считать плоским и равномерно заряженным (рис. 4).

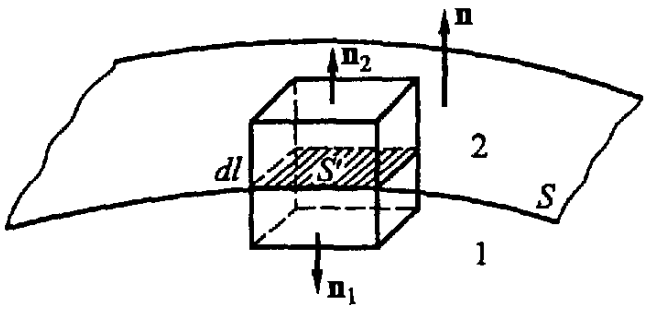

Рис. 4

Внутри призмы будет находиться заряд $\sigma S'$, расположенный на элементе, вырезаемом призмой из заряженной поверхности S. Стало быть, поток электрического вектора через поверхность

призмы по теореме Гаусса должен равняться:

$$N = \oint E_n \, dS = 4\pi\sigma S'.$$

С другой стороны, поток этот может быть вычислен непосредственно. Поток через нижнее основание призмы равен $E_1 \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}_1)S'$, а через верхнее $E_2 \cos(\mathbf{E}_2, \mathbf{n}_2)S'$, где $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ — векторы $\mathbf{E}$ у соответствующих оснований призмы, а $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — внешние нормали к этим основаниям. Поток же вектора $\mathbf{E}$ через боковую поверхность призмы мы обозначим через N'; тогда

$$N = \{E_1 \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}_1) + E_2 \cos(\mathbf{E}_2, \mathbf{n}_2)\}S' + N'. \qquad (4.2)$$

Направление нормали $\mathbf{n}_2$ совпадает с направлением нормали $\mathbf{n}$, а направление $\mathbf{n}_1$ прямо противоположно. Стало быть,

$$E_1 \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}_1) = -E_{1n}, \quad E_2 \cos(\mathbf{E}_2, \mathbf{n}_2) = E_{2n},$$

где E_{1n} и E_{2n} — проекции векторов $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ на нормаль $\mathbf{n}$. Таким образом,

$$N = (E_{2n} - E_{1n})S' + N' = 4\pi\sigma S'.$$

Будем теперь уменьшать высоту призмы dl, не изменяя при этом ее основания S'. Поток N' через безгранично уменьшающуюся боковую поверхность призмы будет стремиться к нулю как бесконечно малая второго порядка (по сравнению с N), так что общий поток вектора через поверхность призмы сведется в пределе к потоку через ее основания:

$$N = (E_{2n} - E_{1n})S' = 4\pi\sigma S',$$

откуда

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma. \qquad (4.3)$$

Стало быть, нормальные слагающие вектора $\mathbf{E}$ в двух смежных точках поля, разделенных заряженной поверхностью S, разнятся на $4\pi\sigma$ [1]).

Иными словами, нормальная слагающая вектора $\mathbf{E}$ испытывает скачок $4\pi\sigma$ при прохождении через любую заряженную поверхность, независимо от формы этой поверхности и от наличия или отсутствия зарядов вне ее. Объясняется это тем, что поле поверхностных зарядов по разные стороны поверхности направлено в противоположные стороны: от поверхности, если она заряжена положительно, и к поверхности в случае отрицательного заряда.

---

[1]) Заметим, что значение разности $E_{2n} - E_{1n}$ не зависит от выбора направления нормали к поверхности разрыва: хотя при изменении направления $\mathbf{n}$ знак проекций вектора $\mathbf{E}$ на направление $\mathbf{n}$ меняется на обратный, но одновременно с этим сторона поверхности, ранее считавшаяся первой (т. е. внутренней по отношению к $\mathbf{n}$), должна будет именоваться второй, и обратно.

3. *Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.* Напряженность поля равномерно заряженной бесконечной плоскости P, по соображениям симметрии, должна быть перпендикулярна к этой плоскости и должна иметь противоположные направления по обе стороны от нее: она направлена от плоскости P, если ее заряд положителен (рис. 5), и к плоскости P, если он отрицателен. Напряженность E в различных точках поля может зависеть лишь от расстояния их от плоскости P и должна быть одинаковой во всех точках любой плоскости, параллельной P.

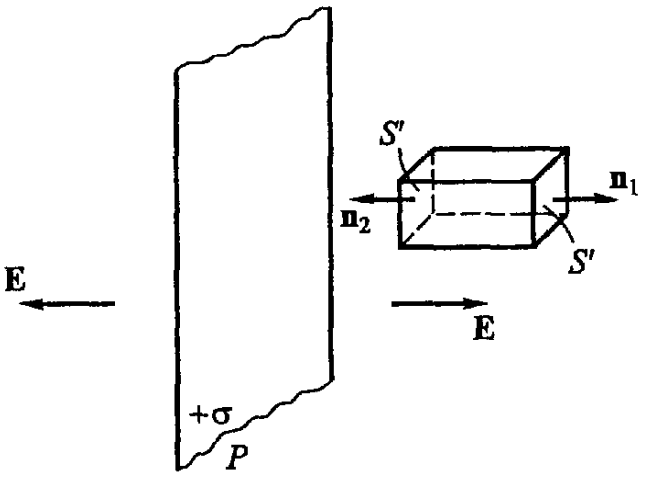

Рис. 5

Выделим мысленно в поле плоскости P прямую призму с основанием S' и с образующими, перпендикулярными к P, и предположим сначала, что призма эта не пересекается плоскостью P, т. е. находится целиком по одну сторону этой плоскости.

Вычисление потока электрического вектора через поверхность этой призмы вновь приведет нас к формуле (4.2). Приняв во внимание, что поток N' через боковую поверхность призмы в этом случае равен нулю (так как $\mathbf{E}$ параллельно этой поверхности), получаем

$$N = \{E_1 \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}_1) + E_2 \cos(\mathbf{E}_2, \mathbf{n}_2)\} S'.$$

По условию призма не пересекается заряженной плоскостью P, поэтому внутри нее нет зарядов и, стало быть, согласно теореме Гаусса (3.6), поток N должен равняться нулю, т. е.

$$E_1 \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}_1) + E_2 \cos(\mathbf{E}_2, \mathbf{n}_2) = 0.$$

Так как $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ направлены одинаково, а нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — противоположно, то $\cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}_1) = -\cos(\mathbf{E}_2, \mathbf{n}_2)$ и, стало быть,

$$E_1 = E_2.$$

Поскольку положение оснований призмы может быть выбрано произвольно, то из этого равенства следует, что во всех точках ограниченного плоскостью P полупространства вектор $\mathbf{E}$ постоянен по величине, а так как он постоянен и по направлению, то, следовательно,

$$\mathbf{E} = \text{const}.$$

В другом же полупространстве вектор $\mathbf{E}$ будет, очевидно, иметь ту же величину и противоположное направление.

Чтобы определить $\mathbf{E}$, можно воспользоваться формулой (4.3). В рассматриваемом случае слагающие этого вектора по направлению нормали $\mathbf{n}$ к плоскости имеют, очевидно, по разные стороны плоскости противоположные знаки и численно равны самому вектору $\mathbf{E}$. Поэтому получаем

$$E_{2n} - E_{1n} = 2E_{2n} = \pm 2E = 4\pi\sigma,$$

где в последнем равенстве нужно взять знак плюс или минус в зависимости от того, заряжена плоскость положительно ($\sigma > 0$) или отрицательно ($\sigma < 0$). Следовательно, во всех точках поля бесконечной плоскости

$$E = 2\pi|\sigma|, \tag{4.4}$$

где $|\sigma|$ — абсолютная величина плотности заряда этой плоскости.

4. Постараемся теперь выяснить, почему при удалении от заряженной бесконечной плоскости напряженность ее поля не убывает, а остается постоянной. Пусть точки A, A', A'' лежат на одном перпендикуляре к плоскости P (рис. 6). Рассмотрим напряженность поля, возбуждаемого в этих точках зарядами

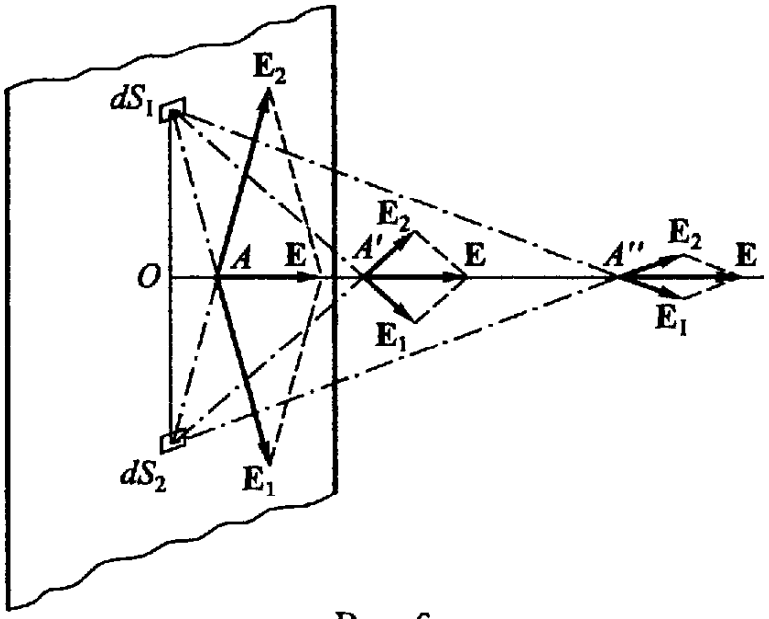

Рис. 6

двух элементов плоскости dS_1 и dS_2, расположенных симметрично относительно перпендикуляра OAA' на расстоянии R от его основания O. В более удаленных от плоскости точках напряженность полей $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ каждого из этих зарядов в отдельности будет меньше, чем в более близких, но зато и угол между $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ убывает при удалении от плоскости. Поэтому, несмотря на уменьшение слагаемых $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ при удалении от плоскости, их равнодействующая $\mathbf{E}$ может благодаря уменьшению угла между ними не только убывать, но и возрастать в зависимости от соотношения между расстояниями R и OA или OA'. Очевидно, что если точка A близка к O, то равнодействующая всех зарядов плоскости в этой точке определяется почти исключительно

зарядами, расположенными вблизи O, ибо напряженности полей удаленных зарядов направлены почти параллельно плоскости P и в сумме дают нуль или почти нуль. По мере же удаления точки A от O параллельность эта нарушается, равнодействующая далеких зарядов увеличивается, а близких — уменьшается. В результате, как показывает непосредственное вычисление, напряженность результирующего поля всех зарядов бесконечной плоскости вовсе не меняется при удалении от этой плоскости. Вычисления этого мы приводить не будем, ибо результат его [уравнение (4.4)] был уже найден нами путем применения теоремы Гаусса.

Задача 1. Поверхность бесконечно длинного кругового цилиндра равномерно заряжена так, что на единицу его длины приходится заряд $\varkappa$. Доказать, что поле $\mathbf{E}_i$ внутри цилиндра и поле $\mathbf{E}_e$ вне цилиндра выражаются следующими формулами:

$$\mathbf{E}_i = 0, \quad \mathbf{E}_e = \frac{2\varkappa \mathbf{r}}{r^2}, \tag{4.5}$$

где $\mathbf{r}$ — вектор кратчайшего расстояния рассматриваемой точки поля от оси цилиндра. Показать, что скачок электрического вектора при прохождении через заряженную поверхность цилиндра равен $4\pi\sigma$.

Задача 2. Заряд e равномерно распределен по шаровой *поверхности* произвольного радиуса. Доказать, что поле внутри и вне шара выражается, соответственно, формулами

$$\mathbf{E}_i = 0, \quad \mathbf{E}_e = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}, \tag{4.6}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный из центра шара в рассматриваемую точку поля, т. е. что поле вне равномерно заряженной шаровой поверхности таково, как если бы весь ее заряд был сосредоточен в ее центре. Показать, что скачок вектора $\mathbf{E}$ при прохождении через заряженную поверхность шара равен $4\pi\sigma$.

Задача 3. Заряд e равномерно распределен с плотностью ρ по шаровому *объему* радиуса a. Показать, что поле $\mathbf{E}_e$ вне шара таково, как если бы весь заряд шара был сосредоточен в его центре, и что поле $\mathbf{E}_i$ внутри шара прямо пропорционально расстоянию от центра шара:

$$\begin{aligned} R \geqslant a, \quad & \mathbf{E}_e = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}, \\ R \leqslant a, \quad & \mathbf{E}_i = \frac{e\mathbf{R}}{a^3}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

или

$$\begin{aligned} R \geqslant a, \quad & \mathbf{E}_e = \frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{a}{R}\right)^3\mathbf{R}, \\ R \leqslant a, \quad & \mathbf{E}_i = \frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{R}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Отметим, что в этом случае вектор $\mathbf{E}$ всюду непрерывен.

§ 5. Проводники в электрическом поле

Физический смысл изучения поля поверхностных зарядов коренится в том обстоятельстве, что в случае электростатического равновесия *заряды проводников сосредоточиваются* в весьма тонком *поверхностном слое*, который в громадном большинстве случаев можно с достаточной точностью считать бесконечно тонким. Ведь и непосредственно ясно, что если сообщить металлическому телу, например, отрицательный заряд (избыток электронов), то благодаря взаимному отталкиванию элементов этого заряда (электронов) они сосредоточатся на его поверхности. Строгое же доказательство этого утверждения можно дать на основании того факта, что в случае электростатического равновесия электрическое *поле внутри проводника равно нулю* [1]).

Действительно, проводник есть тело, отличающееся следующим свойством: если в какой-либо точке внутри проводника напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ отлична от нуля, то в проводнике возникает электрический ток, т. е. движение зарядов. Это свойство можно рассматривать как *определение* термина *«проводник электричества»*.

С точки зрения электронной теории важнейшего класса проводников — металлов — это свойство объясняется тем, что если металл находится в твердом (или жидком) состоянии, то часть электронов, входящих в состав его атомов, отщепляется от этих атомов. Оставшиеся после отщепления этих «свободных» электронов положительные ионы металла образуют его твердый скелет (кристаллическую решетку), в промежутках же между ионами находятся «свободные» электроны в форме своего рода «электронного газа». Сколь угодно слабое внешнее электрическое поле вызывает движение этих «свободных» электронов в направлении действующих на них сил, т. е. вызывает электрический ток [2]). Ток течет до тех пор, пока напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю, т. е. пока поле зарядов, перераспределившихся по объему проводника, не скомпенсирует внешнего поля.

Так как электрический вектор внутри проводника равен нулю, то равен нулю и поток этого вектора через любую замкнутую поверхность, расположенную внутри проводника. Стало быть, по теореме Гаусса, равен нулю и заряд, расположенный внутри всякой такой поверхности. А это и значит, что в случае электростатического равновесия зарядов внутри проводника нет (вернее, что положительные и отрицательные заряды внутри него взаимно нейтрализуются) и что все заряды расположены на его поверхности.

---

[1]) См. § 38, в частности уравнение (38.9).

[2]) Подробнее механизм тока будет рассмотрен в § 40 и 41.

Таким образом, поле заряженного металлического цилиндра или шара определяется теми же формулами (4.5) и (4.6), что и поле соответствующей заряженной поверхности. В согласии с упомянутым общим законом из этих формул, в частности, следует, что внутри металлического заряженного шара или цилиндра $\mathbf{E} = 0$. Что же касается формулы (4.3), то для случая зарядов, расположенных на поверхности проводника, формула эта значительно упрощается. Так как внутри проводника $\mathbf{E} = 0$, то она принимает вид

$$E_n = 4\pi\sigma, \tag{5.1}$$

где E_n — проекция электрического вектора в непосредственной близости к поверхности проводника на направление *внешней* нормали к его поверхности.

Таким образом, в случае электростатического равновесия нормальная слагающая напряженности поля вблизи проводника определяется *только плотностью* σ заряда на прилегающем элементе его поверхности и вовсе не зависит от распределения зарядов в других участках поля, а тангенциальная равна нулю.

Пример. *Определить поле между пластинами бесконечного плоского конденсатора.* Поле между пластинами бесконечного плоского конденсатора по соображениям симметрии должно быть направлено перпендикулярно к его пластинам и должно быть одинаковым во всех точках любой параллельной им плоскости. Как и в рассмотренном случае поля бесконечной плоскости, из этого обстоятельства следует, что поле между пластинами конденсатора *однородно*, т. е. что вектор $\mathbf{E}$ постоянен по величине и направлению во всех точках этого поля. Согласно же уравнению (5.1), числовое значение вектора $\mathbf{E}$ у поверхности пластин равно

$$E = 4\pi|\sigma| \tag{5.2}$$

(ввиду того, что $E_n = \pm E$). Стало быть, таково будет значение E и во всем пространстве между пластинами.

Очевидно, что в уравнении (5.2) под σ можно понимать плотность поверхностного заряда как положительной, так и отрицательной пластин конденсатора. Так как, с другой стороны, вектор $\mathbf{E}$ имеет в пространстве между пластинами одно вполне определенное значение, то, следовательно, в случае электростатического равновесия абсолютная величина плотности заряда на обеих пластинах должна быть одинаковой.

Все эти результаты можно также непосредственно получить из уравнения (4.4). Поле $\mathbf{E}$ конденсатора есть равнодействующая полей $\mathbf{E}_A$ и $\mathbf{E}_B$ двух заряженных бесконечных плоскостей, а именно *внутренних поверхностей* пластин конденсатора A и B. Стало быть, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B$, причем $E_A = 2\pi|\sigma_A|$ и $E_B = 2\pi|\sigma_B|$. Как явствует из рис. 7, внутри каждой из металлических пластин векторы $\mathbf{E}_A$ и $\mathbf{E}_B$ направлены противоположно, а между пласти-

нами одинаково. Так как внутри пластин $\mathbf{E}$ должно равняться нулю (проводник!), то $E_A = E_B$ и, стало быть, $\sigma_B = -\sigma_A = \sigma$. Поэтому в пространстве между пластинами $E = 4\pi|\sigma|$, что и требовалось доказать.

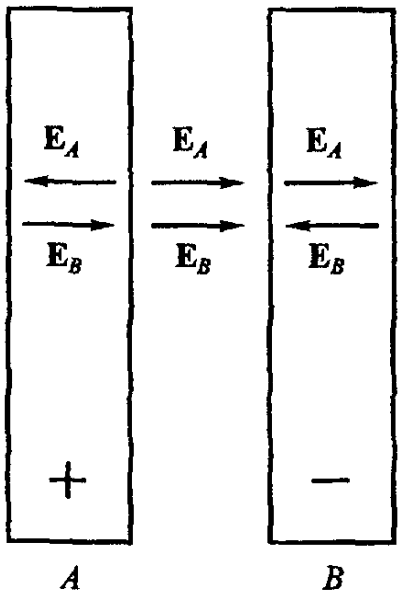

Рис. 7

Таково же будет и поле между пластинами плоского конденсатора *конечных размеров*, если только расстояние между пластинами будет мало по сравнению с их размерами. Искажение поля, нарушение его однородности станет заметным лишь у краев конечного конденсатора, на расстояниях от краев, сравнимых с расстоянием между пластинами.

В случае конденсатора конечных размеров общий заряд каждой пластины конечен и (средняя) плотность ее поверхностного заряда равна

$$\sigma = \frac{e}{S},$$

где S — поверхность пластины. Таким образом, уравнение (5.2) принимает вид

$$E = \frac{4\pi e}{S}. \tag{5.3}$$

Задача 4. Показать, что в полости цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра) напряженность поля определяется формулой (4.5):

$$\mathbf{E} = \frac{2\varkappa}{r^2}\mathbf{r},$$

где $\varkappa$ — заряд единицы длины внутреннего цилиндра, причем заряд единицы длины внешнего цилиндра равен $-\varkappa$.

Задача 5. Показать, что в полости шарового конденсатора (две концентрические сферы) поле определяется формулой (4.6):

$$\mathbf{E} = \frac{e}{R^3}\mathbf{R},$$

где e — заряд внутренней сферы, причем заряд внешней сферы равен $-e$.

§ 6. Истоки электрического поля. Поверхностная дивергенция

1. Поверхностный интеграл, входящий в выражение (3.6) электростатической теоремы Гаусса, может быть преобразован с помощью общей теоремы Гаусса (17*) в интеграл по ограниченному

поверхностью S объему V:

$$\oint_S E_n\, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \cdot dV = 4\pi \sum_i e_i. \tag{6.1}$$

Однако преобразование это возможно лишь в том случае, если $\operatorname{div}\mathbf{E}$ имеет определенное конечное значение во всех точках объема V, заключенного внутри поверхности S, т. е. если вектор $\mathbf{E}$ конечен и непрерывен в этом объеме. В частности, внутри поверхности S не должно быть ни точечных зарядов конечной величины, ни поверхностных зарядов конечной поверхностной плотности, ибо напряженность поля точечного заряда при $R \to 0$ стремится к бесконечности [уравнение (2.1)] и, помимо того, направление вектора $\mathbf{E}$ при $R = 0$ становится неопределенным; на заряженных же поверхностях нарушается непрерывность вектора $\mathbf{E}$: его нормальная слагающая испытывает скачок $4\pi\sigma$ [уравнение (4.3)].

Впрочем, понятия точечного и поверхностного зарядов имеют лишь вспомогательное значение и были введены нами лишь для удобства рассмотрения поля зарядов на расстояниях, достаточно больших по сравнению с размерами самих зарядов. Изучая же поле вблизи или внутри зарядов, мы должны вернуться к представлению об объемном распределении зарядов. Предположим, например, что заряд e, рассматривавшийся нами как точечный, в действительности равномерно распределен по объему шара произвольно малого, но конечного радиуса a. В этом случае поле вне и внутри шара определяется уравнениями (4.7), из коих явствует, что вектор $\mathbf{E}$ конечен и непрерывен во всех точках поля [в частности, при $R = a$, т. е. на поверхности шарового заряда, обе формулы (4.7) дают для E одно и то же значение $E_e = E_i = e/a^2$].

Этот результат имеет общее значение: во всех случаях *объемного распределения* заряда с конечной плотностью электрический *вектор* $\mathbf{E}$ *всюду конечен и непрерывен*. Действительно, в этом случае из каждой лежащей внутри заряда точки P, как из центра, можно описать сферу достаточно малого, но все же конечного радиуса a так, чтобы сферу эту можно было считать заряженной равномерно. Во всех точках сферы поле зарядов самой сферы конечно и непрерывно согласно уравнениям (4.7); поле же зарядов, находящихся вне сферы, конечно и непрерывно потому, что эти заряды находятся на конечном расстоянии от внутренних точек сферы. Стало быть, и результирующее поле всех зарядов конечно и непрерывно.

2. Итак, в случае объемного распределения зарядов, расположенных внутри поверхности S, преобразование поверхностного интеграла в объемный в уравнении (6.1) всегда допустимо. Напомним, что в общем случае неравномерного распределения за-

рядов *объемной плотностью* заряда в данной точке называется предел отношения заряда Δe, находящегося в окружающем эту точку объеме ΔV, к этому объему [ср. уравнение (4.1)]:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta V} = \frac{de}{dV}, \tag{6.2}$$

где буквой ρ, как и всюду в дальнейшем, обозначена объемная плотность заряда. Стало быть, заряд de элемента объема dV равен

$$de = \rho\, dV, \tag{6.3}$$

а общий заряд, находящийся в конечном объеме V, равен

$$\sum_V e = \int_V \rho\, dV.$$

Внося это выражение в (6.1), получим

$$\int \operatorname{div} \mathbf{E} \cdot dV = \int 4\pi\rho\, dV. \tag{6.4}$$

Равенство этих интегралов должно иметь место вне зависимости от выбора области интегрирования V, что возможно лишь в том случае, если их подынтегральные выражения равны друг другу в каждой точке пространства. Стало быть,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{6.5}$$

или, в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho. \tag{6.6}$$

Это дифференциальное уравнение является одним из основных уравнений как электростатики, так и вообще всей электродинамики. Оно позволяет определить дивергенцию электрического вектора в каждой точке поля по объемной плотности заряда *в той же* точке [1]), *вне зависимости* от распределения зарядов в иных участках поля. Обратно, чтобы определить плотность заряда в данной точке поля, достаточно знать значение дивергенции $\mathbf{E}$ в этой точке поля.

По аналогии с гидродинамикой те точки поля произвольного вектора $\mathbf{a}$, в которых $\operatorname{div} \mathbf{a} \neq 0$, принято называть *истоками* этого поля; величина $\operatorname{div} \mathbf{a}$ называется *силой*, или *обильностью*, истоков поля (см. приложение. Векторный анализ, § 4). Пользуясь этой терминологией, можно сказать, что *истоки электрического поля* находятся в тех и только тех точках поля, в которых находятся *электрические заряды*, причем сила, или обильность, этих истоков (в случае объемного распределения зарядов) равна $4\pi\rho$.

[1]) То есть, в сущности, по величине заряда, находящегося в бесконечно малом объеме, окружающем эту точку [см. уравнение (6.2)].

3. Хотя, с точки зрения излагаемой нами макроскопической теории, все заряды суть непрерывно распределенные объемные заряды, однако в тех случаях, когда толщина занимаемого зарядом слоя мала по сравнению с доступными измерению расстояниями, удобно сохранить представление о поверхностных зарядах. В первую очередь это относится к поверхностным зарядам проводников. Так как при прохождении через заряженные поверхности вектор **E** меняется скачком [уравнение (4.3)], то поверхности эти носят название *поверхностей разрыва* электрического вектора. Очевидно, что на поверхностях разрыва дифференциальное уравнение (6.5) неприменимо (что явствует также из оговорок, сделанных в начале этого параграфа) и должно быть заменено уравнением (4.3):

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma.$$

Это уравнение называется *пограничным условием* для вектора **E** и является, в сущности, не чем иным, как предельной формой уравнения (6.5) для зарядов, расположенных бесконечно тонким слоем.

Так как нам в дальнейшем неоднократно придется встречаться с подобного рода соотношениями, мы докажем здесь следующую общую теорему. Пусть некоторый вектор **a** *всюду* непрерывен и конечен и *всюду* удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = 4\pi\rho, \qquad \text{(A)}$$

где ρ — всюду конечная плотность некоторого «заряда» e [например, электрического, определяемая уравнением типа (6.2)]. Рассмотрим некоторый заряженный слой конечной толщины dl, внутри которого **a** по условию остается непрерывным (рис. 8). Если, оставляя неизменным заряд слоя, уменьшать его толщину dl до нуля, то непрерывность вектора **a** нарушится и уравнение (A) в пределе примет на заряженной *поверхности* вид

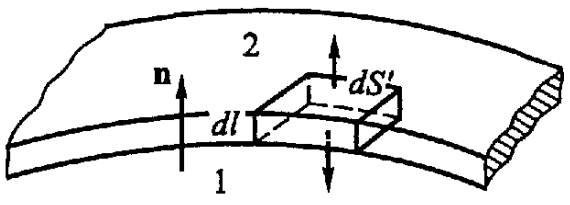

Рис. 8

$$a_{2n} - a_{1n} = 4\pi\sigma, \qquad \text{(B)}$$

где σ — поверхностная плотность заряда, определяемая уравнением типа (4.1), а a_{1n} и a_{2n} — значения нормальных слагающих вектора **a** по различным сторонам заряженной поверхности.

Чтобы доказать справедливость этого утверждения, рассмотрим цилиндрический участок заряженного слоя с основанием dS'. Помножая (A) на dV и интегрируя по объему этого участка, получим на основании (6.3) и теоремы Гаусса (17*):

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{a}\cdot dV = \oint_S a_n\, dS = 4\pi \int_V \rho\, dV = 4\pi\, de,$$

где de — общий заряд выделенного участка, а S — ограничивающая его поверхность. Повторяя рассуждения, приведшие нас в § 4 к формуле (4.2), убедимся, что

$$\oint a_n\, dS = (a_{2n} - a_{1n})\, dS' + N' = 4\pi\, de,$$

где N' — поток вектора $\mathbf{a}$ через боковую поверхность рассматриваемого участка слоя. При переходе к пределу $dl \to 0$ величина N' обращается в нуль, так что, разделив это уравнение на dS', получим

$$a_{2n} - a_{1n} = 4\pi \frac{de}{dS'} = 4\pi\sigma,$$

т. е. уравнение (В), что и требовалось доказать.

Итак, уравнение (В) представляет собой предельную форму уравнения (А). Ввиду этого скачок нормальной слагающей произвольного вектора $\mathbf{a}$ на поверхности разрыва часто называют *поверхностной дивергенцией* этого вектора. В отличие от *объемной дивергенции*, определяемой уравнением (18*):

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint a_n\, dS}{\Delta V},$$

поверхностная дивергенция обозначается через Div с заглавной (а не строчной) буквы D [1]):

$$a_{2n} - a_{1n} = \operatorname{Div} \mathbf{a}. \tag{6.7}$$

Стало быть, доказанную нами теорему можно символически записать следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 4\pi\rho \to \operatorname{Div} \mathbf{a} = 4\pi\sigma. \tag{6.8}$$

Наконец, пользуясь упомянутой выше терминологией, можно назвать поверхности разрыва нормальной слагающей вектора $\mathbf{a}$ *поверхностными истоками* этого вектора.

4. Уравнения (6.5) и (4.3) вполне достаточны для решения так называемой «обратной» задачи электростатики: дано поле электрического вектора $\mathbf{E}$, определить распределение (объемных и поверхностных) зарядов. В частности, расположение поверхностных зарядов определяется расположением поверхностей разрыва вектора $\mathbf{E}$. Однако для решения «прямой» задачи дано распределение зарядов, для определения электрического поля этих уравнений недостаточно, ибо с помощью *одного* дифференциального уравнения (6.5) нельзя определить *три* слагающих E_x, E_y, E_z вектора $\mathbf{E}$. Для решения «прямой» задачи электростатики необ-

[1]) Заметим, что значение Div $\mathbf{a}$ не зависит от выбора направления нормали $\mathbf{n}$ к поверхности разрыва (см. примеч. на с. 28).

ходимо воспользоваться также и некоторыми иными свойствами электростатического поля, к рассмотрению которых мы теперь и перейдем.

§ 7. Работа электрических сил. Независимость ее от формы пути. Непрерывность тангенциальных слагающих вектора E

1. Работа, совершаемая силами электрического поля при перемещении заряда e на отрезок ds, равна

$$eE\cos(\mathbf{E}, d\mathbf{s})\,ds = e\mathbf{E}\,d\mathbf{s}.$$

В частности, работа A при перемещении $d\mathbf{s}$ *единичного положительного* заряда равна

$$A = \mathbf{E}\,d\mathbf{s}. \tag{7.1}$$

Наконец, работа, совершаемая при перемещении единичного положительного заряда по конечному пути L, равна

$$A = \int_L \mathbf{E}\,d\mathbf{s}, \tag{7.2}$$

где знак L у интеграла означает, что необходимо вычислить сумму значений подынтегрального выражения для всех элементов линии L. Эта операция называется *интегрированием по линии* L.

2. Работа электрических сил на данном пути L, вообще говоря, может зависеть как от положения начальной и конечной точек пути, так и от формы пути. Однако, как мы сейчас покажем, электрическое *поле неподвижных зарядов* обладает той чрезвычайно важной особенностью, что *работа сил* этого поля *на пути между двумя произвольными точками зависит только от положения этих точек и вовсе не зависит от формы пути.* Силовые поля, обладающие этой особенностью [1]), называются полями консервативными или *потенциальными.*

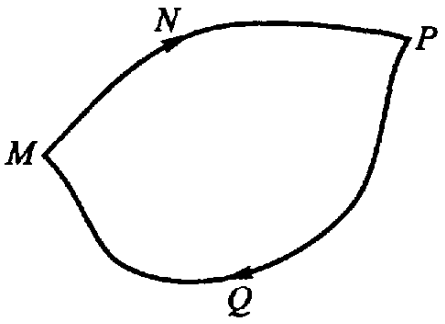

Рис. 9

Заметим, что в потенциальном поле *работа* сил поля на всяком *замкнутом пути* должна *равняться нулю.* Действительно, всякий замкнутый путь $MNPQM$ можно произвольным образом разбить на две части MNP и PQM (рис. 9).

[1]) При том выполняющемся для электростатического поля условии, что поле стационарно (постоянно во времени) и что силы, действующие на помещенное в поле тело, зависят лишь от положения, но не от скорости этого тела.

Работа на пути PQM равна, очевидно, взятой с обратным знаком работе на том же пути при прохождении его в обратном направлении от M к P, которая в свою очередь в потенциальном поле по условию равна работе на пути MNP. Стало быть, общая работа на всем замкнутом пути $MNPQM$ равна нулю, что и требовалось доказать.

Обратно, если работа сил поля на всяком замкнутом пути равна нулю, то работа этих сил на пути между двумя произвольными точками M и P от формы этого пути не зависит, т. е. поле это потенциальное. Действительно, рассмотрим два произвольных пути MNP и MQP, ведущих из M в P (см. рис. 9). Составим из них замкнутый путь $MNPQM$. Работа на этом замкнутом пути по условию равна нулю. Стало быть, работа на участке пути MNP равна взятой с обратным знаком работе на пути PQM, или, иными словами, равна работе на пути MQP, что и требовалось доказать.

Итак, равенство нулю работы на произвольном замкнутом пути есть необходимое и достаточное условие независимости работы от формы пути и может считаться отличительным признаком потенциального поля. Вообще поле *произвольного* вектора $\mathbf{E}$, вне зависимости от его физического смысла (сила, скорость и т. д.), является полем потенциальным в том и только в том случае, если при любом выборе *замкнутого* пути интегрирования L

$$\oint_L E_s\, ds = 0. \tag{7.3}$$

Линейный интеграл произвольного вектора $\mathbf{E}$ вдоль какого-либо произвольного замкнутого пути L называется *циркуляцией* этого вектора вдоль пути L[1]). Таким образом, условие (7.3) сводится к требованию, чтобы циркуляция вектора $\mathbf{E}$ по любому замкнутому пути равнялась нулю.

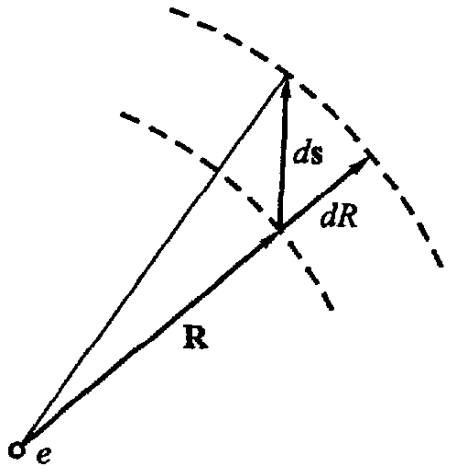

Рис. 10

3. Переходя к доказательству потенциального характера электростатического поля, рассмотрим сначала работу электрических сил в поле элементарного (точечного) заряда e. Работа этих сил при бесконечно малом перемещении $d\mathbf{s}$ «пробного» единичного положительного заряда равна (рис. 10):

$$A = \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = \frac{e}{R^3}\, \mathbf{R}\, d\mathbf{s} = \frac{e}{R^2}\, ds \cos(\mathbf{R}, d\mathbf{s}) = \frac{e}{R^2}\, dR,$$

[1]) См. приложение, § 5.

где dR есть проекция перемещения пробного заряда $d\mathbf{s}$ на радиус-вектор $\mathbf{R}$, проведенный из возбуждающего поле заряда e. Как явствует из чертежа, dR есть вместе с тем приращение *числового* значения радиуса-вектора $\mathbf{R}$, т. е. увеличение расстояния пробного заряда от заряда e. Поэтому работа A может быть представлена в форме полного дифференциала *скалярной* функции точки $-e/R$:

$$A = \frac{e}{R^2}\,dR = d\left(-\frac{e}{R}\right) = -d\left(\frac{e}{R}\right), \tag{7.4}$$

где R есть *числовое* значение радиуса-вектора $\mathbf{R}$. Следовательно, работа, совершаемая при перемещении единичного положительного заряда из точки P_1 в точку P_2 по конечному пути L, равна (рис. 11):

$$A = \int\limits_L \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = -\int\limits_L d\left(\frac{e}{R}\right) = -\left(\frac{e}{R_2} - \frac{e}{R_1}\right), \tag{7.5}$$

где R_1 и R_2 — расстояния начальной и конечной точек пути от заряда e. Таким образом, работа электрических сил на произвольном пути в поле неподвижного элементарного (точечного) заряда действительно зависит только от положений начальной и конечной точек этого пути и, стало быть, вовсе не зависит от формы пути. Так, например, работа электрических сил на пути L' (рис. 11) равна работе на пути L: избыточная работа, совершаемая на пути L' при перемещении пробного заряда за пределы сферы радиуса R_2, компенсируется отрицательной работой, совершаемой при последующем приближении пробного заряда к заряду e на последнем участке пути L'.

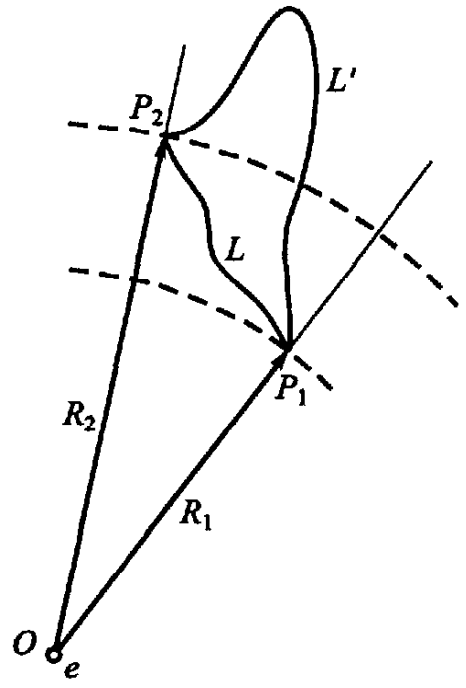

Рис. 11

Итак, поле неподвижного элементарного (точечного) заряда есть поле потенциальное. Очевидно, что сумма потенциальных полей [1]) есть тоже поле потенциальное, ибо если работа слагаемых сил не зависит от формы пути, то и работа равнодействующей от нее тоже не зависит. Так как поле произвольной системы зарядов можно рассматривать как сумму полей каждого из элементов этих зарядов, то, стало быть, всякое *электростатическое поле есть поле потенциальное* и удовлетворяет условию (7.3).

[1]) Суммою векторных полей мы будем называть такое поле, в каждой точке которого вектор поля равен сумме векторов слагаемых полей.

4. Интегральное условие (7.3) может быть преобразовано в дифференциальное. Согласно известной теореме векторного анализа (29*), слагающая ротора вектора $\mathbf{E}$ по произвольному направлению $\mathbf{n}$ в произвольной точке поля P равна

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{E} = \lim_{dS \to 0} \frac{\oint E_s \, ds}{dS},$$

где dS означает бесконечно малую площадку, проходящую через точку P и перпендикулярную вектору $\mathbf{n}$. В числителе справа стоит циркуляция вектора $\mathbf{E}$ по контуру этой площадки dS, которая согласно (7.3) обращается в нуль. Стало быть, $\operatorname{rot}_n \mathbf{E} = 0$. Ввиду произвольности направления $\mathbf{n}$ это означает, что ротор вектора $\mathbf{E}$ во всех точках электростатического поля равен нулю:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \tag{7.6}$$

Обратно, из (7.6) на основании известной из векторного анализа теоремы Стокса (27*) следует (7.3), так что интегральное и дифференциальное условия (7.3) и (7.6) вполне эквивалентны друг другу.

5. Из условия (7.3) следует, в частности, *непрерывность тангенциальных слагающих напряженности поля* [в отличие от слагающих нормальных; см. уравнение (4.3)], т. е. следует, что слагающие напряженности, касательные к произвольной поверхности в любой ее точке, имеют по обе стороны поверхности одинаковые значения.

Действительно, допустим противное, и пусть вдоль поверхности S_1 (рис. 12) нарушается непрерывность тангенциальных слагающих вектора $\mathbf{E}$. Это значит, что если P_1, P_2 и P_1', P_2' суть две пары разделенных поверхностью S_1, но бесконечно близких друг к другу точек, то работа электрических сил $\int E_s \, ds$ на пути $P_1 P_1'$ отличается на конечную величину от работы этих сил на бесконечно близком пути $P_2 P_2'$. С другой стороны, ввиду конечности сил поля работа их на бесконечно малых отрезках $P_1 P_2$ и $P_1' P_2'$ бесконечно мала. Стало быть, работа сил поля на замкнутом пути $P_1 P_1' P_2' P_2 P_1$ должна отличаться от нуля. Другими словами, из сделанного нами допущения следует, что работа поля при перенесении пробного заряда по замкнутому пути отлична от нуля, что в электростатическом поле невозможно.

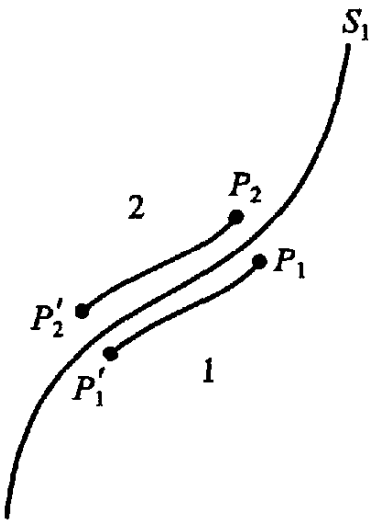

Рис. 12

Итак, при любом выборе поверхности S тангенциальные к ней слагающие электрического вектора $\mathbf{E}$ остаются непрерывными.

Иными словами, если $\mathbf{t}$ — единичный вектор, лежащий в касательной плоскости к произвольной поверхности S, то

$$E_{2t} = E_{1t}, \tag{7.7}$$

где E_{2t} и E_{1t} — значения слагающих вектора $\mathbf{E}$ по направлению $\mathbf{t}$ по обе стороны поверхности S.

В частности, так как напряженность поля внутри проводников равна нулю, то тангенциальная слагающая $\mathbf{E}$ у их внешней поверхности тоже должна равняться нулю. Стало быть, *у поверхности проводников электрический вектор направлен нормально* к их поверхности ($E = \pm E_n$), и уравнение (5.1) может быть написано так:

$$\mathbf{E} = 4\pi\sigma\mathbf{n}. \tag{7.8}$$

§ 8. Потенциал электростатического поля

1. То обстоятельство, что работа сил электростатического поля на данном пути зависит лишь от положения начальной и конечной точек пути, дает возможность ввести в рассмотрение чрезвычайно важное понятие потенциала электростатического поля. Определение: *разность потенциалов между двумя точками электростатического поля равна взятой с обратным знаком работе, совершаемой силами поля при перемещении единичного положительного заряда* из первой точки во вторую. При этом предполагается, что при перемещении пробного единичного заряда все заряды, возбуждающие поле, остаются неподвижными [1]).

Стало быть, разность потенциалов $d\varphi$ между двумя бесконечно близкими точками, разделенными расстоянием $d\mathbf{s}$, равна

$$d\varphi = -A = -\mathbf{E}\,d\mathbf{s}; \tag{8.1}$$

разность же потенциалов $\varphi - \varphi_0$ между двумя точками P и P_0, находящимися на конечном расстоянии друг от друга, определяется интегралом

$$\varphi - \varphi_0 = -\int_{P_0}^{P} \mathbf{E}\,d\mathbf{s}, \tag{8.2}$$

причем этот интеграл может быть взят *по любому пути*, соединяющему точки P_0 и P. Очевидно, что понятие разности потенциалов имеет определенный однозначный смысл лишь в силу

[1]) Если перемещение *единичного* пробного заряда может вызывать смещение зарядов, возбуждающих поле (например путем электростатической индукции на проводниках), то надлежит измерять непосредственно лишь ту работу, которая совершается при перемещении бесконечно (т. е. достаточно) малого пробного заряда. Работа же при перемещении единичного заряда вычисляется из результатов этих измерений.

доказанной нами независимости работы электрических сил от формы пути, или, что сводится к тому же, ввиду того, что напряженность $\mathbf{E}$ *электростатического* поля удовлетворяет условию (7.3).

Определение понятия потенциала поля вектора $\mathbf{E}$, содержащееся в уравнениях (8.1) и (8.2), применимо, очевидно, к полю произвольного вектора, удовлетворяющего условию (7.3), вне зависимости от физического смысла этого вектора (сила, скорость и т. д.) и от физического смысла соответствующего потенциала (потенциал сил, потенциал скоростей и т. д.).

2. Очевидно, что потенциалу φ_0 произвольной точки поля P_0 всегда можно приписать любое наперед выбранное значение. Это соответствует тому обстоятельству, что путем измерения работы может быть определена лишь *разность* потенциалов двух точек поля, но не абсолютная величина потенциала. Однако, как только фиксировано значение потенциала в какой-либо *одной* точке поля, значение его *во всех* остальных точках поля однозначно определяется уравнением (8.2).

Обычно аддитивную постоянную в выражении потенциала выбирают так, чтобы потенциал φ_∞ бесконечно удаленных точек равнялся нулю [1]). При этом условии потенциал φ произвольной точки поля P определится следующим выражением:

$$\varphi = \varphi_\infty - \int_\infty^P \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = \int_P^\infty \mathbf{E}\,d\mathbf{s} \qquad (\varphi_\infty = 0). \tag{8.3}$$

Таким образом, потенциал точки P будет равен работе, совершаемой силами поля при удалении единичного положительного заряда из точки P в бесконечность.

В поле элементарного (точечного) заряда e разность потенциалов между точками P и P_0, согласно (7.5) и (8.2), равна

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{e}{R} - \frac{e}{R_0}. \tag{8.4}$$

В этом случае, для того чтобы удовлетворить условию $\varphi_\infty = 0$, достаточно, очевидно, положить $\varphi_0 = e/R_0$; тогда потенциал поля точечного заряда e на расстоянии R от него окажется равным ($\varphi_\infty = 0$)

$$\varphi = \frac{e}{R}. \tag{8.5}$$

3. Потенциал поля произвольной системы точечных зарядов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ равен, очевидно, сумме потенциалов полей каждого

[1]) Впрочем, практически при электрических измерениях часто полагают равным нулю потенциал Земли.

из этих зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{R_i}, \tag{8.6}$$

где R_i — расстояние точки поля, обладающей потенциалом φ, от заряда e_i. Конечно, как эта, так и предшествующие формулы имеют смысл лишь в тех точках поля, расстояния которых от «точечных» зарядов e_i велики по сравнению с размерами этих зарядов.

В случае поверхностных зарядов заряд каждой поверхности может быть разложен на совокупность элементарных зарядов бесконечно малых элементов поверхности dS:

$$de = \sigma\, dS.$$

Заменяя в уравнении (8.6) e_i через de и переходя от суммирования к интегрированию по всем элементам всех заряженных поверхностей, получим потенциал поля поверхностных зарядов:

$$\varphi = \int \frac{\sigma\, dS}{R}. \tag{8.7}$$

В поле объемных зарядов роль элементарных зарядов будут играть заряды $dE = \rho\, dV$ бесконечно малых элементов объема dV, и выражение потенциала (8.6) примет вид

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dV}{R}, \tag{8.8}$$

где R — расстояние точки поля, обладающей потенциалом φ, от элемента объема dV.

Отметим, что, хотя R и входит в знаменатель подынтегральных выражений в формулах (8.7) и (8.8), все же выражения эти остаются конечными во всех точках поля объемных и поверхностных зарядов. Рассмотрим, например, формулу (8.8) и введем систему сферических координат R, ϑ, α с центром в исследуемой точке поля (ϑ — полярный угол, α — азимут) [1]. Элемент объема dV выразится в этих координатах, как известно, следующим образом:

$$dV = R^2 \sin\vartheta\, d\alpha\, d\vartheta\, dR,$$

и формула (8.8) примет вид

$$\varphi = \iiint \rho R \sin\vartheta\, d\alpha\, d\vartheta\, dR,$$

причем подынтегральное выражение остается конечным и при значении $R = 0$.

[1] См. рис. 101 (приложение).

Ввиду того, однако, что формулы (8.7) и (8.8) выведены нами из формул (8.5) и (8.6), имеющих смысл лишь для конечных значений R (ибо при $R \to 0$ $\varphi = \frac{e}{R}$ стремится к бесконечности), а также ввиду особой важности формул (8.7) и (8.8) мы выведем их в дальнейшем (§ 12) еще и другим способом, независимо от только что изложенного, и покажем, что они применимы ко всем точкам поля поверхностных и объемных зарядов.

4. Потенциальный характер электростатического поля может быть доказан и без применения закона Кулона путем рассуждений, основывающихся на законе сохранения энергии и невозможности вечного двигателя. Действительно, предположим, что при перемещении пробного заряда по какому-либо замкнутому пути L в поле неподвижных зарядов (см. примечание на с. 43) силы этого поля совершают положительную работу A. Так как по возвращении пробного заряда в исходное положение вся система возвращается в исходное положение, то, повторяя обход пути L произвольное число раз, мы всякий раз получали бы работу A, т. е. осуществили бы вечный двигатель. Если же при обходе пути L силы поля совершают отрицательную работу, то стоит лишь изменить направление обхода на обратное, чтобы получить работу положительную. Таким образом, работа сил поля на всяком замкнутом пути должна равняться нулю, из чего, как мы видели, следует существование однозначного потенциала поля [1].

5. В абсолютной системе единиц единица потенциала определяется следующим образом: разность потенциалов двух точек поля равна единице, если при перемещении абсолютной единицы заряда из одной точки в другую силы поля совершают единицу работы, т. е. работу в один эрг. Размерность же потенциала равна, очевидно:

$$[\varphi] = \frac{\text{работа}}{\text{заряд}} = \frac{\mathrm{ML^2T^{-2}}}{\mathrm{M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}}} = \mathrm{M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}}.$$

Абсолютная единица потенциала слишком велика по сравнению с теми разностями потенциалов, с которыми обычно приходится иметь дело на практике. Поэтому практической единицей потенциала служит вольт: $1\ \text{В} = \frac{1}{300}$ абс. единицы потенциала.

[1] Подобного рода рассуждение неприменимо, например, к магнитному полю постоянных токов, для поддержания которого необходима непрерывная затрата энергии источников тока. Работа, совершаемая при перемещении магнитного заряда (полюса) по замкнутому пути в поле постоянного тока, может быть отличной от нуля и может совершаться за счет дополнительного потребления энергии источников тока. Действительно, движение магнитного заряда возбуждает электродвижущие силы индукции, так что для поддержания постоянства тока во время движения заряда необходимо соответствующее изменение ЭДС источников тока.

Пример. Определить потенциал поля диполя.

Предположим, что два равных точечных заряда противоположных знаков $+e$ и $-e$ находятся на расстоянии l друг от друга, причем вектор $\mathbf{l}$ направлен *от отрицательного заряда к положительному* (рис. 13). Вектор $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} = e\mathbf{l}, \qquad (8.9)$$

носит название *электрического момента* этих зарядов. Потенциал обоих зарядов в произвольной точке поля P равен

$$\varphi = e\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{e(R_1 - R_2)}{R_1 R_2}.$$

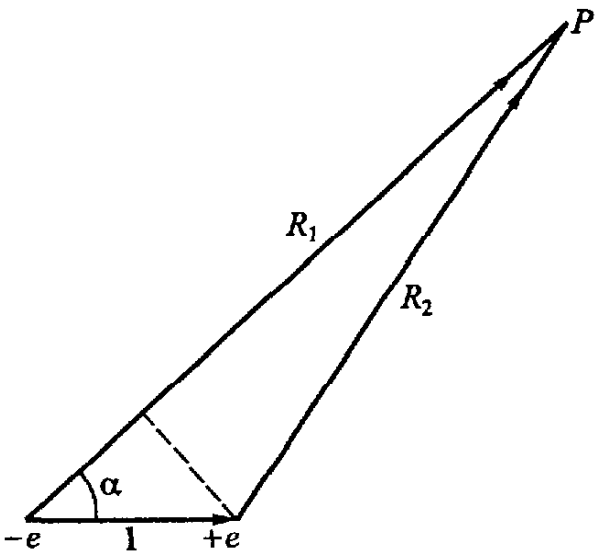

Рис. 13

Если расстояние l между зарядами $+e$ и $-e$ мало по сравнению с расстояниями этих зарядов от исследуемых точек поля, то совокупность зарядов $+e$ и $-e$ носит название *диполя*, или *биполя*, что значит «двойной полюс».

В этом случае можно приближенно положить:

$$R_1 R_2 = R^2, \quad R_1 - R_2 = l\cos\alpha,$$

где α — угол между направлением момента диполя и радиусом-вектором $\mathbf{R}$, проведенным от диполя к «точке наблюдения» P (рис. 13). Ввиду малости расстояния l безразлично, из какой именно точки диполя проведен этот радиус-вектор $\mathbf{R}$. Таким образом, потенциал диполя принимает вид

$$\varphi = \frac{el\cos\alpha}{R^2} = \frac{p\cos\alpha}{R^2} = \frac{\mathbf{pR}}{R^3}. \qquad (8.10)$$

Это выражение можно также представить в несколько ином виде с помощью известной формулы векторного анализа (10*):

$$\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{R}\right) = -\operatorname{grad}_q\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3},$$

где индекс a означает пространственную производную от $1/R$ по координатам «точки наблюдения», т. е. конечной точки вектора $\mathbf{R}$, а индекс q — дифференцирование по координатам «точки истока», т. е. начальной точки вектора $\mathbf{R}$ (см. приложение, § 2). На основании этих соотношений уравнение (8.10) может быть записано следующим образом:

$$\varphi = \mathbf{p}\operatorname{grad}_q\left(\frac{1}{R}\right) = -\mathbf{p}\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{R}\right). \qquad (8.11)$$

Эту формулу легко получить и непосредственно. Действительно,

$$\frac{\varphi}{e} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}$$

равно приращению скаляра $1/R$ при перемещении на отрезок $\mathbf{l}$ точки истока радиуса-вектора $\mathbf{R}$, проведенного из диполя (исток поля) в точку наблюдения P. Ограничиваясь при достаточно малом $\mathbf{l}$ первыми производными от $1/R$, получим

$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \mathbf{l}\,\mathrm{grad}_q\left(\frac{1}{R}\right) = -\mathbf{l}\,\mathrm{grad}_a\left(\frac{1}{R}\right),$$

откуда непосредственно следует (8.11).

З а д а ч а 6. Исходя из уравнения (8.2), показать, что потенциал поля заряженных бесконечных плоскости и полого цилиндра определяется соответственно следующими формулами:

$$\text{для плоскости } \varphi = \varphi_0 - 2\pi\sigma x,$$

$$\text{для цилиндра } \begin{cases} \varphi_i = \varphi_0, \\ \varphi_e = \varphi_0 - 2\varkappa \ln \dfrac{r}{r_1}, \end{cases}$$

где φ_0 — значение потенциала на соответствующей заряженной поверхности; x — координата, перпендикулярная плоскости; r — расстояние от оси цилиндра; r_1 — радиус цилиндра. Отметим, что в обоих этих случаях удовлетворить условию $\varphi_\infty = 0$ невозможно.

З а д а ч а 7. Показать, что потенциал поля шара радиуса a, равномерно заряженного по всему своему объему с объемной плотностью ρ, при условии $\varphi_\infty = 0$ равен

$$\varphi_e = \frac{e}{R} \qquad (R \geqslant a)$$

и (8.12)

$$\varphi_i = 2\pi\rho\left(a^2 - \frac{R^2}{3}\right) \qquad (R \leqslant a),$$

где $e = \dfrac{4\pi a^3}{3}\rho$ — общий заряд шара, а R — расстояние от его центра.

Показать, что $\varphi_e = \varphi_i$ при $R = a$.

§ 9. Емкость. Конденсаторы

1. Одна из характернейших особенностей электростатического поля состоит в том, что в случае электростатического равновесия *потенциал поля имеет постоянное значение на всем*

протяжении каждого отдельного проводника [1]). Действительно, в случае электростатического равновесия напряженность поля внутри проводника равна нулю (§ 5). Так как любые две точки проводника можно соединить линией, целиком лежащей в этом проводнике, то, стало быть, разность потенциалов этих точек, определяемая линейным интегралом вектора **E** [уравнение (8.2)], равна нулю, что и требовалось доказать.

Это обстоятельство дает возможность в случае электростатического поля говорить просто о *потенциале проводника* (т. е. потенциале каждой из его точек).

2. *Емкостью уединенного проводника*, т. е. проводника, бесконечно удаленного от всех остальных проводников, называется заряд, необходимый для сообщения этому проводнику потенциала, равного единице. При этом предполагается, что аддитивная постоянная в выражении потенциала выбрана так, что в бесконечности потенциал равен нулю. Емкость принято обозначать буквой C.

3. Заметим, что емкость уединенного шара (в абсолютных единицах) численно равна его радиусу. Действительно, внешний потенциал поля шара радиуса a и заряда e равен $\varphi = e/R$. На поверхности шара $R = a$ и $\varphi = e/a$. Таково же значение потенциала и внутри всего шара. Стало быть, потенциал шара будет равняться единице при $e = a$, а это и значит, что емкость C шара равна a:

$$C = a.$$

Из этого уравнения явствует, что в абсолютных единицах емкость должна иметь размерность длины. Действительно,

$$[C] = \frac{[e]}{[\varphi]} = \frac{\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{1/2}\mathrm{T}^{-1}} = \mathrm{L}.$$

Таким образом, *в абсолютной системе единиц емкость измеряется в единицах длины*, причем емкость в 1 см равна емкости уединенного шара радиуса 1 см.

Так как практическая единица заряда (кулон) в $3 \cdot 10^9$ раз больше, а практическая единица потенциала (вольт) в 300 раз меньше соответствующих абсолютных единиц, то практическая единица емкости — фарада (Ф) — в $9 \cdot 10^{11}$ раз больше абсолютной единицы:

$$1 \text{ фарада} = \frac{1 \text{ кулон}}{1 \text{ вольт}} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см (абс. единиц емкости)}.$$

Эта единица емкости столь велика, что обычно емкость выражается либо в сантиметрах, либо в микрофарадах (миллионных

[1]) Разумеется, при условии отсутствия «сторонних» ЭДС химического, термического и т.п. происхождения (см. § 38).

долях фарады):

$$1 \text{ мкФ} = 9 \cdot 10^5 \text{ см}.$$

4. Если проводник не уединен, то потенциал, приобретаемый им при сообщении ему определенного заряда, существенно зависит от формы и расположения других проводников. Обусловливается это тем, что поле заряженного проводника вызывает перераспределение зарядов на всех соседних с ним проводниках, в том числе, конечно, и на незаряженных (*электростатическая индукция*). По достижении равновесия заряды проводников располагаются на них так, что внутри каждого проводника результирующее поле индуцированных зарядов и заряда индуцирующего равно нулю (условие электростатического равновесия, см. § 5). Конечно, этот процесс связан с перераспределением заряда и на самом индуцирующем проводнике. Таким образом, потенциал заряженного проводника оказывается суммой потенциалов собственного перераспределившегося заряда этого проводника и зарядов, индуцированных им на других проводниках. Определение зависимости этого результирующего потенциала φ, а вместе с тем и емкости проводника $C = e/\varphi$ от формы и расположения смежных с ним проводников связано, вообще говоря, со значительными математическими трудностями.

5. Можно, однако, достигнуть *полной* независимости системы проводников от расположения и электрического состояния всех посторонних проводников путем *электростатической защиты* их, т. е. путем заключения их в металлическую оболочку. Заряды, расположенные вне оболочки, не влияют на электрическое состояние пространства внутри нее, ибо поле этих внешних зарядов во внутреннем пространстве компенсируется полем зарядов, индуцированных ими на внешней поверхности оболочки. Действительно, если бы оболочка была целиком заполнена металлом, т. е. образовывала бы сплошной проводник, то напряженность поля внешних зарядов и зарядов, индуцированных ими на внешней поверхности оболочки, должна была бы равняться нулю во всех внутренних точках проводника. Очевидно, что она останется равной нулю и по удалении из проводника его внутренних участков.

Итак, металлическая оболочка полностью устраняет зависимость электрического состояния внутреннего пространства от пространства внешнего, ибо пространства эти оказываются разделенными толщей металла, в котором поле равно нулю. Поэтому электростатическая защита всегда применяется при точных измерениях для устранения внешних воздействий на электрические измерительные приборы, аппараты и т. д.

Заметим еще, что заряды проводников, расположенных внутри оболочки, индуцируют на ее внутренней поверхности заряд, равный им по величине и противоположный по знаку, в чем

можно убедиться, применив теорему Гаусса (3.6) к замкнутой поверхности S, проведенной в толще оболочки (рис. 14): поток электрического вектора через эту поверхность, очевидно, равен нулю. При этом на внешней поверхности оболочки сосредоточивается заряд, равный (по величине и знаку) заряду проводников, расположенных внутри оболочки.

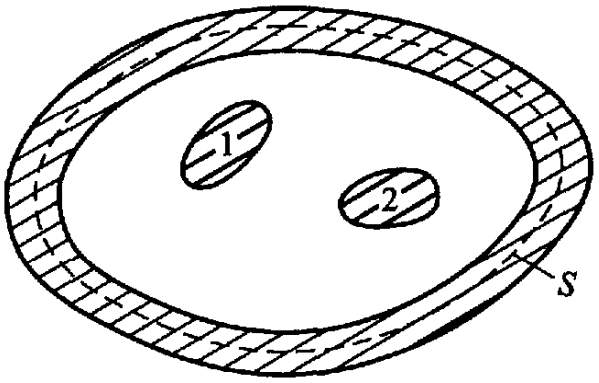

Рис. 14

6. Обратимся к случаю конденсатора, состоящего из двух (или нескольких) изолированных проводников («обкладок»), из которых один полностью заключен внутри другого, как это имеет, например, место в шаровом и в бесконечном цилиндрическом конденсаторах. Ввиду указанной независимости поля между обкладками такого конденсатора от расположения окружающих его проводников емкость его также не зависит от посторонних обстоятельств. При этом под *емкостью конденсатора* в отличие от емкости уединенного проводника нужно понимать отношение заряда конденсатора e к разности потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ этих обкладок (а не к потенциалу какой-либо из обкладок):

$$C = \frac{e}{\varphi_2 - \varphi_1}. \tag{9.1}$$

Далее, зарядом конденсатора e называется абсолютная величина равных по величине и противоположных по знаку зарядов каждой из обкладок конденсатора.

При этом под зарядом обкладок конденсатора нужно понимать только заряды, расположенные на внутренних, обращенных друг к другу поверхностях этих обкладок [1]).

В том случае, если из двух (или нескольких) проводников ни один не составляет замкнутой системы, охватывающей собою остальные проводники, емкость этой системы проводников (этого конденсатора) практически не будет зависеть от расположения окружающих тел только в том случае, если размеры проводников будут велики по сравнению с расстоянием между ними. Лишь при этом условии пространство между обкладками

[1]) Так, например, под зарядом e шарового конденсатора, состоящего из металлического шара A, окруженного полым металлическим шаром B, нужно понимать заряд внутреннего шара A либо равный ему по абсолютной величине заряд, расположенный на *внутренней* поверхности внешнего шара B. Помимо этого заряда e, на внешней поверхности шара B может находиться произвольный заряд e', не оказывающий влияния на разность потенциалов между A и B.

конденсатора, если не полностью, то в значительной мере будет защищено самими обкладками от воздействия внешнего поля.

З а д а ч а 8. Показать, что емкость C плоского, цилиндрического и шарового конденсаторов равна соответственно:

плоский конденсатор:

$$C = \frac{S}{4\pi d},$$

цилиндрический конденсатор:

$$C = \frac{l}{2\ln(r_2/r_1)},$$

шаровой конденсатор:

$$C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1},$$

где S — поверхность пластин конденсатора, d — их взаимное расстояние, l — длина, а r_1 и r_2 — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров и, наконец, R_1 и R_2 — радиусы внутренней и внешней шаровой поверхности.

П р и м е ч а н и е. Так как емкость цилиндрического конденсатора пропорциональна его длине l, то можно говорить о «емкости единицы длины конденсатора» C^*, равной

$$C^* = \frac{C}{l} = \frac{1}{2\ln(r_2/r_1)}. \tag{9.2}$$

Очевидно, что

$$C^* = \frac{e}{l(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{\varkappa}{\varphi_2 - \varphi_1}, \tag{9.3}$$

где $\varkappa$ — заряд единицы длины конденсатора. Конечно, понятие емкости единицы длины (как, впрочем, и приведенное выражение для C) можно применять лишь в том случае, если длина цилиндрического конденсатора настолько велика по сравнению с расстоянием между его обкладками, что можно вовсе исключить из рассмотрения концевые участки конденсатора, в которых поле его существенно искажается; лишь в этом случае C пропорционально l.

§ 10. Градиент электростатического потенциала. Линии сил

1. Из формул (8.1)

$$d\varphi = -\mathbf{E}\,d\mathbf{s} = -E_s\,ds$$

следует, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = -E_s, \tag{10.1}$$

где $\partial\varphi/\partial s$ означает производную φ по направлению $\mathbf{s}$ вектора $d\mathbf{s}$ (см. приложение, § 2). По определению понятия градиента эта пространственная производная скаляра φ совпадает со слагающей его градиента $\operatorname{grad}\varphi$ по направлению $\mathbf{s}$ [см. уравнение (4*)]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \operatorname{grad}_s \varphi.$$

Таким образом,

$$E_s = -\operatorname{grad}_s \varphi.$$

Так как это равенство проекций векторов $\mathbf{E}$ и $-\operatorname{grad}\varphi$ должно иметь место при любом выборе направления $\mathbf{s}$, то и векторы эти должны быть равны друг другу:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{10.2}$$

Таким образом, *напряженность электростатического поля* $\mathbf{E}$ *равна градиенту электростатического потенциала* φ, *взятому с обратным знаком.*

Так как градиент потенциала направлен в сторону его возрастания и является мерой быстроты этого возрастания, то можно сказать, что напряженность электрического поля есть мера быстроты спадания потенциала, или, просто, что она равна *спаду потенциала.* Направление напряженности поля совпадает с направлением ортогональных траекторий эквипотенциальных поверхностей (см. приложение, § 2). Поэтому эти ортогональные траектории (линии градиента) совпадают с линиями электрических сил, или *силовыми линиями.*

2. Электрической силовой линией называется линия, касательные к которой в каждой ее точке совпадают по направлению с вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ в той же точке (т. е. с направлением электрической силы, действующей на единичный положительный заряд). Очевидно, что через каждую точку поля, в которой $\mathbf{E} \neq 0$, можно провести одну и только одну силовую линию. В каждой такой точке P вектор $\mathbf{E}$ имеет вполне определенное направление. Отложив из P произвольно малый отрезок в направлении $\mathbf{E}$, мы придем в точку P', в которой вектор $\mathbf{E}$ может иметь иное направление, чем в P. Отложив из P' произвольно малый отрезок в соответствующем направлении, мы придем в новую точку P'', в которой можем опять повторить ту же операцию, и т. д. Полученная таким образом ломаная линия в пределе, при беспредельном уменьшении составляющих ее отрезков, совпадает с искомой силовой линией.

Чтобы получить аналитическое уравнение силовых линий, достаточно учесть, что элемент длины $d\mathbf{s}$ силовой линии параллелен напряженности поля $\mathbf{E}$, т. е. что слагающие его по осям координат dx, dy, dz пропорциональны слагающим E_x, E_y, E_z вектора $\mathbf{E}$:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \tag{10.3}$$

Уравнения (10.3) эквивалентны системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, например $\frac{dx}{dz} = \frac{E_x}{E_z}$ и $\frac{dy}{dz} = \frac{E_y}{E_z}$, интегралы которых имеют вид: $f_1(x, y, z) = C_1$ и $f_2(x, y, z) = C_2$, где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Совокупность этих последних уравнений и представляет собою уравнение силовой линии. Произвол в выборе постоянных C_1 и C_2 соответствует возможности произвольно выбрать координаты x_0, y_0, z_0 той точки поля, через которую мы желаем провести данную силовую линию.

Физики XIX в. долгое время стремились объяснить электромагнитные явления деформациями и вихревыми движениями особой всепроникающей гипотетической среды — эфира; они полагали, что силовые линии совпадают с осями деформации (или осями кручения), испытываемой эфиром в электрическом поле. Однако к началу XX в. выяснилась полная несостоятельность механистической теории эфира[1]), и в настоящее время, пользуясь понятием «силовых линий», нужно помнить, что понятие это имеет условно-вспомогательное значение и что силовые линии служат лишь для графического изображения направления электрического вектора.

3. Впрочем, подобно тому как при надлежащем способе черчения эквипотенциальных поверхностей густота их расположения может служить мерой градиента потенциала, т. е. мерой напряженности поля, подобно этому и силовыми линиями можно воспользоваться для той же цели.

Нанести на чертеж все силовые линии, проходящие через каждую точку поля и заполняющие собой все занимаемое полем пространство, конечно, невозможно. Обыкновенно силовые линии чертятся с таким расчетом, чтобы в любом участке поля число линий, пересекающих перпендикулярную к ним площадку единичной поверхности, было по возможности пропорционально

[1]) Пространство (в том числе и вакуум) обладает не только протяженностью, но и рядом других физических свойств, характеризуемых электромагнитным полем и полем тяготения, и может находиться в различных физических состояниях; эти состояния пространства обусловливаются находящимися в нем телами и в свою очередь воздействуют на эти тела Против употребления термина «эфир» в смысле носителя этих физических свойств «пустого» пространства не может быть возражений по существу: можно лишь сомневаться в целесообразности такой терминологии, соответствующей разбиению единого понятия физического пространства на понятие эфира и на понятие геометрического пространства, т. е. чистой протяженности, лишенной всех других физических свойств. Однако весьма часто в термин «эфир» вкладывается иной, механистический смысл. Представление об эфире как о непрерывной жидкости или о совокупности мельчайших атомов, несомненно, ложно, так же как и вообще всякое представление о пространственных перемещениях элементов эфира.

напряженности поля на этой площадке. В таком случае густота расположения силовых линий может служить мерой напряженности поля. При этом число линий, пересекающих произвольный элемент поверхности dS, будет, очевидно, пропорционально произведению напряженности E и проекции элемента dS на плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{E}$. Это произведение $E\,dS\cos(\mathbf{En})$ равно потоку вектора $\mathbf{E}$ через элемент dS. Поэтому вместо термина «поток вектора через данную поверхность» употребляют иногда выражение «число силовых линий, пересекающих данную поверхность». Это число линий считается положительным или отрицательным в зависимости от того, пересекают ли силовые линии данную поверхность в направлении положительной (внешней) или отрицательной (внутренней) нормали к ней.

Отметим, что при указанном способе черчения силовых линий общее число этих линий, пересекающих *любую* замкнутую поверхность S, должно быть пропорциональным алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри S, ибо, согласно теореме Гаусса (3.6), сумма этих зарядов пропорциональна потоку вектора $\mathbf{E}$ через S. При этом, конечно, определяя число линий, пересекающих S, мы каждую из них должны брать с надлежащим знаком (+ или −).

В частности, число силовых линий, пересекающих любую, не содержащую зарядов, замкнутую поверхность, равно нулю. Иными словами, число (положительное) линий, выходящих из ограниченного поверхностью объема, равно (отрицательному) числу линий, входящих в него. Отсюда следует, что в свободных от зарядов участках поля силовые линии не могут ни начинаться, ни оканчиваться [1]). С другой стороны, линии эти не могут так-

[1]) Исключением из этого правила могут быть только точки (или линии) неопределенности, в которых напряженность поля E обращается в нуль и направление силовых линий становится неопределенным. Такой точкой неопределенности является, например, середина расстояния между двумя равными зарядами одинакового знака.

Пусть, например, в точках A и B расположены два равных положительных заряда и точка O лежит на середине отрезка AB. Отрезок прямой AO является силовой линией, вдоль которой напряженность поля E уменьшается по мере удаления от A и обращается в точке O в нуль То же относится и к силовой линии BO. обе противоположно направленные силовые линии AO и BO заканчиваются в точке O. Вместе с тем из этой точки исходит пучок прямых силовых линий, расположенных в плоскости симметрии, перпендикулярной к отрезку AB. Поток через замкнутую поверхность, охватывающую точку O, конечно, равен нулю.

На этом примере ясно видна также условность понятия силовых трубок, т. е. нитей конечного сечения, поверхность которых образована силовыми линиями. Действительно, силовая трубка сколь угодно малого сечения, охватывающая линию AO, неограниченно расширяется по мере удаления от заряда A. При приближении к плоскости симметрии, проходящей через O, сечение этой трубки стремится к бесконечности и совпадает в пределе с плоскостью симметрии.

же быть замкнутыми. В противном случае, линейный интеграл $\oint_L E_s\,ds$ по каждой из замкнутых линий сил L был бы отличен от нуля (ибо элементы $d\mathbf{s}$ линий сил параллельны $\mathbf{E}$ и, стало быть, подынтегральное выражение существенно положительно), что противоречит уравнению (7.3). Стало быть, *в электростатическом поле линии сил либо начинаются и оканчиваются на электрических зарядах, либо одним своим концом* [1]) *уходят в бесконечность.*

Таким образом, для получения правильной картины поля достаточно, очевидно, от каждого элемента заряда провести число линий, пропорциональное величине этого заряда.

Для незамкнутых линий, впрочем, существует, помимо перечисленных, еще третья возможность: они могут при безграничном продолжении, не пересекаясь и не замыкаясь, всюду плотно заполнять некоторый ограниченный участок пространства. С такого рода *магнитными* силовыми линиями мы познакомимся в гл. IV. Однако для силовых линий *электростатического* поля эта возможность исключена, ибо линия, заполняющая некоторый участок пространства, должна при достаточном продолжении как угодно близко подходить к ранее пройденным ею точкам. Если P и P' суть две такие бесконечно близкие точки на подобной силовой линии L, то интеграл $\int_P^{P'} E_s\,ds$ по этой линии будет существенно положителен и будет обладать *конечной* величиной. Вместе с тем, если только вектор $\mathbf{E}$ конечен, этот интеграл должен отличаться лишь на *бесконечно малую величину* от интеграла $\oint E_s\,ds$ по *замкнутому* контуру, образованному отрезком PP' силовой линии и бесконечно малым отрезком прямой, соединяющей P' с P. Но последний интеграл, согласно (7.3), равен нулю, т. е. отличается на *конечную* величину от $\int_P^{P'} E_s\,ds$. Этим противоречием и доказывается невозможность существования силовых линий указанного типа.

З а д а ч а 9. Показать, исходя из (8.10), что напряженность поля диполя момента $\mathbf{p}$, линии сил которого изображены на

[1]) Оба конца силовой линии не могут лежать в бесконечности, если только все заряды расположены в конечной области пространства Для доказательства достаточно применить уравнение (7.3) к замкнутому пути, получаемому при замыкании рассматриваемой линии в бесконечности дугой круга бесконечного радиуса, и принять во внимание, что интеграл $\int E_s\,ds$ по этой дуге стремится к нулю при возрастании радиуса дуги R (ибо при достаточно большом R имеем $E \sim \frac{1}{R^2}$, а $\int ds \sim R$).

рис. 15, равна

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{pR})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{p}}{R^3} \tag{10.4}$$

и что в сферической системе координат R, ϑ, α с центром в диполе и полярной осью, параллельной $\mathbf{p}$, слагающие вектора $\mathbf{E}$ равны

$$E_R = \frac{2p\cos\vartheta}{R^3}, \qquad E_\vartheta = \frac{p\sin\vartheta}{R^3}, \quad E_\alpha = 0. \tag{10.5}$$

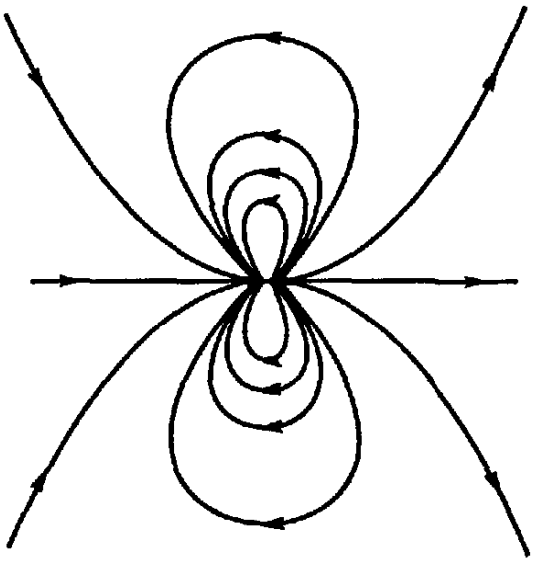

Рис. 15

Таким образом, угол β между силовой линией и радиусом-вектором $\mathbf{R}$ определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{E_\vartheta}{E_R} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\vartheta.$$

На одинаковых расстояниях R от диполя поле вдоль его оси ($\vartheta = 0$ или $\vartheta = \pi$) вдвое сильнее, чем в экваториальной плоскости ($\vartheta = \pi/2$).

§ 11. Уравнения Пуассона и Лапласа

Уравнение (10.2) устанавливает связь между потенциалом электростатического поля и напряженностью этого поля. Из этого уравнения можно получить соотношение между потенциалом и плотностью заряда. Для этого нужно образовать дивергенцию обеих частей этого уравнения и воспользоваться затем формулой (6.5):

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\operatorname{div}\mathbf{E} = -4\pi\rho. \tag{11.1}$$

Согласно правилам векторного анализа [см. уравнение (40*)]

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \tag{11.2}$$

так что уравнение (11.1) может быть записано так [1]:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho. \tag{11.3}$$

Это дифференциальное уравнение носит название *уравнения Пуассона*. В тех участках поля, где нет электрических зарядов

[1] Величину $\nabla^2\varphi$ иногда обозначают через $\Delta\varphi$ и называют лапласианом скаляра φ [ср. уравнение Лапласа (11.4)].

($\rho = 0$), уравнение это обращается в следующее:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (11.4)$$

Этот частный вид уравнения Пуассона носит название *уравнения Лапласа* [1]).

Уравнение Пуассона дает возможность определить потенциал поля объемных зарядов, если известно расположение этих зарядов. Решение (интеграл) этого дифференциального уравнения (при определенных граничных условиях) должно, очевидно, совпадать с выведенной нами ранее формулой (8.8):

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dV}{R}.$$

В дальнейшем мы докажем это непосредственным вычислением. Пока же отметим, что для решения некоторых задач удобнее исходить не из интеграла (8.8), а непосредственно из дифференциального уравнения (11.3).

Пример. *Определить плотность термоионного тока между двумя бесконечными плоскими электродами в вакууме.* Пример этот на применение уравнения Пуассона взят не из электростатики, а из учения о токе и имеет большое значение для теории катодных (усилительных) ламп.

Известно, что накаленные металлы испускают со своей поверхности в окружающее пространство поток свободных электронов. Если к двум металлическим электродам приложить определенную разность потенциалов и раскалить отрицательный электрод (катод), то непрерывно испускаемые накаленным катодом электроны будут притягиваться к поверхности положительного электрода (анода). Поток электронов, движущихся от катода к аноду, эквивалентен электрическому току. Ток этот называется *термоионным*.

Выберем оси декартовых координат так, чтобы начало их находилось на катоде, а ось x была перпендикулярна плоскости электродов и направлена к аноду. Примем потенциал катода равным нулю, а потенциал анода равным φ_a. Из соображений симметрии явствует, что эквипотенциальные поверхности параллельны электродам, поэтому $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$, и уравнение Пуассона в пространстве между электродами принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -4\pi\rho. \qquad (11.5)$$

Если обозначить через $n(x)$ число электронов, приходящихся на единицу объема в пространстве между электродами на расстоянии x от катода, а через e *абсолютную* величину заряда электрона, то плотность заряда на

[1]) Уравнения (11.3) и (11.4) были изучены Лапласом и Пуассоном главным образом в связи с исследованием поля тяготения весомых масс. Как легко убедиться, уравнениями этого типа определяется потенциал любого силового поля, возбуждаемого расположенными в нем центрами сил (весомые массы, электрические заряды, магнитные полюсы) по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния.

этом расстоянии будет:

$$\rho = -n(x)e.$$

Предположим для простоты, что испускаемые катодом электроны при выходе из его поверхности не обладают никакой начальной скоростью [1]). На пути от катода к аноду силы электрического поля будут совершать над электронами заряда $-e$ работу $-(-e)\varphi_a = e\varphi_a$, которая будет, очевидно, переходить в кинетическую энергию движения электронов. Обозначая через $v(x)$ скорость электрона на расстоянии x от катода, а через $\varphi(x)$ потенциал на том же расстоянии, получим

$$\frac{mv^2(x)}{2} = e\varphi(x), \tag{11.6}$$

где m — масса электрона. Наконец, плотность j электрического тока, т. е. заряд, протекающий за единицу времени через перпендикулярную току (т. е. перпендикулярную оси x) площадку в 1 см^2, равна, очевидно:

$$j = en(x)v(x), \tag{11.7}$$

ибо nv есть число электронов, проходящих за единицу времени через эту площадку. В отличие от ρ, n и v плотность тока j есть величина постоянная, не зависящая от x, ибо по достижении стационарного состояния через любую параллельную электродам плоскость проходит, очевидно, одинаковое число электронов.

Исключим из уравнения (11.5) все неизвестные функции x, кроме φ. Прежде всего

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -4\pi\rho = 4\pi ne = \frac{4\pi j}{v}.$$

Но из (11.6) следует, что

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m}}\,\varphi;$$

стало быть,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 4\pi j\varphi^{-1/2}\sqrt{\frac{m}{2e}}.$$

Вводя обозначение $A = 9\pi\sqrt{\frac{m}{2e}}$, получим $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{4}{9}Aj\varphi^{-1/2}$.

Как легко убедиться подстановкой, то́ из решений этого дифференциального уравнения, которое, согласно условию задачи, обращается на катоде в нуль и, кроме того, удовлетворяет условию [2])

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

[1]) В действительности они обладают начальными скоростями, среднее значение которых, однако, мало по сравнению со скоростью, приобретаемой электронами на пути к аноду под действием поля электродов (при обычных условиях опыта).

[2]) При малых разностях потенциалов между электродами ток далек от насыщения, и число электронов, приходящих на анод в единицу времени, мало по сравнению с числом электронов, выделяющихся из катода. Избыточные электроны образуют при этом на внешней поверхности катода ($x = 0$) слой, или «облако», электронов, из которого отдельные электроны диффундируют частью обратно в катод, частью в пространство между электродами, откуда они увлекаются полем к аноду. Сам же этот слой в целом неподвижен, что может иметь место лишь при $E = \partial\varphi/\partial x = 0$.

равно

$$\varphi = (Aj)^{2/3} x^{4/3}. \qquad (11\,8)$$

Если обозначить расстояние от анода до катода через l, то при $x = l$ потенциал φ должен обращаться в φ_a. Стало быть,

$$\varphi_a = (Aj)^{2/3} l^{4/3},$$

откуда

$$j = \frac{1}{A}\frac{\varphi_a^{3/2}}{l^2} = \frac{1}{9\pi}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{\varphi_a^{3/2}}{l^2}. \qquad (11.9)$$

Таким образом, плотность термоионного тока не подчиняется закону Ома, а растет пропорционально степени 3/2 приложенного к электродам напряжения φ_a и обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. Это отличие законов термоионного тока от законов тока в металлах обусловливается двоякого рода причинами. Во-первых, электроны в металлах соударяются с положительными ионами, образующими твердый скелет металла, и испытывают благодаря этому сопротивление своему движению, отсутствующее при движении в вакууме [1]. Во-вторых, при термоионном токе в пространстве между электродами находятся лишь свободные электроны, заряд которых не компенсируется зарядом положительных ионов, как это имеет место в металлах, вследствие чего поле этого так называемого «пространственного заряда» искажает поле электродов.

Отметим, что формула (11.9) перестает быть справедливой при больших плотностях тока [2]. При повышении потенциала анода наступает момент, когда все выделяемые катодом электроны немедленно же увлекаются к аноду. Дальнейшее повышение потенциала анода не может, очевидно, повести к увеличению плотности тока, которая, таким образом, достигает постоянного значения (ток насыщения).

Задача 10. Пусть R означает расстояние данной точки пространства от некоторой произвольно выбранной начальной точки P. Показать, что скаляр

$$\psi = \frac{1}{R}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = 0. \qquad (11.10)$$

Точка $R = 0$ не рассматривается.

Задача 11. Бесконечная плоская пластина толщиной $2a$ равномерно заряжена электричеством с объемной плотностью ρ. Ось x перпендикулярна пластине, начало координат расположено в срединной плоскости, равноотстоящей от обеих поверхностей пластины. Показать, что потенциал поля внутри и вне пластины равен соответственно:

$$\varphi_i = -2\pi\rho x^2, \quad \varphi_e = -2\pi\rho a(2x - a),$$

[1]) Соударение электронов друг с другом не изменяет их полного количества движения.

[2]) Граничное условие $d\varphi/dx = 0$ при $x = 0$, которым определяется решение (11.8), перестает соответствовать физическим условиям опыта.

а вектор $\mathbf{E}$ направлен вдоль оси x от срединной плоскости $x = 0$ (если $\rho > 0$) и численно равен:

$$E = 4\pi\rho|x|, \quad |x| \leqslant a, \quad E = 4\pi\rho a, \quad |x| \geqslant a.$$

Сравнить этот случай с предельным случаем бесконечной заряженной плоскости (§ 4).

З а д а ч а 12. Найти потенциал поля шара, равномерно заряженного по своему объему [формула (8.12)], исходя из уравнения Пуассона в сферических координатах.

§ 12. Потенциал объемных и поверхностных зарядов

1. В этом параграфе мы приведем доказательство выражений (8.7) и (8.8) для потенциала поверхностных и объемных зарядов, свободное от тех недостатков, которыми обладает приведенный ранее вывод этих выражений из формулы для потенциала точечного заряда (см. с. 44, 46) [1]. При этом мы будем исходить из уравнения Пуассона (11.3) для потенциала электростатического поля и воспользуемся известной из векторного анализа *теоремой Грина* [см. (53*)], которая гласит:

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)\, dV = \oint_S \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS. \tag{12.1}$$

Здесь S означает поверхность, ограничивающую объем V, а φ и ψ — две произвольные, но непрерывные внутри объема V скалярные функции точки, обладающие внутри этого объема конечными производными как первого, так и второго порядка.

Поставим себе задачей определить значение электрического потенциала φ в некоторой точке поля P. Обозначим расстояние произвольной точки поля от точки P через R. Положим в теореме Грина (12.1)

$$\psi = \frac{1}{R}$$

и примем во внимание уравнение (11.10):

$$\nabla^2\frac{1}{R} = 0,$$

[1] В современных книгах по электродинамике для описания точечных зарядов часто используется δ-функция. Эта несобственная функция позволяет довольно удобно получать решения уравнений Пуассона и Д'Аламбера. Применения δ-функции в электродинамике и — в частности — для решения упомянутых уравнений с ее помощью можно найти, например, в книге: *Пановский В., Филипс М.* Классическая электродинамика. — М.: Физматлит, 1968. — § 1.1; 1.5; 13.2 (*Примеч. ред.*)

и уравнение Пуассона (11.3):

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho.$$

Внося эти значения в формулу Грина (12.1), получим после деления на -4π:

$$\int\limits_V \frac{\rho}{R}\,dV = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left\{\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\} dS. \qquad (12.2)$$

2. Предположим сначала, что во всем рассматриваемом нами объеме V, включающем в себя точку P и ограниченном поверхностью S, потенциал φ и его производные являются непрерывными функциями точки. Скаляр же

$$\psi = \frac{1}{R}$$

и его производные непрерывны и конечны во всем пространстве, кроме точки P. Так как теорема Грина применима только к таким участкам пространства, в которых оба скаляра, φ и ψ, и их производные непрерывны, то точку P необходимо исключить из области интегрирования V. Опишем с этой целью вокруг P сферу S_0 (рис. 16) произвольно малого радиуса R_0 и применим формулу (12.2) к объему V', заключенному между внешней поверхностью S и поверхностью сферы S_0:

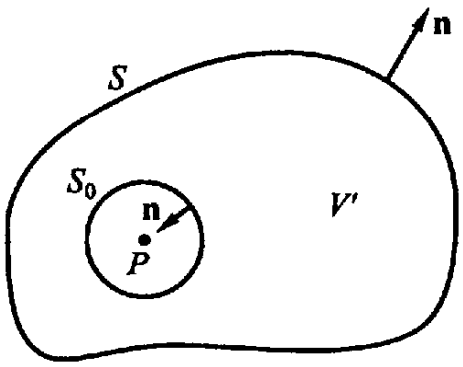

Рис. 16

$$\int\limits_{V'} \frac{\rho}{R}\,dV = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S+S_0} \left\{\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\} dS, \qquad (12.3)$$

где индекс $S+S_0$ у знака поверхностного интеграла означает, что интеграл должен быть распространен по поверхностям S и S_0. Рассмотрим подробнее интеграл по поверхности S_0.

Внешняя по отношению к объему интегрирования V' нормаль к поверхности сферы S_0 направлена к ее центру и прямо противоположна радиусу-вектору $\mathbf{R}$. Поэтому на поверхности S_0

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R} = -\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R^2} = \frac{1}{R_0^2}$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\partial\varphi}{\partial R}.$$

Внесем эти значения в поверхностный интеграл уравнения (12.3) и применим затем так называемую «теорему о среднем»

интегрального исчисления:

$$\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_0}\left\{\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}dS=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_0}\left\{\frac{\varphi}{R_0^2}+\frac{1}{R_0}\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right\}dS=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{R_0^2}\overline{\varphi}+\frac{1}{R_0}\left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial R}}\right)\right\}\oint\limits_{S_0}dS,$$

где $\left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial R}}\right)$ и $\overline{\varphi}$ суть некоторые средние значения величин $\frac{\partial\varphi}{\partial R}$ и φ на поверхности сферы S_0. Так как $\oint dS$ равен общей поверхности сферы $4\pi R_0^2$, то правая часть уравнения равна

$$\overline{\varphi}+R_0\left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial R}}\right).$$

Будем теперь стремить к нулю радиус R_0, стягивая сферу S_0 в точку P. При этом последний член приведенного выражения обратится в нуль, а среднее значение потенциала φ на поверхности бесконечно малой сферы может быть принято равным значению потенциала φ_P в ее центре P. Таким образом,

$$\lim_{R_0\to 0}\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_0}\left\{\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}dS=\varphi_P. \tag{12.4}$$

Следовательно, в пределе при $R_0\to 0$ уравнение (12.3) принимает вид

$$\int\limits_V\frac{\rho}{R}\,dV=\varphi_P+\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S\left\{\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}dS,$$

или

$$\varphi_P=\int\limits_V\frac{\rho}{R}\,dV+\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}dS, \tag{12.5}$$

где объемный интеграл может быть распространен на весь ограниченный поверхностью S объем V, ибо при $R_0\to 0$ V' стремится к V, а подынтегральное выражение остается конечным при $R=0$ (с. 45).

Итак, потенциал φ в точке P, лежащей внутри объема V, в котором φ и его первые и вторые производные конечны и непрерывны, определяется потенциалом объемных зарядов, расположенных в V [ср. уравнение (8.8)], и значениями φ и $\partial\varphi/\partial n$ на ограничивающей объем V поверхности S.

3. Предположим теперь, что хотя потенциал φ и остается конечным и непрерывным в объеме V, сплошность (непрерывность) градиента φ может нарушаться на отдельных «поверхностях разрыва», т. е. значения $\operatorname{grad}\varphi$ по различным сторонам

поверхности разрыва могут отличаться на конечную величину (изменение $\operatorname{grad}\varphi$ скачком). Мы увидим, что физический смысл этого предположения сводится к допущению наличия в объеме V заряженных поверхностей.

Предположим сначала, что внутри V существует лишь одна и притом незамкнутая поверхность разрыва S_1. Выберем произвольным образом направление положительной нормали к ней и обозначим ее не через $\mathbf{n}$, как обычно, а через $\mathbf{N}$ (рис. 17). Проведем затем замкнутую поверхность S_1', охватывающую S_1; тогда формулу (12.5) можно будет, очевидно, применить к объему V', заключенному между поверхностями S и S_1'. При этом входящий в (12.5) поверхностный интеграл распадется на два интеграла: по поверхности S и по поверхности S_1'.

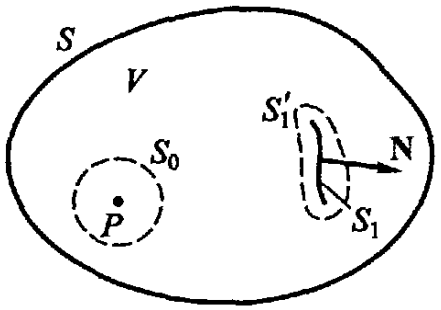

Рис. 17

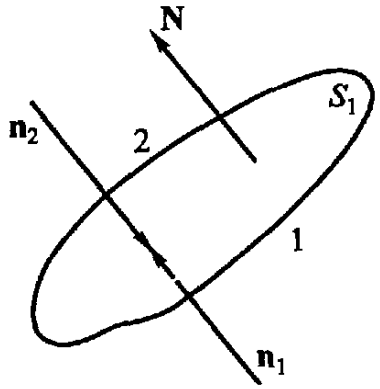

Рис. 18

Будем теперь стягивать поверхность S_1' так, чтобы она все плотнее прилегала к S_1. В пределе S_1' совпадет с S_1, и интегрирование по S_1' сведется к *двукратному* интегрированию по поверхности разрыва S_1: один раз по внутренней (относительно нормали $\mathbf{N}$), а другой раз по внешней стороне этой поверхности:

$$\lim_{S_1'\to S_1}\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_1'}\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}dS=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1}\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}_1 dS+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1}\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}_2 dS,$$

где индексами 1 и 2 отмечены значения подынтегральных выражений соответственно с внутренней (относительно нормали $\mathbf{N}$) и внешней сторон поверхности разрыва S_1. В этом уравнении под $\mathbf{n}$ нужно понимать, очевидно, нормаль, внешнюю по отношению к объему интегрирования V', т. е. направленную из V' к S_1. Иными словами, с внутренней стороны от S_1 под $\mathbf{n}$ нужно понимать направление $\mathbf{n}_1$, а с внешней — направление $\mathbf{n}_2$ (рис. 18). Так

как $\mathbf{N}$ параллельно $\mathbf{n}_1$ и антипараллельно $\mathbf{n}_2$, то

$$\left\{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}_1 = \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{R}\right), \qquad \left\{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}_2 = -\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{R}\right)$$

и

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_1, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_2,$$

где $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_1$ и $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_2$ суть значения производной φ по нормали N с внутренней и внешней сторон поверхности S_1. Обозначая соответствующие значения потенциала φ через φ_1 и φ_2 и внося полученные выражения в предшествующее уравнение, мы по приведении членов получим

$$\lim_{S_1'\to S_1}\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_1'}\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1}(\varphi_2-\varphi_1)\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{R}\right)dS - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_1\right\}\frac{1}{R}\,dS. \tag{12.6}$$

Так как, согласно нашему предположению, потенциал φ всюду непрерывен, то значения его φ_1 и φ_2 по обеим сторонам поверхности одинаковы, и первый член правой части уравнения (12.6) обращается в нуль [1]). Стало быть, если ввести обозначение

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_1 = -4\pi\sigma, \tag{12.7}$$

то правая часть уравнения (12.6) примет вид

$$\int\limits_{S_1}\frac{\sigma}{R}\,dS.$$

Вместе с тем при совпадении S_1' с S_1 объем V' совпадает, очевидно, с объемом V, ограниченным поверхностью S, так что уравнение (12.5) принимает вид

$$\varphi_P = \int\limits_V\frac{\rho\,dV}{R}+\int\limits_{S_1}\frac{\sigma\,dS}{R}+\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}dS. \tag{12.8}$$

Таково, стало быть, выражение потенциала, если внутри ограниченного поверхностью S объема V имеется незамкнутая поверхность S_1 разрыва сплошности градиента φ. Если таких поверхностей несколько, то к каждой из них можно применить

[1]) Случай $\varphi_1 \neq \varphi_2$ будет рассмотрен в § 14.

приведенные рассуждения, так что в этом случае под вторым членом правой части формулы (12.8) нужно понимать *сумму* интегралов по *всем* поверхностям разрыва, лежащим внутри V. Формула эта применима, наконец, и к случаю замкнутых поверхностей разрыва, ибо всякую замкнутую поверхность можно разложить на две незамкнутые.

4. Первый член выражения (12.8) представляет собой потенциал объемных зарядов, расположенных в объеме V, второй же его член должен быть, очевидно, истолкован как потенциал поверхностных зарядов, распределенных с плотностью σ по поверхности разрыва S_1 [ср. уравнение (8.7)]. Это толкование вполне совпадает с ранее полученными результатами. Действительно, если по-прежнему обозначить произвольно выбранную положительную нормаль к S_1 не через $\mathbf{N}$, а через $\mathbf{n}$, то (12.7) примет вид

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 = -4\pi\sigma. \tag{12.9}$$

Но, согласно (10.1),

$$E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

где E_n — нормальная слагающая напряженности поля. Стало быть, уравнение (12.9) может быть записано следующим образом:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma.$$

Сравнивая его с уравнением (4.3), мы убеждаемся, что величина σ, определяемая уравнением (12.9), действительно равна плотности электрического заряда на поверхности S_1. Таким образом, мы вновь приходим к выводу, что поверхности разрыва *нормальной слагающей* градиента потенциала (т. е. поверхности разрыва E_n) физически равнозначны заряженным поверхностям, причем скачок этой слагающей $\partial\varphi/\partial n$ пропорционален плотности заряда поверхности.

5. Обратимся, наконец, к последнему члену выражения (12.8), представляющему собой интеграл по пограничной поверхности S объема V и выражающему зависимость потенциала φ в объеме V от этого потенциала и его первых производных на граничной поверхности этого объема.

Член этот вовсе выпадет из выражения потенциала, если мы под объемом интегрирования V будем понимать все бесконечное пространство (т. е. удалим ограничивающую V поверхность S в бесконечность) и при этом наложим на φ и его производные следующие граничные условия: в бесконечности φ стремится к нулю не медленнее, чем $1/R$, а его первые производные по координатам не медленнее, чем $1/R^2$, т. е.

$$R\varphi \text{ и } R^2 \operatorname{grad}\varphi \text{ при } R \to \infty \text{ остаются конечными.} \tag{12.10}$$

Первым из этих условий мы уже пользовались в § 8, приравнивая нулю значение потенциала в бесконечности [уравнение (8.3)]; второе же условие непосредственно связано с первым. Физически оно означает, что в бесконечности напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля равна нулю, т. е. что все заряды находятся в конечной области пространства. Во всем дальнейшем мы будем называть потенциалом электростатического поля то и только то решение уравнения Пуассона, которое удовлетворяет условиям (12.10) [1].

6. Покажем теперь, что при наложении условий (12.10) и удалении граничной поверхности S в бесконечность последний член выражения (12.8) действительно обращается в нуль. Выберем в качестве поверхности S сферу радиуса R с центром в точке P. Внешняя нормаль к этой сфере совпадает с радиусом-вектором $\mathbf{R}$, так что

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^2}.$$

Из условия (12.10) следует, стало быть, что подынтегральное выражение интересующего нас интеграла при $R \to \infty$ стремится к нулю не медленнее, чем $1/R^3$, тогда как поверхность интегрирования растет пропорционально лишь R^2. Стало быть, интеграл этот при $R \to \infty$ стремится к нулю и (12.8) принимает вид (если опустить у φ индекс P):

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dV}{R} + \int \frac{\sigma\, dS}{R}, \tag{12.11}$$

где R — расстояние элемента объемного заряда $\rho\, dV$ или заряда поверхностного $\sigma\, dS$ от точки поля, обладающей потенциалом φ, и где интегрирование должно быть распространено по всему пространству, занятому зарядами [ср. (12.11) с прежними формулами (8.7) и (8.8)].

Из изложенного явствует, что поверхностный интеграл в формуле (12.8) учитывает поле зарядов, лежащих вне объема интегрирования V (а также возможность добавить к φ произвольную аддитивную постоянную).

7. Напомним, что во всем предыдущем изложении нами предполагалось, что как сам потенциал, так и его первые производные (градиент) *всюду конечны*. Бесконечность градиента φ (т. е. скачок потенциала) означала бы бесконечную напряженность электрического поля, что физически бессмысленно. Конечность же градиента φ означает *непрерывность* φ, что и предполагалось нами во всем предшествующем. Впрочем, в § 14 вернемся к во-

[1] За исключением, конечно, тех случаев, когда условно вводятся в рассмотрение заряды, простирающиеся в бесконечность, как, например, бесконечные заряженные плоскость, цилиндр и т.п.

просу о поверхностях разрыва потенциала с несколько иной точки зрения.

8. Если размеры заряда e, занимающего объем V_1, настолько малы по сравнению с расстоянием его R до рассматриваемой точки поля P, что расстояние всех элементов заряда от P можно считать одинаковым, то потенциал этого заряда в P будет равен

$$\int\limits_{V_1} \frac{\rho\, dV}{R} = \frac{1}{R}\int\limits_{V_1} \rho\, dV = \frac{e}{R},$$

что совпадает с выражением (8.5) потенциала точечного заряда.

§ 13. Типичные задачи электростатики

1. Введение понятия потенциала значительно облегчает решение задач электростатики, ибо задача определения *векторного поля* электрической напряженности $\mathbf{E}$ сводится к определению *поля скаляра* φ; иными словами, определение *трех* функций точки (слагающих вектора $\mathbf{E}$) сводится к определению *одной* только функции φ.

Зная плотность объемных и поверхностных зарядов, можно определить потенциал поля [формула (12.11)]; обратно, зная градиент потенциала φ, по дивергенции этого градиента $\nabla^2\varphi$ и по величине скачков его нормальной слагающей на поверхностях разрыва можно однозначно определить распределение зарядов [формулы (11.3) и (12.9)].

Однако практически, конечно, невозможно измерить плотность зарядов или градиент потенциала во всех точках поля. Поэтому экспериментатору приходится фактически иметь дело с задачами иного типа, а именно: дано расположение и форма всех находящихся в поле проводников; *определить поле* этих проводников и *распределение зарядов* по их поверхности, *если известны либо потенциал каждого проводника* (*задача* А), *либо общий заряд каждого проводника* (*задача* В). Объемные заряды предполагаем отсутствующими, ибо заряды проводников сосредоточены на их поверхности (§ 5), а диэлектрики в этой главе не рассматриваются.

2. Покажем прежде всего, что и этими на первый взгляд весьма обще формулированными условиями электростатическое поле, а стало быть, и распределение зарядов определяются *однозначно.*

Предположим противное, и пусть φ и φ' суть две различные функции точки, удовлетворяющие условиям задачи А или В. Ввиду отсутствия объемных зарядов как φ, так и φ' должны удовлетворять во всем пространстве уравнению Лапласа (11.4);

стало быть, и разность их

$$\varphi'' = \varphi - \varphi'$$

удовлетворяет тому же уравнению

$$\nabla^2 \varphi'' = 0.$$

Полагая в формуле Грина (52*) $\psi = \varphi = \varphi''$, мы, таким образом, получим

$$\int_V (\nabla \varphi'')^2 \, dV = \oint_S \varphi'' \frac{\partial \varphi''}{\partial n} \, dS, \tag{13.1}$$

где интегрирование предполагается распространенным по всему лежащему вне проводников пространству V, так что под S нужно понимать совокупность поверхностей всех проводников.

Так как при решении задачи А φ и φ' должны принимать на S наперед заданные значения, то φ'' на всех поверхностях S равно нулю. Стало быть,

$$\int_V (\nabla \varphi'')^2 \, dV = 0. \tag{13.2}$$

Ввиду положительности подынтегрального выражения из этого равенства следует, что $\nabla \varphi'' = \operatorname{grad} \varphi''$ во всем пространстве равно нулю, т. е. что $\varphi'' = \text{const}$. Так как, кроме того, на поверхностях проводников φ'' обращается в нуль, то оно равно нулю и повсюду. Стало быть,

$$\varphi = \varphi',$$

чем и доказывается однозначность решения задачи А.

Обращаясь к задаче В, заметим, что на поверхности каждого проводника потенциалы φ и φ', а стало быть, и φ'' должны иметь постоянное значение. Значит, для поверхности каждого проводника можно написать

$$\oint \varphi'' \frac{\partial \varphi''}{\partial n} \, dS = \varphi'' \oint \frac{\partial \varphi''}{\partial n} \, dS.$$

Но на поверхности проводников, согласно (5.1),

$$E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 4\pi\sigma \quad \text{и} \quad E'_n = -\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = 4\pi\sigma',$$

где σ и σ' — плотности зарядов проводников, соответствующие решениям φ и φ'. Стало быть,

$$\frac{\partial \varphi''}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi'}{\partial n} = 4\pi(\sigma' - \sigma)$$

и

$$\oint \varphi'' \frac{\partial \varphi''}{\partial n} \, dS = 4\pi\varphi'' \left(\oint \sigma' \, dS - \oint \sigma \, dS \right) = 4\pi\varphi''(e' - e),$$

где e и e' суть значения общего заряда проводника, соответствующие решениям φ и φ'; согласно условию B, e и e' должны равняться одному и тому же наперед заданному значению. Так как приведенное рассуждение применимо к поверхности *каждого* проводника, то вся правая часть равенства (13.1) обращается в нуль, откуда, как и в случае задачи A, следует, что

$$\varphi'' = \varphi - \varphi' = \text{const}.$$

Таким образом, различные решения задачи B могут отличаться лишь несущественной аддитивной постоянной в выражении потенциала, которая, впрочем, обратится в нуль, если наложить в бесконечности условия (12.10). Нетрудно, наконец, убедиться, что если для части проводников заданы условия типа A, а для остальных — условия типа B, то решение задачи остается однозначным.

3. Итак, однозначность решения задач электростатики A и B нами доказана. Впрочем, нахождение самого решения представляет, вообще говоря, значительные математические трудности. Однако если нам удастся каким-либо способом найти выражение для φ, удовлетворяющее поставленным условиям A или B, то теорема об однозначности позволяет заключить, что найденное выражение есть единственное и потому истинное решение задачи. Умелое пользование этим обстоятельством весьма облегчает рассмотрение ряда проблем электростатики, что мы можем здесь иллюстрировать, к сожалению, лишь на одном-единственном примере, пользуясь при этом для упрощения понятием точечного заряда. Пример этот представляет собой частный случай применения общего «*метода изображений*» [1]).

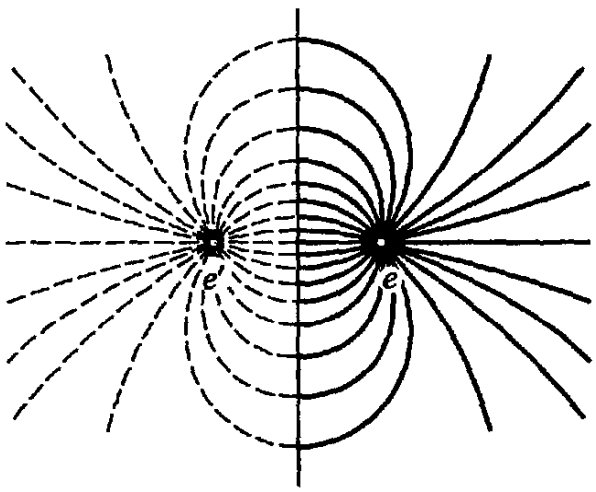

Рис. 19

Пример. *Точечный заряд* e *находится на расстоянии* d *от бесконечного проводника, занимающего левое полупространство* (рис. 19). *Определить поле в правом полупространстве и плотность зарядов, индуцированных зарядом* e *на поверхности проводника.* Этот пример относится к типу рассмотренных выше задач, ибо общий заряд e проводника, несущего «точечный» заряд, задан: постоянный же потенциал бесконечного проводника может быть условно принят равным нулю. Стало быть, этими условиями решение задачи определено однозначно.

[1]) Этот метод будет использован также при решении последнего примера в § 23.

Чтобы найти это решение, предположим, что на продолжении перпендикуляра, опущенного из e на поверхность проводника, находится на расстоянии d от этой поверхности заряд $e' = -e$, затем мысленно устраним сам проводник. Тогда плоскость, совпадавшая ранее с поверхностью проводника, будет обладать требуемым потенциалом нуль, ибо все точки этой плоскости будут равно отстоять от равных по величине и противоположных по знаку зарядов $+e$ и $-e$. Стало быть, поле *совокупности* этих зарядов в *правом* полупространстве удовлетворяет условиям задачи, из чего на основании теоремы однозначности следует, что поле это в *правом* полупространстве *тождественно* искомому полю заряда e и зарядов, индуцированных им на поверхности бесконечного проводника.

Таким образом, наша задача сведена к весьма простой задаче определения поля двух точечных зарядов $+e$ и $-e$. Конечно, внутри проводника поле равно нулю, так что в левом полупространстве поле зарядов $+e$ и $-e$ (штриховые линии на рис. 19) не совпадает с полем заряда e и проводника.

З а д а ч а 13. Довести до конца решение рассмотренного примера и показать, что плотность зарядов, индуцированных зарядом e на поверхности бесконечного проводника равна

$$\sigma = -\frac{ed}{2\pi R^3},$$

где R — расстояние элемента поверхности проводника от заряда e, и что весь заряд, индуцированный на проводнике, равен $-e$.

§ 14. Двойной электрический слой

Результаты этого параграфа понадобятся нам лишь в связи с рассмотрением двойных *магнитных* слоев, или листков, в гл. IV, так что чтение этого параграфа можно отложить до соответствующего места.

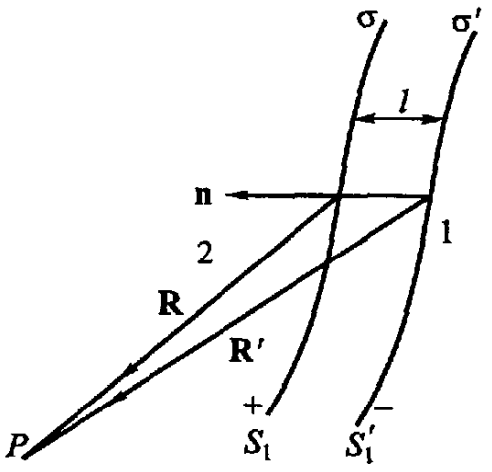

Рис. 20

1. Пусть две весьма близкие и параллельные друг другу поверхности S_1 и S_1' (рис. 20) заряжены электричеством противоположного знака, и притом так, что плотности зарядов σ и σ' на противолежащих элементах обеих поверхностей равны по величине и противоположны по знаку ($\sigma = -\sigma'$); положим для определенности, что $\sigma > 0$. Если расстояние между S_1 и S_1' исчезающе мало по сравнению с расстоянием этих поверхностей до рассматриваемых точек поля, то совокупность

поверхностей S_1 и S_1' называется *двойным электрическим слоем.* Потенциал этого слоя в некоторой точке поля P, согласно (12.11), будет равен

$$\varphi = \int\limits_{S_1} \frac{\sigma\, dS}{R} + \int\limits_{S_1'} \frac{\sigma'\, dS}{R'} = \int\limits_{S_1} \sigma \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) dS,$$

где R и R' суть соответственно расстояния точки P от элемента dS положительно заряженной поверхности S и от противолежащего ему элемента отрицательной поверхности S_1'. Но $\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$ есть приращение обратного значения радиуса-вектора $\mathbf{R}$, проведенного от рассматриваемого элемента двойного слоя в точку P, при перемещении начальной точки вектора от отрицательной поверхности к положительной. Пусть $\mathbf{n}$ есть направление нормали к двойному слою, от отрицательной его стороны к положительной, и пусть l — толщина слоя (расстояние между S_1 и S_1'). Повторяя рассуждения, приведшие нас в § 8 к формуле (8.11), убедимся, что при $l \ll R$

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \mathbf{n} l \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R}\right) = -\mathbf{n} l \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R}\right).$$

Подставив это в предшествующее уравнение и вводя обозначение

$$\tau = \sigma l, \tag{14.1}$$

получим

$$\varphi = -\int\limits_{S_1} \tau \mathbf{n} \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R}\right) dS. \tag{14.2}$$

Таково окончательное выражение потенциала двойного слоя [1]), в котором предполагается, что радиус-вектор $\mathbf{R}$ проведен от слоя в исследуемую точку поля P. Величина τ, равная произведению плотности заряда поверхности слоя на толщину слоя, называется *мощностью* или *моментом слоя*; мы будем пользоваться первым термином, сохраняя второй для обозначения другого понятия (см. гл. IV).

2. На основании (10*) подынтегральное выражение в формуле (14.2) можно представить в виде

$$-\mathbf{n} \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R}\right) dS = \frac{\mathbf{nR}}{R^3}\, dS = \frac{1}{R^2} \cos(\mathbf{R}, \mathbf{n})\, dS.$$

С другой стороны, согласно (3.2),

$$\frac{1}{R^2} \cos(\mathbf{R}, \mathbf{n})\, dS = \pm d\Omega,$$

[1]) Очевидно, что двойной электрический слой можно рассматривать как совокупность параллельных нормали $\mathbf{n}$ диполей длины l, заряды которых располагаются по поверхности слоя с плотностью σ [ср. уравнение (8 11)].

где $d\Omega$ — телесный угол, под которым элемент двойного слоя dS виден из точки P. Что же касается знака, то в рассматриваемом случае в отличие от § 3 $\mathbf{R}$ считается направленным от элемента dS к точке P; стало быть, $\cos(\mathbf{R}, \mathbf{n})$ будет положительным, если из точки P видна положительная сторона элемента двойного слоя dS, и отрицательным в обратном случае (ибо $\mathbf{n}$ направлено по условию от отрицательной к положительной поверхности слоя). Условимся считать телесный *угол $d\Omega$ положительным, если из P видна положительная сторона элемента dS*, и отрицательным в обратном случае. Тогда уравнение (14.2) можно будет записать проще:

$$\varphi = \int_{S_1} \tau \, d\Omega. \tag{14.3}$$

3. Если мощность слоя τ постоянна на всем его протяжении — такой слой называется *однородным*, то потенциал его φ принимает вид

$$\varphi = \tau \int_{S_1} d\Omega = \tau\Omega, \tag{14.4}$$

где под Ω нужно понимать *алгебраическую* сумму телесных углов, под которыми видны элементы поверхности двойного слоя из точки P. Если все эти элементы поверхности видны из P с одной и той же, например положительной, стороны, то абсолютная величина Ω равна, очевидно, тому телесному углу, под которым виден из P весь двойной слой, или, что то же самое, под которым виден из P *контур* этого слоя. Если же весь слой в целом этому условию не удовлетворяет, то его всегда можно разложить на несколько частей, этому условию удовлетворяющих. Ввиду этого содержание уравнения (14.4) можно выразить следующим образом: *потенциал однородного двойного слоя в точке P равен произведению мощности слоя τ на взятый с надлежащим знаком телесный угол Ω, под которым виден из P контур этого слоя.*

4. Особенно просто выражается потенциал замкнутого двойного слоя (например слоя, расположенного по поверхности сферы). Как было показано в § 3, всякая замкнутая поверхность видна под углом $\pm 4\pi$ из всех точек, лежащих внутри этой поверхности, и под углом 0 из всех внешних точек (см., в частности, рис. 3). Стало быть, потенциал замкнутого двойного слоя равен нулю во всем внешнем пространстве и равен $\pm 4\pi\tau$ во всех точках, охватываемых слоем; знак потенциала зависит от того, какая сторона слоя (положительная или отрицательная) обращена внутрь. Таким образом, напряженность поля замкнутого слоя равна нулю (ибо $\operatorname{grad}\varphi = 0$); потенциал же поля испытывает при прохождении через поверхность слоя скачок $4\pi\tau$.

Существенно, что точно такой же скачок $4\pi\tau$ испытывает и потенциал любого *незамкнутого* слоя при прохождении через его поверхность. Чтобы убедиться в этом, дополним мысленно рассматриваемый слой до полной замкнутости вторым слоем равной мощности. При бесконечно малом перемещении точки наблюдения с одной стороны исходного слоя на другую потенциал находящегося на конечном расстоянии дополнительного слоя остается практически постоянным, тогда как потенциал замкнутого слоя в целом (исходный слой *плюс* дополнительный) изменяется на $4\pi\tau$. Стало быть, скачок этот равен скачку потенциала *исходного* слоя.

Итак, *потенциал* всякого (как замкнутого, так и незамкнутого) *двойного слоя испытывает на его поверхности скачок* $4\pi\tau$; очевидно, что скачок этот направлен от отрицательной стороны слоя к положительной, т. е. что потенциал слоя возрастает при прохождении через слой по направлению положительной нормали $\mathbf{n}$. Иными словами, двойной слой является *поверхностью разрыва* сплошности *потенциала*, так что если φ_1 есть значение потенциала у отрицательной, а φ_2 — у положительной стороны слоя, то

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\tau. \tag{14.5}$$

5. Строго говоря, о скачке потенциала на поверхности разрыва можно говорить лишь в отношении бесконечно тонких двойных слоев; толщиной же реальных электрических слоев можно пренебречь лишь на достаточно больших расстояниях от них. Однако если толщина слоя мала по сравнению с требуемой точностью измерения расстояния, то в ряде случаев удобно пользоваться представлением о бесконечно тонком слое, несмотря на то, что, как указывалось на с. 67, напряженность поля на поверхностях разрыва потенциала обращается в бесконечность, т. е. теряет физический смысл. Пользуясь результатами следующего параграфа, можно, кроме того, показать (что мы предоставляем сделать читателю), что электрическая энергия двойного слоя конечной мощности в пределе, при бесконечно малой его толщине, тоже стремится к бесконечности.

Впрочем, мы в дальнейшем вовсе не будем пользоваться представлением о двойном *электрическом* слое и, соответственно этому, *будем всегда предполагать, что непрерывность электрического потенциала* φ *нигде не нарушается*. Теория же двойного электрического слоя изложена нами здесь лишь для того, чтобы подготовить изучение двойных *магнитных* слоев в гл. IV.

Заметим далее, что на каждой из заряженных поверхностей, составляющих в совокупности двойной слой, производная $\partial\varphi/\partial n$ испытывает, согласно (12.9), скачок $\pm 4\pi\sigma$. Однако скачки эти равны по величине и противоположны по знаку, так что при пе-

реходе с одной стороны слоя на другую $\partial\varphi/\partial n$, а вместе с тем и E_n остаются непрерывными.

6. Заметим, что потенциал двойного слоя может быть непосредственно определен из формулы (12.6) Если S_1 есть поверхность разрыва потенциала, то первый член правой части этой формулы

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1}(\varphi_2-\varphi_1)\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{R}\right)dS=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1}(\varphi_2-\varphi_1)\mathbf{n}\,\mathrm{grad}_q\left(\frac{1}{R}\right)dS$$

не обращается в нуль. Обозначив, согласно (14.5), скачок потенциала через $4\pi\tau$ и приняв во внимание, что

$$\mathrm{grad}_q\left(\frac{1}{R}\right)=-\mathrm{grad}_a\left(\frac{1}{R}\right),$$

мы непосредственно приходим к формуле (14.2).

7 Упомянем в заключение в качестве примера об одном случае, когда пользование понятием двойного электрического слоя может оказаться удобным. При прохождении тока через электролит при известных условиях (зависящих от материала электрода, химической природы электролита и т. д.) наблюдаются явления так называемой *поляризации электродов* (не смешивать с поляризацией диэлектриков, о которой будет идти речь в следующей главе[1]): сила проходящего через электролит тока при неизменной разности потенциалов, приложенной извне к электродам, с течением времени уменьшается и может упасть практически до нуля.

Явление это можно истолковать следующим образом. Предположим, что ионы, являющиеся носителями тока в электролите, например анионы (отрицательные ионы), подойдя к притягивающему их положительному электроду, не отдают ему своего заряда, как это бывает обычно, а лишь располагаются слоем у поверхности этого электрода Этому слою заряженных отрицательных ионов будет противостоять слой положительных зарядов на поверхности положительного электрода (рис. 21). Таким образом, у этой поверхности образуется двойной электрический слой, заряд и мощность которого будут расти до тех пор, пока скачок потенциала $\varphi_2-\varphi_1=4\pi\tau$ в этом слое не станет равным приложенной извне разности потенциалов Тогда ток через раствор прекратится, ибо все изменение потенциала будет сосредоточено лишь в тонком двойном слое у положительного электрода, во всей же остальной толще раствора потенциал примет постоянное значение и напряженность поля E станет равной нулю (электростатическое равновесие) На нижней части рис. 21 нанесены значения потенциала на различных расстояниях от электродов до образования двойного слоя (ординаты сплошной линии) и после его образования (штриховая линия).

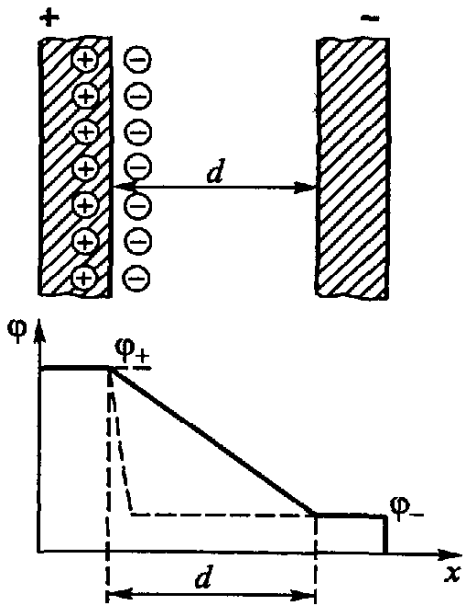

Рис. 21

Таким образом, образование двойного слоя может обусловить поляризацию электродов. Впрочем, это явление может обусловливаться также и рядом причин иного рода.

§ 15. Энергия взаимодействия электрических зарядов

1. При перемещении электрических зарядов силы кулонова взаимодействия между ними совершают определенную работу A. Очевидно, что мы должны приписать всякой системе зарядов определенную энергию взаимодействия, за счет убыли которой и совершается работа A:

$$A = -dW. \tag{15.1}$$

Энергию взаимодействия зарядов W мы часто будем называть просто электрической энергией.

2. Исходя из (15.1), подсчитаем прежде всего энергию двух точечных зарядов e_1 и e_2, находящихся на расстоянии R_{12} друг от друга. Всякое изменение взаимного расстояния зарядов сопровождается работой электрических сил. Предположим, например, что заряд e_2 остается неподвижным, тогда как заряд e_1 перемещается в поле заряда e_2 из точки P_1 в точку P_1'. Если $\varphi_1 = e_2/R_{12}$ — потенциал поля заряда e_2 в точке P_1, а $\varphi_1 + d\varphi_1$ — в точке P_1', то работа A электрических сил при этом перемещении равна $A = -e_1\, d\varphi_1$, откуда $A = -dW = -e_1\, d\varphi_1$, и, следовательно,

$$W = e_1\varphi_1 = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \tag{15.2}$$

Ввиду того, что наблюдению доступны лишь изменения энергии, а не ее абсолютная величина, мы для простоты опустили здесь аддитивную постоянную интегрирования, от взаимного расположения зарядов не зависящую (ср. сказанное о собственной энергии зарядов в конце следующего параграфа). В связи с этим единственно учитываемая нами переменная часть энергии W может принимать и отрицательные значения [1]).

К тому же выражению для W мы пришли бы, конечно, рассматривая перемещение заряда e_2 в поле неподвижного заряда e_1 или, наконец, одновременное перемещение обоих зарядов.

Обозначая через φ_2 потенциал заряда e_1 в точке, занимаемой зарядом e_2 ($\varphi_2 = e_1/R_{12}$), можно вместо (15.2) написать

$$W = \frac{e_1 e_2}{R_{12}} = e_2\varphi_2.$$

Удобнее же всего взаимную электрическую энергию зарядов e_1 и e_2 записать в симметричной форме:

$$W = \frac{1}{2}(e_1\varphi_1 + e_2\varphi_2). \tag{15.3}$$

Чтобы определить энергию системы n точечных зарядов e_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), мы, очевидно, для каждой пары этих зарядов

[1]) Если заряды e_1 и e_2 имеют противоположные знаки.

должны написать выражения типа (15.2) или (15.3) и сложить все эти выражения. Собирая затем все члены суммы, в которые входит сомножителем e_k, убедимся, что коэффициент при e_k, который мы обозначим через $\varphi_k/2$, будет равен

$$\frac{1}{2}\varphi_k = \frac{1}{2}(\varphi_{k,1} + \varphi_{k,2} + \ldots + \varphi_{k,k-1} + \varphi_{k,k+1} + \ldots + \varphi_{k,n}),$$

где $\varphi_{k,i}$ — потенциал заряда e_i в точке, занимаемой зарядом e_k.

Выражение в скобках представляет собой, очевидно, значение потенциала поля всей системы зарядов в точке, занимаемой зарядом e_k, или, вернее, потенциал всей системы зарядов, кроме самого заряда e_k (потенциал φ_{kk} заряда e_k в занимаемой им самим точке поля в выражение для φ_k не входит, да и вообще физического значения не имеет, ибо обращается в бесконечность). Итак, взаимная энергия системы n зарядов равна

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} e_k\varphi_k, \tag{15.4}$$

где φ_k — потенциал поля в точке, занимаемой зарядом e_k.

Чтобы выяснить зависимость W от взаимного расстояния зарядов, воспользуемся формулой (8.6), которая в наших теперешних обозначениях запишется следующим образом:

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{R_{ki}} \qquad (i \neq k),$$

где суммирование должно быть распространено по всем индексам i, кроме $i = k$. Внося это в (15.4), получим

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,k} \frac{e_k e_i}{R_{ki}} \qquad (i \neq k). \tag{15.5}$$

Формулу эту можно, конечно, получить и непосредственно из выражения (15.2) взаимной энергии пары зарядов. Появление же коэффициента $1/2$ перед знаком суммы объясняется тем, что в эту сумму энергия каждой пары зарядов входит дважды; так, например, в ней встретится как член e_1e_2/R_{12}, так и равный ему член e_2e_1/R_{21}.

3. Как и всегда, при пользовании представлением о точечных зарядах нужно помнить, что приведенные формулы могут применяться лишь в тех случаях, когда заряды системы отделены друг от друга расстояниями, достаточно большими по сравнению с размерами этих зарядов. Чтобы освободиться от этого ограничения, перейдем к рассмотрению объемных и поверхностных зарядов. Разлагая систему этих зарядов на совокупность элементарных зарядов $\rho\,dV$ и $\sigma\,dS$, применяя к последним формулу

(15 4) и переходя от суммирования к интегрированию, получим

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV + \frac{1}{2}\int \sigma\varphi\, dS, \tag{15.6}$$

где φ — потенциал поля всех объемных и поверхностных зарядов в элементе объема dV или на элементе поверхности dS.

Хотя и может казаться, что уравнение (15.6) представляет собой только видоизменение уравнения (15.4), соответствующее замене представления о точечных зарядах представлением о зарядах объемных и поверхностных, однако в действительности уравнения эти разнятся по своему *содержанию*. Именно, в следующем параграфе мы покажем, что формула (15.6) выражает полную энергию системы электрических зарядов, тогда как формула (15.4) не учитывает так называемой собственной энергии зарядов e_k.

Пример 1. *Энергия точечного заряда и диполя во внешнем электрическом поле.* Часто приходится рассматривать работу электрических сил при перемещениях некоторого заряда e в заданном «внешнем» поле других зарядов, остающихся при этом неподвижными. Взаимная энергия этих «внешних» зарядов (а также и собственная энергия их и заряда e — см. § 16) остается при этом неизменной; переменная же часть энергии поля, за счет которой совершается работа электрических сил, носит название энергии заряда e во внешнем поле. Она равна, очевидно,

$$W = e\varphi, \tag{15.7}$$

где φ — потенциал внешнего поля в точке, занимаемой зарядом e. Формула (15.2) представляет собой частный случай формулы (15.7).

Если во внешнем поле находятся два заряда, $e > 0$ и $e' = -e$, образующие диполь бесконечно малой длины l (см. с. 47), то энергия этих зарядов во внешнем поле равна

$$W = e\varphi + e'\varphi' = e(\varphi - \varphi'),$$

где φ и φ' — потенциалы внешнего поля в полюсах диполя. Но с точностью до величин второго порядка малости

$$\varphi = \varphi' + \frac{\partial\varphi}{\partial l}\, l = \varphi' + \mathbf{l}\operatorname{grad}\varphi = \varphi' - \mathbf{lE}.$$

Стало быть,

$$W = -e\mathbf{lE} = -\mathbf{pE}, \tag{15.8}$$

где $\mathbf{p}$ — момент диполя [см. уравнение (8.9)], а $\mathbf{E}$ — напряженность внешнего поля в месте расположения диполя. Конечно, в этом выражении не учитывается взаимная энергия зарядов диполя, которая изменяется лишь при изменении длины диполя l.

Пример 2. *Непосредственный подсчет электрической энергии заряженного конденсатора.* До зарядки конденсатора каждая из его обкладок электрически нейтральна, т. е. содержит в себе равное количество положительного и отрицательного электричества. Будем заряжать конденсатор, отнимая электричество определенного знака от одной из его обкладок и перенося его на другую. Практически это осуществляется, как известно, соединением пластин конденсатора проводом, в который включен источник ЭДС, например гальванический элемент; элемент этот перекачивает электричество из одной обкладки в другую, пока разность потенциалов обкладок не достигнет известного значения. Пусть в некоторый момент этого процесса потенциалы обкладок достигли значений φ_1 и φ_2, причем $\varphi_2 > \varphi_1$. Перенос следующей порции электричества de с первой обкладки на вторую сопровождается *отрицательной* работой сил электрического поля, равной $dA = de(\varphi_1 - \varphi_2)$ (см. § 8). Очевидно, что «внешние» по отношению к полю конденсатора ЭДС элемента преодолевающие силы этого поля совершат при этом положительную работу $dA_{\text{внш}} = -dA = de(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Воспользовавшись формулой (9.1), получаем

$$dA_{\text{внш}} = \frac{e\,de}{C},$$

где C — емкость конденсатора. Общая же работа, затраченная на доведение заряда пластин от нуля, скажем, до e', будет, очевидно, равна

$$A_{\text{внш}} = \int_{e=0}^{e=e'} \frac{e\,de}{C} = \frac{e'^2}{2C}.$$

Работа эта совершается за счет уменьшения химической энергии гальванического элемента и переходит в энергию электрического поля заряженного конденсатора. Обозначая эту последнюю энергию через W и принимая во внимание (9.1), получим ряд следующих выражений для W:

$$W = A_{\text{внш}} = \frac{e^2}{2C} = \frac{1}{2}C(\varphi_2 - \varphi_1)^2 = \frac{1}{2}e(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (15.9)$$

где штрих у e нами опущен

§ 16. Энергия электрического поля

1. Выражение электрической энергии (15.6) может быть представлено в другой математической форме, причем преобразование это открывает возможности совершенно новой *физической интерпретации* соотношений.

Чтобы подготовить это преобразование, положим в теореме Грина (52*) $\psi = \varphi$ Приняв во внимание, что $\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi = -\mathbf{E}$ и $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$, получим

$$\int_V (-\varphi \cdot 4\pi\rho + E^2)\, dV = \oint_{S+S_1'} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS,$$

где поверхностный интеграл должен быть распространен, во-первых, по поверхности S, ограничивающей извне объем интегрирования V, и во-вторых, по поверхностям S_1', выделяющим из этого объема могущие лежать в нем заряженные поверхности S_1, т. е. поверхности разрыва градиента φ (ср. § 12). Что же касается потенциала φ, то мы будем считать его всюду непрерывным, т. е. отказываемся от рассмотрения двойных электрических слоев.

Как и при выводе формулы (12.6), стягиваем поверхности S_1' вплоть до совпадения их с поверхностями разрыва S_1; повторяя прежние рассуждения и пользуясь обозначениями § 12, получим (полагая $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$)

$$\lim_{S_1'\to S_1} \oint_{S_1'} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS = \int_{S_1} \left\{ \left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 + \left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 \right\} dS =$$

$$= -\int_{S_1} \varphi \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_1 \right\} dS,$$

или ввиду (12.7)

$$\lim_{S_1'\to S_1} \oint_{S_1'} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS = 4\pi \int_{S_1} \varphi\sigma\, dS.$$

Внося это выражение в предшествующее уравнение, разделив обе его части на 8π и переставив члены, получим

$$\frac{1}{8\pi}\int_V E^2\, dV = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dV + \frac{1}{2}\int_{S_1} \sigma\varphi\, dS + \frac{1}{8\pi}\oint_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS. \qquad (16.1)$$

Первые два члена правой части этого равенства аналогичны выражению (15 6) для энергии W, однако интегрирование распространено в данном случае не по всем находящимся в поле зарядам, а лишь по тем из них, которые находятся внутри объема V. Сумма этих членов не совпадает со взаимной энергией зарядов, находящихся внутри V, ибо потенциал зависит также и от расположения зарядов вне V

2. Предположим, однако, что интегрирование распространено *по полному полю*, под этим выражением понимается, что область интегрирования V охватывает, во-первых, все взаимодействующие заряды и, во-вторых, все поле этих зарядов

Это определение не нуждается в пояснениях, если существует замкнутая поверхность S конечных размеров, охватывающая всю систему взаимодействующих зарядов, во всех точках которой напряженность поля E обращается в нуль; эта поверхность и может рассматриваться как граница полного поля Так, например, граница полного поля зарядов, заключенных в металлической оболочке (см. рис. 14), проходит внутри этой оболочки.

Однако большей частью такой замкнутой поверхности конечных размеров не существует, и граница полного поля отодвигается в бесконечность. В этих случаях понятие полного поля должно быть уточнено следующим образом. В каждом конкретном случае использования этого понятия нас интересуют значения интегралов вполне определенных физических величин (например, напряженности электрического или магнитного поля, произведения $\varphi(\partial\varphi/\partial n)$ в формуле (16.1) и т. п), причем объемные интегралы берутся по объему V полного поля, а поверхностные — по его границе S Термин «*полное поле*» применяется *к бесконечному объему* V в том и только в том случае, если при предельном переходе от конечного объема V к бесконечно большому *интегралы всех интересующих нас величин по поверхности* S *этого объема стремятся к нулю.* Так как при этом предельном переходе площадь поверхности S растет как R^2, где R означает расстояние поверхности S от конечного участка пространства, в котором сосредоточены источники поля (электрические заряды и токи), то подынтегральные выражения в интересующих нас поверхностных интегралах должны при $R \to \infty$ убывать быстрее, чем $1/R^2$. В этом и заключается условие применимости понятия полного поля (если поле не ограничено замкнутой поверхностью конечных размеров).

В дальнейшем мы для краткости будем просто говорить, что *по определению понятия полного поля интегралы по ограничивающей полное поле поверхности* S *обращаются в нуль*, т. е. могут быть отброшены, и что, стало быть, подлежат рассмотрению только интегралы по *объему* полного поля.

3. Подынтегральное выражение в последнем члене формулы (16.1), согласно (12.10), убывает в бесконечности не медленнее, чем $1/R^3$. Поэтому при распространении интегрирования в формуле (16.1) на полное поле этот член обратится в нуль, а сумма первых двух членов, согласно (15.6), окажется равной полной энергии поля W·

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV + \frac{1}{2}\int \sigma\varphi\, dS = \frac{1}{8\pi}\int E^2\, dV.$$

4. Итак, электрическая энергия полного поля равна

$$W = \frac{1}{8\pi}\int E^2\, dV. \tag{16.2}$$

С *математической* точки зрения это уравнение представляет собой лишь преобразованную форму уравнения (15.6) и ему эквивалентно. Однако формально математическое преобразование уравнений, как уже указывалось, весьма часто открывает возможность совершенно новой *физической интерпретации* выражаемых ими соотношений. Уравнение (16.2) выражает электрическую энергию в виде бесконечной суммы слагаемых, каждое из которых равно $(1/8\pi)E^2\,dV$ и относится к определенному элементу объема dV. Поэтому в это уравнение можно вложить следующий физический смысл: носителем электрической энергии является электрическое поле, причем энергия поля локализована в пространстве так, что в каждой единице объема содержится количество энергии w, равное

$$w = \frac{1}{8\pi} E^2, \tag{16.3}$$

где E — напряженность электрического поля в данном элементе объема. Величина w может быть названа *объемной плотностью электрической энергии.*

Напротив, уравнения (15.4) и (15.5) могут быть формально истолкованы в том смысле, что электрическая энергия есть энергия *взаимодействия* электрических зарядов и притом взаимодействия на расстоянии (actio in distans, *дальнодействие*); так, например, уравнение (15.5) выражает общую энергию системы зарядов в виде суммы энергий взаимодействия каждой пары. Очевидно, что при таком истолковании устраняется возможность локализации энергии в определенных участках пространства.

Механическая теория электромагнитных явлений вкладывала в уравнения (16.2) и (16.3) следующее физическое содержание. С точки зрения этой теории возбуждение электрического поля сводится к возникновению деформаций гипотетической упругой среды — эфира; электрический вектор $\mathbf{E}$ есть мера этой деформации, а энергия электрического поля есть не что иное, как упругая энергия деформированного эфира. Как известно из теории упругости, в каждом элементе объема деформированного тела заключается определенное количество упругой энергии, пропорциональное квадрату величины деформации этого элемента. Стало быть, объемная плотность упругой энергии эфира в электрическом поле должна быть пропорциональной квадрату напряженности поля $\mathbf{E}$, что вполне согласуется с (16.3).

В настоящее время можно считать установленным, что подобное механическое истолкование электрических явлений не выдерживает критики фактов [1]. Но представление о локализации

[1] Больше того, не только электрические силы не сводятся к упругости гипотетической среды, но, как мы теперь знаем, самые упругие свойства материальных тел объясняются электрическим взаимодействием атомов этих тел.

электрической энергии в пространстве с объемной плотностью w, иными словами, представление о том, что электрическая энергия есть энергия электрического поля, сделалось прочным достоянием науки. Конечно, благодаря полной математической эквивалентности уравнений (15.6) и (16.2) оба эти уравнения, а стало быть, и оба приведенных истолкования их одинаково хорошо согласуются с данными опыта. Однако эквивалентность этих уравнений имеет место лишь в *постоянном* электрическом поле. Перейдя к изучению переменных электромагнитных полей и, в частности, к изучению электромагнитных волн, мы познакомимся с явлениями, которые могут быть истолкованы лишь на основе допущения о локализации энергии в электромагнитном поле.

5. Обратимся теперь к вопросу о различном содержании уравнений (15.4) и (15.5), с одной стороны, и уравнений (15.6) и (16.2) — с другой. Что эти уравнения разнятся по своему содержанию, явствует хотя бы из того обстоятельства, что энергия W, определяемая уравнением (16.2), не может принимать отрицательных значений (ибо $E^2 > 0$), тогда как, согласно (15.5), энергия взаимодействия двух точечных зарядов $e_1 e_2 / R_{12}$ отрицательна, если заряды эти разноименны. Объясняется это тем, что в уравнениях (15.4) и (15.5) учитывается лишь взаимодействие ряда «точечных» зарядов, но не *взаимодействие отдельных элементов* каждого такого *заряда между собой*. Действительно, если мы имеем дело, например, с одним-единственным «точечным» зарядом e_1, то выражения (15.4) и (15.5) обратятся в нуль, тогда как выражения (15.6) и (16.2) будут иметь отличное от нуля и притом положительное значение, равное так называемой *собственной энергии* заряда e_1. В том, что эта собственная энергия всегда положительна, можно убедиться либо непосредственно из уравнения (16.2), либо из того обстоятельства, что, приписывая заряду e некоторый объем, разбивая его на элементы de_i и вычисляя энергию взаимодействия этих элементов, мы получим сумму положительных выражений типа $de_i\, de_k / R_{ik}$ (ибо все элементы одного и того же заряда имеют одинаковый знак). Собственная энергия заряда зависит, конечно, от его размеров и равна той работе, которую совершили бы силы взаимного отталкивания между элементами заряда, если бы эти элементы разлетелись в стороны и удалились в бесконечность.

Рассмотрим в заключение полную (т. е. собственную и взаимную) энергию двух зарядов e_1 и e_2. Пусть каждый из этих зарядов в отдельности возбуждает соответственно поле $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, так что результирующее поле $\mathbf{E}$ обоих зарядов равно

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

и

$$\mathbf{E}^2 = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2).$$

Полная энергия зарядов e_1 и e_2, согласно (16.2), будет равна

$$W = \frac{1}{8\pi}\int E^2\,dV = \frac{1}{8\pi}\int E_1^2\,dV + \frac{1}{8\pi}\int E_2^2\,dV + \frac{1}{8\pi}\int 2(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2)\,dV,$$

или

$$W = W_{11} + W_{22} + W_{12}, \tag{16.4}$$

где

$$W_{11} = \frac{1}{8\pi}\int E_1^2\,dV \quad \text{и} \quad W_{22} = \frac{1}{8\pi}\int E_2^2\,dV \tag{16.5}$$

суть собственные энергии зарядов e_1 и e_2, а

$$W_{12} = \frac{1}{8\pi}\int 2(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2)\,dV \tag{16.6}$$

есть их взаимная энергия. Из

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)^2 \geqslant 0$$

следует, что

$$E_1^2 + E_2^2 \geqslant 2(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2),$$

так что

$$W_{11} + W_{22} \geqslant W_{12}.$$

Таким образом, положительная собственная энергия зарядов всегда больше (или в крайнем случае равна) их взаимной энергии, могущей иметь как положительные, так и отрицательные значения.

Справедливость этого положения явствует, впрочем, и непосредственно из того обстоятельства, что собственная энергия заряда соответствует взаимодействию его собственных элементов, среднее расстояние которых друг от друга меньше, чем расстояние их от элементов другого заряда.

При всех возможных перемещениях зарядов, не изменяющих их формы и размеров, собственная энергия зарядов остается постоянной. Поэтому при этих перемещениях члены W_{11} и W_{22} можно считать аддитивными постоянными в выражении полной энергии W, изменение которой всецело определяется изменением взаимной энергии зарядов W_{12}. При достаточно больших расстояниях между зарядами выражение (16.6) для W_{12} сводится, очевидно, к выражению (15.2) (см. задачу 15 в конце параграфа).

6. Чрезвычайно важно отметить, что *энергия* электрического поля *не обладает свойством аддитивности*, т. е. что энергия поля $\mathbf{E}$, являющегося суммой полей $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, вообще говоря, не равна сумме энергий слагаемых полей (если только W_{12} не равно нулю). В частности, при возрастании напряженности поля в n раз энергия поля возрастает в n^2 раз.

Пример. *Полная электрическая энергия системы заряженных проводников.* Пусть в поле расположено n проводников;

обозначим соответственно через S_i, φ_i и e_i поверхность, потенциал и общий заряд i-го проводника. Приняв во внимание, что все заряды проводников расположены на их поверхности, так что $\rho = 0$, и что потенциал каждого проводника постоянен на всем его протяжении, получим из (15.6)

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\oint_{S_i}\sigma\varphi\,dS = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\oint_{S_i}\sigma\,dS.$$

Интеграл σ по поверхности проводника равен его общему заряду e_i, поэтому

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i\varphi_i. \tag{16.7}$$

Эту формулу, выражающую *полную* энергию *заряженных проводников*, не нужно смешивать с вполне аналогичной формулой (15.4), выражающей *взаимную* энергию *точечных зарядов*; в последней формуле в отличие от (16.7) φ_i не является полным потенциалом поля в месте нахождения заряда e_i (см. § 15). Заметим, что выражение (15.9) для энергии конденсатора является частным случаем формулы (16.7) [1].

З а д а ч а 14. Показать, что (собственная) электрическая энергия заряженного шара радиуса a равна

$$W = \frac{e^2}{2a},$$

если заряд e распределен по поверхности шара (проводник), и равна

$$W = \frac{3e^2}{5a},$$

если заряд равномерно распределен по всему объему шара.

З а д а ч а 15. Показать, что если расстояние между зарядами e_1 и e_2 достаточно велико по сравнению с их размерами (точечные заряды), то выражение (16.6) взаимной энергии W_{12} этих зарядов сводится к выражениям (15.2) и (15.3).

§ 17. Пондеромоторные силы

1. По данному в § 2 определению, основная величина, характеризующая электрическое поле, — его напряженность $\mathbf{E}$ — равна рассчитанной на единицу заряда пондеромоторной (механиче-

[1]) Предлагаем читателю в качестве упражнения непосредственным вычислением убедиться на конкретных примерах плоского, цилиндрического и шарового конденсаторов в тождестве значений энергии, получаемых по формуле (15.9), с одной стороны, и по формуле (16 2) — с другой.

ской) силе, действующей в данной точке поля на пробный заряд (заряженное тело). При этом нужно, конечно, иметь в виду, что сила, действующая на какой-либо заряд, определяется, очевидно, напряженностью того поля, в которое помещен этот заряд, а не того поля, которое возбуждается им самим. Следовательно, говоря, например, что сила, действующая на точечный заряд e, равна

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} \tag{17.1}$$

[ср. уравнение (2.2)], мы должны понимать под $\mathbf{E}$ напряженность поля, возбуждаемого всеми зарядами системы, *кроме* самого заряда e.

2. Вопрос о силе, действующей на *поверхностные заряды*, требует специального исследования, ибо напряженность поля $\mathbf{E}$ имеет по обе стороны заряженной поверхности различные значения [уравнение (4.3)], и, стало быть, на самой поверхности остается неопределенной.

В случае одного-единственного уединенного проводника все электрические силы сводятся ко взаимному отталкиванию элементов заряда этого проводника. Ввиду того, что взаимно отталкивающиеся элементы заряда не могут покинуть проводника, к поверхности проводника будут приложены пондеромоторные силы, стремящиеся ее растянуть [1]). Подобного же рода силы будут, очевидно, приложены и к поверхности неуединенного проводника, помещенного в произвольное электростатическое поле. Чтобы определить эти силы, рассмотрим некоторый элемент dS поверхности проводника. Напряженность поля с *внешней стороны* элемента dS, согласно (7.8), равна

$$\mathbf{E} = 4\pi\sigma\mathbf{n}$$

(σ — плотность его заряда), и направлена нормально к его поверхности; внутри же проводника $\mathbf{E} = 0$.

Однако $\mathbf{E}$ есть напряженность результирующего поля всех имеющихся зарядов, в том числе и заряда самого элемента dS:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}'',$$

где $\mathbf{E}'$ — поле элемента dS, а $\mathbf{E}''$ — поле остальных зарядов. В двух смежных точках, лежащих по разные стороны элемента dS, поле $\mathbf{E}''$ этих зарядов будет, очевидно, одинаковым, поле же $\mathbf{E}'$ будет иметь одинаковое значение E', но различное направление (рис. 22). Стало быть, с внешней стороны элемента dS $E = E' + E'' = 4\pi\sigma$, а с внутренней $E = E' - E'' = 0$, откуда

$$E' = E'' = 2\pi\sigma.$$

[1]) Если сообщить электрический заряд мыльному пузырю, то под влиянием этих сил отталкивания пузырь будет расширяться до тех пор, пока они не уравновесятся силами поверхностного натяжения и разницей давлений воздуха внутри и вне пузыря.

Сила, испытываемая зарядом $\sigma\, dS$ элемента dS, определяется полем $\mathbf{E}''$ зарядов, лежащих вне этого элемента, и, стало быть, равна

$$E''\sigma\, dS = 2\pi\sigma^2\, dS = \frac{1}{2} E\sigma\, dS.$$

Таким образом, на единицу поверхности проводника действует пондеромоторная сила f:

$$f = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{2} E\sigma = \frac{1}{8\pi} E^2, \quad (17.2)$$

направленная, как легко убедиться, по внешней нормали к этой поверхности. Величину f можно, очевидно, назвать *поверхностной плотностью пондеромоторных сил.*

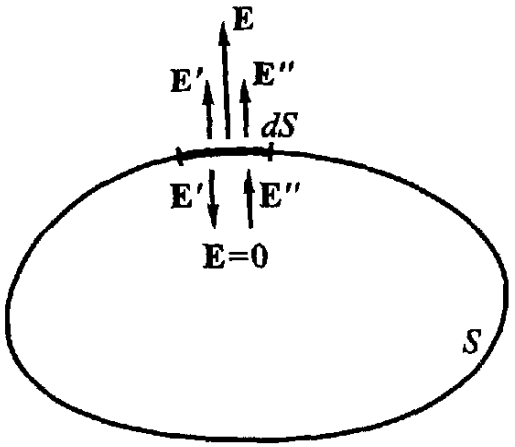

Рис. 22

3. Рассмотрим для полноты случай объемного распределения заряда с плотностью ρ, хотя в электростатическом поле в отсутствие диэлектриков этот случай практически неосуществим [1]. Если электрический заряд неразрывно связан с элементом dV объема некоторого тела так, что перемещение заряда $\rho\, dV$ возможно лишь при соответствующем перемещении элемента тела dV и наоборот, то на каждый элемент этого тела будет действовать сила

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}\, dV = \mathbf{E}\rho\, dV, \quad (17.3)$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность поля в элементе dV. Вычитать из полного поля $\mathbf{E}$ поле заряда самого элемента dV в этом случае не нужно, ибо напряженность поля бесконечно малого объемного заряда $\rho\, dV$ бесконечно мала даже внутри самого заряда и стремится к нулю при беспредельном уменьшении его размеров. Проще всего убедиться в этом, приняв для простоты, что элемент dV имеет форму шара, так что поле его определяется формулой (4.8).

Из (17.3) следует, что *объемная плотность* пондеромоторных сил равна [2]

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E}. \quad (17.4)$$

Пример. *Силы, действующие на диполь.*

Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}'$ — напряженности внешнего (по отношению к диполю) поля в точках P и P', занимаемых соответственно его

[1] За исключением неоднородных проводников, внутри которых действуют сторонние электродвижущие силы (§ 38); на этом случае мы останавливаться не будем.

[2] В дальнейшем плотность сил мы будем всегда обозначать через малое $\mathbf{f}$, сохраняя $\mathbf{F}$ прописное для обозначения сил, действующих на отдельный заряд, диполь, проводник и т. д.

отрицательным и положительным зарядами (рис. 23). Тогда равнодействующая $\mathbf{F}$ сил поля, приложенных к этим зарядам, будет равна

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}' - e\mathbf{E} = e(\mathbf{E}' - \mathbf{E}).$$

Разность $\mathbf{E}' - \mathbf{E}$ есть приращение вектора $\mathbf{E}$ на отрезке PP', равном длине диполя $\mathbf{l}$. Ввиду малости этого отрезка приращение это может быть выражено, согласно (51*), формулой

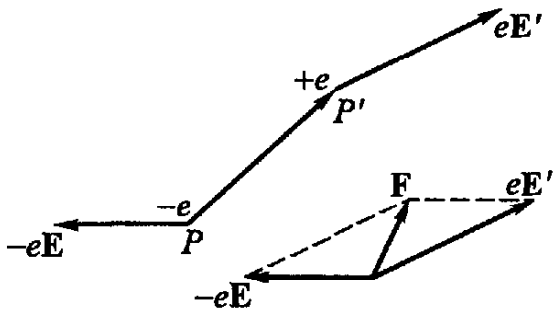

Рис 23

$$\mathbf{E}' - \mathbf{E} = l\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l} = \mathbf{l}\nabla \cdot \mathbf{E},$$

откуда

$$\mathbf{F} = e\mathbf{l}\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{p}\nabla \cdot \mathbf{E}. \qquad (17.5)$$

Таким образом, сила $\mathbf{F}$, действующая в электрическом поле на диполь, зависит от быстроты изменения этого поля в направлении оси диполя; в однородном же поле силы, действующие на полюсы диполя, равны по величине и противоположны по направлению и, стало быть, взаимно уравновешиваются.

Помимо равнодействующей $\mathbf{F}$ для полного определения сил, действующих на диполь, необходимо определить момент $\mathbf{N}$ этих сил относительно центра диполя. Момент их относительно точки P, в которой находится заряд $-e$, равен, очевидно,

$$\mathbf{N} = [\mathbf{l} \cdot e\mathbf{E}'] = [\mathbf{p}\mathbf{E}'].$$

В пределе при достаточной малости $\mathbf{l}$ точка P совпадает с центром диполя, а $\mathbf{E}'$ совпадает с $\mathbf{E}$, так что окончательно

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}\mathbf{E}]. \qquad (17.6)$$

Из этого выражения следует, что диполь стремится повернуться в электрическом поле так, чтобы его момент $\mathbf{p}$ был параллелен полю. При $\mathbf{p}$, направленном против $\mathbf{E}$, вращающий момент также равен нулю, но это равновесие неустойчиво.

§ 18. Определение пондеромоторных сил из выражения энергии

1. Перемещение тел в электрическом поле сопровождается, вообще говоря, как изменением энергии W этого поля, так и работой A пондеромоторных сил поля. Если при этом не происходит преобразования других форм энергии (тепловой, химической и т. д), то работа пондеромоторных сил должна, очевидно, совершаться за счет изменения δW энергии поля, так что

$$A = -\delta W. \qquad (18.1)$$

Исходя из этого соотношения, мы определили в § 15 энергию поля W (15.1); обратно, зная W, мы на основании (18.1) можем определить работу A, а стало быть, и совершающие эту работу пондеромоторные силы.

Действительно, формула (18.1) показывает, что энергия электрического поля W играет роль *потенциальной* энергии в смысле аналитической механики, методами которой мы и можем воспользоваться. Пусть энергия W в самом общем случае выражена в зависимости от каких-либо «обобщенных координат» q_i, характеризующих распределение зарядов, проводников и т. п. Тогда

$$\delta W = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i}\delta q_i \quad \text{и} \quad A = \sum_i \Theta_i \delta q_i, \tag{18.2}$$

где Θ_i, по терминологии аналитической механики, суть «обобщенные силы», действующие «по направлению» координат q_i. Отсюда на основании (18.1) при условии независимости координат q_i следует, что

$$\Theta_i = -\frac{\partial W}{\partial q_i}. \tag{18.3}$$

Весьма часто определение пондеромоторных сил на основании этой формулы оказывается несравненно более простым, чем непосредственное определение их по формулам § 17 путем интегрирования по отдельным элементам зарядов.

2. В качестве простейшего примера определим этим способом силы взаимного притяжения пластин плоского конденсатора. Энергия этого конденсатора равна [см. уравнение (15.9) и результаты решения задачи 8, с. 52]:

$$W = \frac{e^2}{2C} = \frac{2\pi e^2 d}{S}.$$

При раздвигании пластин, т. е. при увеличении расстояния d между ними, полем совершается работа

$$A = -\delta W = -\frac{2\pi e^2}{S}\delta d.$$

С другой стороны, если f есть сила притяжения, испытываемая единицей поверхности пластины конденсатора, а F — общая сила, действующая на всю поверхность пластины S, то

$$A = -F \cdot \delta d = -fS \cdot \delta d.$$

Приравнивая полученные выражения, найдем

$$F = fS = \frac{2\pi e^2}{S} = 2\pi\sigma^2 S,$$

где $\sigma = e/S$ — плотность заряда на поверхности пластин, что вполне согласуется с (17.2).

К тому же результату можно прийти и непосредственно из (18.3), полагая в этой формуле $q = d$ и $\Theta = F$.

3. Выше мы неявным образом предполагали, что при смещении пластин конденсатора *заряд* их e остается постоянным. Мы получили бы совершенно иное значение δW, предположив, что не заряд, а *разность потенциалов* пластин конденсатора $\varphi_2 - \varphi_1$ остается постоянной при их смещении. Объясняется это тем, что разность потенциалов обкладок конденсатора может оставаться неизменной при перемещениях этих обкладок (изменения емкости) *лишь в том случае*, если эта разность потенциалов поддерживается неизменной некоторыми *сторонними* ЭДС неэлектростатического происхождения (см. § 38), совершающими при изменении C некоторую добавочную работу. (Это имеет, например, место при присоединении обкладок конденсатора к полюсам гальванического элемента.) При этом формула (18.1), очевидно, перестает быть применимой.

На основании (15.9) и (9.1) для конденсатора любой формы имеем: при $e = \text{const}$

$$\delta_e W = \delta\left(\frac{e^2}{2C}\right) = -\frac{e^2}{2C^2}\,\delta C = -\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \delta C,$$

при $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$

$$\delta_\varphi W = \delta\left\{\frac{1}{2}C(\varphi_2 - \varphi_1)^2\right\} = \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \delta C,$$

т. е.

$$\delta_\varphi W = -\delta_e W = A. \tag{18.4}$$

Таким образом, сопровождающие перемещение обкладок конденсатора изменения его электрической энергии при $e = \text{const}$ и при $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$ равны по величине, но противоположны по знаку. С другой стороны, ввиду соотношения

$$e = (\varphi_2 - \varphi_1)C,$$

изменение емкости C при постоянном $\varphi_2 - \varphi_1$ должно сопровождаться изменением заряда конденсатора e

$$\delta e = (\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta C,$$

т. е. перенесением заряда δe с одной из обкладок конденсатора на другую. При прохождении этого заряда δe через включенный между обкладками конденсатора гальванический элемент химическая энергия этого элемента, как мы увидим в гл. III, уменьшается, а ЭДС элемента $\mathscr{E}$ совершает работу $P = \mathscr{E} \cdot \delta e$.

В разомкнутой цепи, состоящей из элемента и конденсатора,

$$\mathscr{E} = \varphi_2 - \varphi_1$$

и, стало быть,

$$P = (\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta e = (\varphi_2 - \varphi_1)^2\,\delta C,$$

или ввиду (18.4):

$$P = 2\delta_\varphi W = A + \delta_\varphi W. \tag{18.5}$$

Таким образом, при $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$ работа A пондеромоторных сил поля совершается не за счет энергии поля W, а за счет химической энергии

гальванического элемента (или энергии другого источника сторонней ЭДС). В частности, *положительная* работа сил поля A сопровождается *приращением* электрической энергии W, происходящим также за счет энергии гальванического элемента.

Таким образом, формула (18.1) справедлива лишь при условии, что перемещение тел в электрическом поле не сопровождается работой сторонних ЭДС неэлектростатического происхождения. Кроме того, условием применимости формулы (18.1) является, очевидно, *достаточная медленность перемещения тел*, а именно столь малая скорость перемещения, чтобы в каждый данный момент процесса электрическое состояние системы могло быть описано уравнениями электростатики (т. е. бесконечно мало отличалось от равновесного).

Пример. *Определить силы, действующие на твердый диполь, исходя из его энергии во внешнем поле.* Энергия диполя во внешнем поле, согласно (15.8), равна

$$W = -\mathbf{pE} = -pE\cos\vartheta$$

и является функцией: а) координат центра диполя x, y, z и б) угла ϑ между осью диполя и заданным направлением электрического поля $\mathbf{E}$ (числовое значение момента диполя считаем неизменным: «твердый» диполь). Согласно известным положениям аналитической механики «обобщенные силы», соответствующие этим обобщенным координатам, представляют собой не что иное, как

а) равнодействующую приложенных к диполю сил:

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial W}{\partial z}; \tag{18.6}$$

б) момент приложенных к диполю сил:

$$N = -\frac{\partial W}{\partial \vartheta}, \tag{18.7}$$

стремящийся увеличить угол ϑ.

Из (15.8) и (18.6) следует, что

$$\mathbf{F} = -\nabla W = \nabla(\mathbf{pE}). \tag{18.8}$$

Это выражение в случае *электростатического* поля, которым мы здесь только и ограничимся, лишь по своей форме отличается от ранее выведенного выражения (17.5):

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}\nabla \cdot \mathbf{E}.$$

Действительно, для всякого постоянного (не зависящего от координат x, y, z) вектора $\mathbf{p}$ имеет место соотношение

$$\nabla(\mathbf{pE}) = \mathbf{p}\nabla \cdot \mathbf{E} + [\mathbf{p}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}]. \tag{18.9}$$

Чтобы доказать это соотношение, достаточно рассмотреть слагающую вектора $\nabla(\mathbf{pE}) - \mathbf{p}\nabla \cdot \mathbf{E}$ хотя бы по оси x:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{pE}) - \mathbf{p}\nabla \cdot E_x =$$

$$= p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x} - \left(p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) =$$

$$= p_y \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + p_z \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) =$$

$$= p_y \operatorname{rot}_z E - p_z \operatorname{rot}_y E = [\mathbf{p} \operatorname{rot} \mathbf{E}]_x.$$

В интересующем нас случае электростатического поля вектор $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, и поэтому его ротор, как ротор всякого градиента скаляра, равен нулю: $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ [уравнение (7.6)].

Таким образом, в электростатическом поле действительно

$$\nabla(\mathbf{pE}) = \mathbf{p}\nabla \cdot \mathbf{E} \qquad (18.10)$$

и формула (18.8) эквивалентна формуле (17.5).

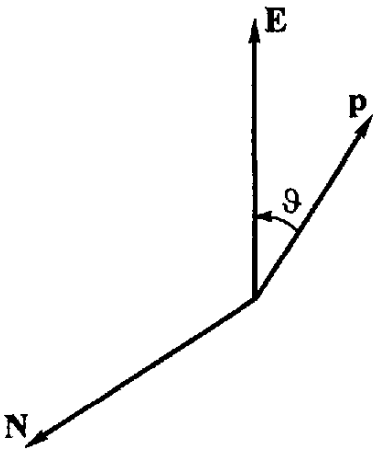

Рис. 24

Обращаясь к моменту сил, приложенных к диполю, получаем из (15.8) и (18.7):

$$N = -\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = -pE \sin \vartheta.$$

Ввиду того, что $\vartheta \leqslant \pi$, правая часть этого выражения отрицательна, и, стало быть, согласно смыслу формулы (18.7), момент $\mathbf{N}$ стремится уменьшить угол ϑ между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$ (рис. 24). Следовательно, по величине и направлению вектор момента сил определяется формулой

$$\mathbf{N} = [\mathbf{pE}], \qquad (18.11)$$

совпадающей с ранее выведенной нами формулой (17.6).

§ 19. Неустойчивость электрических систем. Связи

1. Для электрической теории строения материи чрезвычайную важность представляет вопрос о возможности *устойчивых* конфигураций электрических зарядов. Если материя состоит из электрических зарядов — электронов и протонов, то возникает вопрос, может ли система таких зарядов находиться в устойчивом *статическом* равновесии или же в атомах и молекулах всех тел заряды эти должны находиться в состоянии непрерывного *движения*?

Для наших целей достаточно будет доказать неустойчивость статической системы *точечных* зарядов, хотя соответствующие положения применимы и к зарядам объемным [1].

Как указывалось в § 18, электрическая энергия W системы зарядов играет роль *потенциальной* энергии этой системы. С другой стороны, на основании общих положений механики условием *устойчивого* равновесия является *минимум* потенциальной энергии: стало быть, в данном случае минимум электрической энергии W. Энергия системы точечных зарядов, согласно (15.5), равна

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{e_i e_k}{R_{ik}} \qquad (i \neq k)$$

и является функцией координат x_i, y_i, z_i всех зарядов системы e_i, так как

$$R_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}.$$

Для того чтобы при соответствующих значениях координат x_i, y_i, z_i функция W обладала минимумом, необходимо, во-первых, чтобы первые производные W по всем координатам всех зарядов обращались в нуль и, во-вторых, чтобы вторые производные от W по координатам x_h, y_h, z_h были положительны [2]:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_h^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y_h^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z_h^2} > 0 \quad \text{для любого } h.$$

Но

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_h^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y_h^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z_h^2} = \nabla_h^2 W = \frac{1}{2}\sum_{i,k} e_i e_k \nabla_h^2\left(\frac{1}{R_{ik}}\right) \qquad (i \neq k),$$

где ∇_h означает дифференциальный оператор, соответствующий пространственному дифференцированию по координатам x_h, y_h, z_h заряда e_h:

$$\nabla_h = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_h} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y_h} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z_h}.$$

Очевидно, что при $h \neq i$ и $h \neq k$

$$\nabla_h^2\left(\frac{1}{R_{ik}}\right) = 0;$$

[1] Для того чтобы объяснить устойчивость самих электронов и протонов, долгое время допускалось существование сил неэлектрического происхождения, препятствующих разлетанию элементов этих зарядов под влиянием взаимного отталкивания. Развитие квантовой теории привело к новой формулировке проблемы элементарных частиц, в которой вопрос об устойчивости этих частиц ставится совсем по-иному.

[2] Условия, которым должны удовлетворять производные типа $\partial^2 W/\partial x_i \partial x_k$ и $\partial^2 W/\partial x_i \partial y_i$, нас здесь не интересуют.

если $h = i$ либо $h = k$, то это соотношение все же остается справедливым ввиду (11.10). А раз так, то

$$\nabla_h^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x_h^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y_h^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z_h^2} = 0.$$

Таким образом, требование, чтобы все вторые производные W по координатам были положительными, невыполнимо; энергия W не может обладать минимумом и, стало быть, *устойчивая статическая конфигурация электрических зарядов невозможна*. Это положение носит название *теоремы Ирншоу* [1].

Физический смысл этой теоремы станет ясным, если мы вспомним, что разноименные заряды притягиваются с возрастающей силой вплоть до совпадения друг с другом, т. е. вплоть до взаимной нейтрализации или уничтожения, одноименные же отталкиваются вплоть до удаления в бесконечность.

В виде иллюстрации теоремы Ирншоу рассмотрим простейший пример. Система трех зарядов

$$e_1 = -4e, \quad e_2 = e, \quad e_3 = -4e,$$

как легко убедиться, будет находиться в статическом равновесии, если заряды расположены на одной прямой в указанном порядке и если расстояние между e_1 и e_2 равно расстоянию между e_2 и e_3. Однако при малейшем сдвиге, например, заряда e_1 в сторону e_2 испытываемое им со стороны e_2 притяжение возрастает больше, чем отталкивание со стороны e_3, и, таким образом, действующие на e_1 (и на остальные заряды) силы уже не будут уравновешиваться, заряды e_1 и e_2 притянутся друг к другу, а e_3 отлетит в сторону, в бесконечность.

2. Можно считать установленным экспериментально, что расстояние между частицами электричества (электронами и положительными ядрами) [2], входящими в состав атомов материальных тел, весьма велико (порядка 10^{-8} см) по сравнению с размерами самих частиц (не свыше 10^{-12} см). Поэтому каждый атом можно считать системой точечных зарядов, к которой применима

[1] Возможность минимума функции W при конфигурации зарядов, при которой все $n(18n^2 + 9n + 11)/2$ производных W первого, второго и третьего порядков по всем $3n$ координатам (где n — число зарядов) обращаются в нуль, а производные четвертого порядка положительны, соответствовала бы наложению на функцию $3n$ переменных по крайней мере $n(18n^2 + 9n + 11)/2$ условий. Так как число условий превышает число переменных, то возможность эта неосуществима. Отметим также, что приведенное доказательство теоремы Ирншоу предполагает, что все расстояния R_{ik} между любой парой зарядов остаются конечными.

[2] В сущности, ядра атомов (за исключением ядра водорода) состоят в свою очередь из нескольких протонов и нейтронов; однако ввиду малости размеров этих ядер (не свыше 10^{-12} см) каждое такое сложное ядро в целом можно рассматривать как одну электрическую частицу.

приведенная формулировка теоремы Ирншоу. Так как, с другой стороны, атомы химических элементов представляют собой, несомненно, устойчивые системы, то, следовательно, *построение материи из электрических частиц в пределах электростатики невозможно, и атом должен представлять собой динамическую систему* [1]. Соответствующее этому выводу представление об устойчивом периодическом (или квазипериодическом) движении электрических частиц в недрах атомов лежит в основе современной теории материи и находит себе подтверждение в целом ряде физических явлений. Правда, представление это приводит в пределах классической физики к внутренним противоречиям, ибо ускоренное движение электрических зарядов, согласно законам электродинамики, неразрывно связано с излучением электромагнитной энергии (волн), т. е. не может быть устойчивым. Однако это противоречие повело не к отказу от динамической модели атома, а к отказу от классической механики и электродинамики в пользу устраняющей это противоречие квантовой механики.

3. Обратимся к макроскопической теории электростатических явлений, составляющей основной предмет изложения настоящей главы. Согласно теореме Ирншоу, чисто электростатические системы не могут быть устойчивыми.

Чтобы избежать, однако, рассмотрения скрытого движения элементарных зарядов, макроскопическая электростатическая теория пользуется формальным представлением о добавочных силах или *связях неэлектростатического происхождения*, обеспечивающих требуемую устойчивость заряженных систем.

В этом отношении существует полная аналогия электростатики с механикой, широко пользующейся представлениями о связях, осуществляемых с помощью опор, закрепленных осей, нерастяжимых нитей и т. д. Конечно, подобно тому как при дальнейшем изложении механики раскрывается физический механизм связей (силы упругости), так и перед дальнейшим развитием теории электричества встает задача раскрыть физический смысл формально введенных сил связи неэлектростатического происхождения.

В пределах электростатики достаточно близкое первое приближение к действительности может быть достигнуто введением в рассмотрение двух основных родов связей, соответствующих, во-первых, *идеальным проводникам* и, во-вторых, *идеальным диэлектрикам*. Что касается проводников, то, явно не упоминая

[1]) Доказательство теоремы Ирншоу основывается, в сущности, лишь на обратной пропорциональности квадрату расстояния сил взаимодействия между точками системы, так что эта теорема применима и к материальным точкам, тяготеющим по закону Ньютона (Солнечная система). Устойчивость Солнечной системы также обеспечивается лишь *движением* планет.

об этом, мы фактически пользовались везде выше допущением, что на поверхности проводников существуют некоторые силы неэлектростатического происхождения, препятствующие выходу зарядов за поверхность проводника. Действительно, только эти силы обеспечивают устойчивость системы заряженных проводников; в противном случае наличие, например, уединенного заряженного проводника было бы невозможным, — элементы его заряда под влиянием взаимного отталкивания разлетелись бы в стороны и удалились в бесконечность. Пользуясь терминологией механики, мы можем назвать эти сдерживающие силы реакциями связей. Они должны быть, очевидно, равны по величине и противоположны по направлению пондеромоторным силам, действующим на поверхность проводника, плотность которых, согласно (17.2), равна $\frac{1}{8\pi} E^2$.

Свойствам диэлектриков будет посвящена следующая глава. О связях в диэлектриках см., в частности, § 27.

ГЛАВА II

ДИЭЛЕКТРИКИ

§ 20. Диэлектрики. Электрический момент и потенциал нейтральной молекулы. Поляризация диэлектрика

1. Диэлектрики — непроводники электричества [1]; в них в отличие от металлов и электролитов нет зарядов, могущих перемещаться на значительные расстояния и переносить ток.

Диэлектрики построены либо из нейтральных молекул (все газообразные и жидкие диэлектрики и часть твердых), либо из заряженных ионов, закрепленных в определенных положениях равновесия (например в узлах кристаллической решетки). Ионные кристаллические решетки могут быть разбиты на так называемые элементарные ячейки, каждая из которых содержит равное количество положительных и отрицательных зарядов и в целом нейтральна. В дальнейшем в ряде случаев для определенности мы будем предполагать, что диэлектрик построен из нейтральных молекул; однако основные положения излагаемой теории применимы и к ионным кристаллическим и аморфным диэлектрикам, причем только под молекулой надо в этих случаях понимать, например, элементарную ячейку кристалла.

Под воздействием внешнего электрического поля [2] заряды, входящие в состав диэлектрика, не срываются полем со своих мест, а лишь несколько смещаются из положений равновесия в некоторые новые равновесные положения.

Равнодействующая электрических сил, действующих на нейтральную молекулу в *однородном* ($\mathbf{E} = \text{const}$) электрическом поле, очевидно, равна нулю; поэтому центр тяжести молекулы диэлектрика в однородном поле остается неподвижным. Однако электрические частицы противоположных знаков, входящие в состав молекул диэлектрика, должны под воздействием сил поля смещаться в противоположные стороны — молекула деформируется. Поэтому, чтобы определить воздействие поля на ди-

[1]) В сущности все диэлектрики обладают некоторой, хотя и весьма малой, проводимостью, так что понятие идеального непроводника является лишь первым приближением к действительности

[2]) Если только напряженность его не слишком велика (иначе может, например, произойти пробой диэлектрика).

электрик, нужно прежде всего найти удобную количественную характеристику распределения зарядов в нейтральной молекуле.

2. Такой характеристикой любой, в целом нейтральной, системы зарядов может служить вектор электрического момента этой системы $\mathbf{p}$, определяемый равенством

$$\mathbf{p} = \sum_i e_i \mathbf{R}_i, \tag{20.1}$$

где суммирование распространено по всем элементарным зарядам (электронам и ядрам), входящим в состав системы, а $\mathbf{R}_i$ есть радиус-вектор, проведенный к заряду e_i из некоторой произвольной начальной точки O. При этом предполагается, что система зарядов электрически нейтральна, т. е. что

$$\sum_i e_i = 0, \tag{20.2}$$

ибо лишь при этом условии вектор $\mathbf{p}$ однозначно определяется распределением зарядов и не зависит от выбора начальной точки O.

Действительно, если переместить начало отсчета из O в O' на произвольный отрезок $\mathbf{a}$ (рис. 25), то новый радиус-вектор $\mathbf{R}'_i$ заряда e_i определится разностью $\mathbf{R}'_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{a}$ и, следовательно, вместо (20.1) получим

$$\mathbf{p} = \sum_i e_i \mathbf{R}'_i = \sum_i e_i \mathbf{R}_i - \mathbf{a} \sum_i e_i,$$

что при условии (20.2) совпадает с (20.1).

В случае, если система состоит из двух равных и противоположных зарядов $\pm e$ (рис. 26), радиусы-векторы которых равны $\mathbf{R}_+$ и $\mathbf{R}_-$, момент системы равен, очевидно,

$$\mathbf{p} = \sum_i e_i \mathbf{R}_i = e(\mathbf{R}_+ - \mathbf{R}_-) = e\mathbf{l},$$

где $\mathbf{l} = \mathbf{R}_+ - \mathbf{R}_-$ есть вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному. Таким образом, в этом частном случае из (20.1) вытекает известное уже нам из (8.9) определение момента диполя.

3. Важность понятия электрического момента системы зарядов обусловливается тем, что потенциал φ поля, возбуждаемого произвольной, в целом нейтральной системой зарядов момента $\mathbf{p}$ на расстояниях, больших по сравнению с размерами этой системы, совпадает с потенциалом диполя того же момента $\mathbf{p}$.

Действительно, потенциал системы зарядов e_i в произвольной точке поля P равен

$$\varphi = \sum_i \frac{e_i}{R'_i},$$

где $\mathbf{R}'_i$ — расстояние этой точки P от заряда e_i. Выберем в области расположения зарядов e_i произвольную точку O, которую будем условно называть центром системы, и пусть $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_i$ суть,

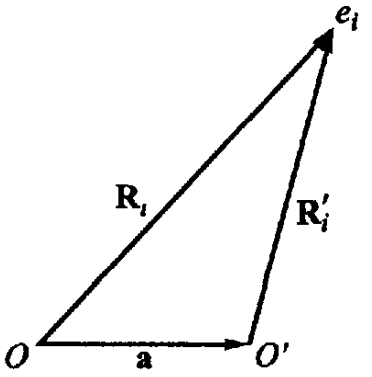

Рис 25

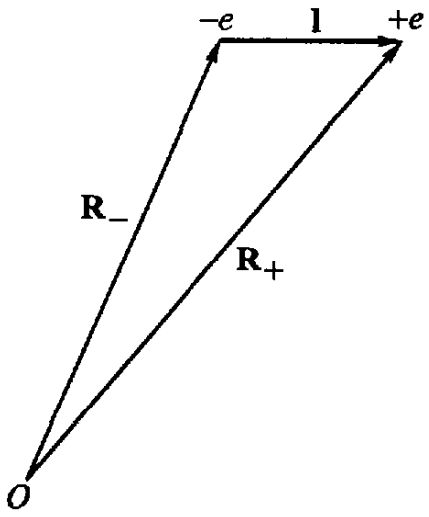

Рис. 26

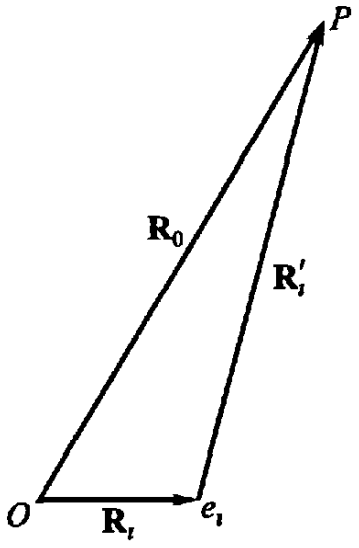

Рис. 27

соответственно, расстояния рассматриваемой точки P и заряда e_i от центра O, так что (рис. 27)

$$\mathbf{R}'_i = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_i, \quad R'^2_i = R_0^2 - 2\mathbf{R}_0\mathbf{R}_i + R_i^2.$$

Далее,

$$\frac{1}{R'_i} = \frac{1}{R_0}\left(1 - \frac{2\mathbf{R}_0\mathbf{R}_i}{R_0^2} + \frac{R_i'^2}{R_0^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{R_0}\left(1 + \frac{\mathbf{R}_0\mathbf{R}_i}{R_0^2} + \dots\right).$$

Если $R_i \ll R_0$, то, ограничившись первыми двумя членами разложения [1], получаем

$$\varphi = \frac{1}{R_0}\sum e_i + \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\sum e_i\mathbf{R}_i, \tag{20.3}$$

или, ввиду (20.1) и (20.2):

$$\varphi = \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\sum e_i\mathbf{R}_i = \frac{\mathbf{p}\mathbf{R}_0}{R_0^3}, \tag{20.4}$$

что совпадает с потенциалом поля диполя момента $\mathbf{p}$ [уравнение (8.10)].

4. В первом приближении не только поле, возбуждаемое в целом нейтральной системой зарядов, совпадает с полем эквивалентного диполя, но и силы, действующие в электрическом

[1] Последующие члены разложения убывают обратно пропорционально R_0^3, R_0^4 и т. д., величина их характеризуется так называемыми квадрупольным, октупольным и т. д. моментами системы зарядов, аналогичными в известном отношении ее дипольному моменту $\mathbf{p}$. Пренебрегая для упрощения этими членами, мы, стало быть, будем считать, что в случае, если $\mathbf{p} = 0$, поле в целом нейтральной системы зарядов на больших расстояниях от нее равно нулю, хотя это, конечно, и не совсем точно

поле на эту систему и на эквивалентный ей диполь, равны между собой.

Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что потенциальная энергия нейтральной системы зарядов во *внешнем* электрическом поле совпадает с энергией эквивалентного диполя, ибо выражением энергии однозначно определяются пондеромоторные силы (см. § 18).

Энергия системы зарядов во внешнем поле равна

$$W = \sum_i \varphi_i e_i,$$

где φ_i — потенциал внешнего поля в месте нахождения заряда e_i. Если потенциал внешнего поля в «центре» системы O равен φ_0, то с точностью до величин второго порядка потенциал в точке $\mathbf{R}_i$

$$\varphi_i = \varphi_0 + \mathbf{R}_i \operatorname{grad} \varphi = \varphi_0 - \mathbf{E}\mathbf{R}_i$$

и, стало быть,

$$W = \varphi_0 \sum e_i - \mathbf{E} \sum e_i \mathbf{R}_i,$$

или, согласно (20.1) и (20.2),

$$W = -\mathbf{E} \sum e_i \mathbf{R}_i = -\mathbf{p}\mathbf{E}, \tag{20.5}$$

что, как и требовалось доказать, совпадает с выражением для энергии диполя (15.8).

5. Итак, в первом приближении *любая, в целом нейтральная система зарядов, электрический момент которой равен* $\mathbf{p}$, *эквивалентна диполю того же момента* $\mathbf{p}$ *как в активном, так и в пассивном отношении* (т. е. как в отношении возбуждаемого ею поля, так и в отношении испытываемых ею сил).

Пользуясь этим, мы в дальнейшем часто будем заменять рассмотрение совокупности реальных, вообще говоря, очень сложных, молекул диэлектрика рассмотрением эквивалентных им диполей.

6. Электрическим моментом может быть охарактеризовано не только электрическое состояние отдельной молекулы, но и состояние макроскопического объема диэлектрика, состоящего из многих молекул. *Поляризацией* диэлектрика $\mathbf{P}$ называется электрический момент единицы объема диэлектрика:

$$\mathbf{P} = \sum e_i \mathbf{R}_i, \tag{20.6}$$

где суммирование распространено по всем зарядам (электронам и атомным ядрам), находящимся в единице объема диэлектрика.

Если диэлектрик состоит из нейтральных молекул, то это суммирование может быть выполнено в два приема: сначала суммирование по зарядам, входящим в состав отдельных молекул

диэлектрика, что дает момент $\mathbf{p}$ каждой молекулы [1]), а затем суммирование по всем молекулам, находящимся в единице объема. Таким образом, формулу (20.6) можем записать и так:

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}. \tag{20.7}$$

Иными словами, поляризация диэлектрика равна векторной сумме электрических моментов молекул, находящихся в единице объема диэлектрика.

Формулу (20.7) можно применить и к ионному кристаллическому диэлектрику, понимая под $\mathbf{p}$ в этом случае момент отдельных элементарных ячеек кристалла. Хотя разбиение кристалла на элементарные ячейки и не однозначно, результат $\mathbf{P}$ суммирования моментов отдельных ячеек от этого произвола не зависит и имеет вполне определенное значение.

Наконец, если поляризация диэлектрика неравномерна, то поляризацию $\mathbf{P}$ в данной точке нужно, очевидно, определять как отношение электрического момента элемента объема диэлектрика к элементу объема dV (при достаточно малом dV, см. § 25). Иными словами,

$$\mathbf{P}\,dV = \sum_{dV} e_i \cdot \mathbf{R}_i = \sum_{dV} \mathbf{p}, \tag{20.8}$$

где суммирование распространено по зарядам (или соответственно по всем молекулам), находящимся в элементе dV.

§ 21. Свободные и связанные заряды. Потенциал электрического поля при наличии диэлектриков. Зависимость поляризации от поля

1. При рассмотрении электростатического поля, в случае наличия в нем диэлектриков, нужно различать два рода электрических зарядов: свободные и связанные. Под *свободными зарядами* мы будем понимать, во-первых, все электрические заряды, которые под влиянием электрического поля могут перемещаться на макроскопические расстояния (электроны в металлах и вакууме, ионы в газах и электролитах и т. п.), и, во-вторых, заряды, нанесенные извне на поверхность диэлектриков и нарушающие их нейтральность [2]). Заряды же, входящие в состав нейтральных

[1]) Напомним, что входящие в (20.1) радиусы-векторы $\mathbf{R}_i$ зарядов нейтральной молекулы могут быть проведены из произвольной начальной точки.

[2]) Сюда же относятся, например, заряды внутриионной решетки твердых диэлектриков, образовавшиеся благодаря недостатку в данном участке диэлектрика ионов определенного знака, так что этот участок в целом уже не нейтрален

молекул диэлектриков, равно как и ионы, закрепленные в твердых диэлектриках вблизи определенных положений равновесия, мы будем называть *зарядами связанными*.

Потенциал φ электростатического поля при наличии в нем диэлектриков равен, очевидно, сумме потенциала φ_0, возбуждаемого свободными зарядами, и потенциала φ', возбуждаемого связанными электрическими зарядами в диэлектриках:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi'.$$

Потенциал свободных зарядов определяется формулой (12.11):

$$\varphi_0 = \int \frac{\rho\, dV}{R} + \int \frac{\sigma\, dS}{R},$$

где под ρ и σ надо понимать объемную и поверхностную плотность *свободных* зарядов.

Потенциал же φ' поля связанных зарядов однозначно определяется поляризацией диэлектриков.

Действительно, рассмотрим в целом нейтральный элемент объема dV диэлектрика. Электрический момент этого элемента, согласно (20.8), равен $\mathbf{P}\, dV$, и поэтому потенциал зарядов диэлектрика, заключенных в элементе объема dV, согласно (20.4), равен $\frac{\mathbf{PR}}{R^3}\, dV$, где $\mathbf{R}$ есть расстояние рассматриваемой точки поля от dV. Наконец, потенциал φ' всех элементов поляризованного диэлектрика, т. е. всех связанных зарядов, определится, очевидно, интегралом

$$\varphi' = \int \frac{\mathbf{PR}}{R^3}\, dV,$$

который можно распространить на все бесконечное пространство, ибо в тех точках, где диэлектрик отсутствует, $P = 0$ и подынтегральное выражение обращается в нуль. Таким образом, результирующий потенциал φ электростатического поля при наличии диэлектриков выразится уравнением

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{\mathbf{PR}}{R^3}\, dV. \tag{21.1}$$

2. Целесообразно несколько преобразовать это уравнение. Согласно формулам векторного анализа (10*) и (43_2^*)

$$\frac{\mathbf{PR}}{R^3} = \mathbf{P}\operatorname{grad}_q\left(\frac{1}{R}\right) = \operatorname{div}_q\left(\frac{\mathbf{P}}{R}\right) - \frac{1}{R}\operatorname{div}\mathbf{P},$$

где индекс q означает, что при дифференцировании радиус-вектор $\mathbf{R}$ рассматривается как функция положения его начальной точки, совпадающей в данном случае с dV. Так как вектор $\mathbf{P}$ является функцией положения только этой «точки истока», то индекс q при $\operatorname{div}\mathbf{P}$ нами опущен как излишний. Итак,

$$\varphi = \varphi_0 - \int \frac{\operatorname{div}\mathbf{P}}{R}\, dV + \int \operatorname{div}_q\left(\frac{\mathbf{P}}{R}\right) dV,$$

или, согласно теореме Гаусса (17*) [1],

$$\varphi = \varphi_0 - \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{P}}{R}\, dV + \oint\limits_{S+S_1'} \frac{P_n}{R}\, dS,$$

где последний интеграл должен быть распространен по внешней поверхности S рассматриваемого объема V и по поверхностям S_1', выделяющим из объема интегрирования поверхности S_1 разрыва вектора $\mathbf{P}$. Если мы будем рассматривать полное поле, то интеграл по S обратится в нуль, интеграл же по поверхностям S_1' при стягивании их к S_1 сведется, как обычно [ср., например, вывод уравнения (12.6)], к

$$\int\limits_{S_1} \frac{P_{1n} - P_{2n}}{R}\, dS.$$

Вводя, наконец (пока чисто формальным образом), обозначения

$$-\operatorname{div} \mathbf{P} = \rho_{\text{свзн}}, \qquad -(P_{2n} - P_{1n}) = \sigma_{\text{свзн}} \tag{21.2}$$

и внося в (21.1) выражение для φ_0, получим окончательно:

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{\rho_{\text{свзн}}}{R}\, dV + \int \frac{\sigma_{\text{свзн}}}{R}\, dS = \int \frac{(\rho + \rho_{\text{свзн}})\, dV}{R} + \int \frac{(\sigma + \sigma_{\text{свзн}})\, dS}{R}. \tag{21.3}$$

Таким образом, электрическое поле *при наличии* диэлектриков совпадает с полем, которое возбуждалось бы *в отсутствие* диэлектриков теми же свободными зарядами при добавлении к ним зарядов $\rho_{\text{свзн}}$ и $\sigma_{\text{свзн}}$, определяемых уравнениями (21.2). Ясно, что величины $\rho_{\text{свзн}}$ и $\sigma_{\text{свзн}}$ представляют собой не что иное, как среднюю плотность «связанных» зарядов диэлектрика. В § 26 мы установим справедливость этого утверждения путем непосредственного вычисления

Заметим, что в равномерно поляризованном диэлектрике ($\mathbf{P} = \text{const}$) плотность (средняя) связанных зарядов, согласно (21.2), равна нулю. Это и понятно, ибо ввиду одинаковости физического состояния смежных участков диэлектрика в этом случае нигде не может произойти накопления зарядов одного знака. На границе же поляризованного диэлектрика и вакуума или металла,

[1] При выводе теоремы Гаусса (17*) вектор $\mathbf{a}$ считается функцией положения элемента объема интегрирования dV (или элемента поверхностного интегрирования dS) Формула эта непосредственно применима к нашему интегралу, ибо в его подынтегральное выражение входит $\nabla_q(1/R)$ При вычислении $\nabla_q(1/R)$ радиус-вектор $\mathbf{R}$ рассматривается как функция положения его «точки истока», совпадающей в данном случае с dV. Если бы в подлежащий преобразованию интеграл входил градиент $\nabla_a(1/R)$, то формулу Гаусса можно было бы применить лишь по предварительной замене $\nabla_a(1/R)$ на $-\nabla_q(1/R)$.

согласно (21.2), сосредоточивается поверхностный связанный заряд плотности

$$\sigma = \pm P_n$$

(ибо как в вакууме, так и в металле $P = 0$).

3. Сравнивая (21.3) с (12.11) и (11.3), очевидно, получим

$$\nabla^2\varphi = -4\pi(\rho + \rho_{\text{связн}}).$$

Приняв во внимание соотношения

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = -\nabla^2\varphi, \tag{21.4}$$

а также уравнение (21.2), мы можем переписать это равенство следующим образом:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho - 4\pi\operatorname{div}\mathbf{P}$$

или

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho. \tag{21.5}$$

4. Дифференциальные уравнения (21.4) и (21.5) являются основными уравнениями электростатического поля в произвольной среде. Для получения полной системы уравнений электростатики их нужно только дополнить уравнением, связывающим $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$.

В отсутствие внешних полей поляризация $\mathbf{P}$ диэлектрика равна нулю [1]: электрические моменты отдельных молекул в отсутствие внешнего поля, если и отличны от нуля, то ориентированы совершенно беспорядочно и в сумме дают нуль. При наличии же электрического поля поляризация диэлектрика, *как показывает опыт*, пропорциональна напряженности поля $\mathbf{E}$:

$$P = \alpha E. \tag{21.6}$$

Отклонения от пропорциональности между P и E в доступных нам полях настолько незначительны, что ими, за редкими исключениями (см., например, § 29), можно вовсе пренебречь [2].

---

[1]) Мы не станем здесь рассматривать сравнительно редких исключений из этого правила, например явлений пиро- и пьезоэлектричества. В частности, явление пьезоэлектричества заключается в том, что кристаллы, обладающие определенными свойствами симметрии, поляризуются не только под воздействием внешних электрических полей, но также и при механической деформации (пьезоэлектричество).

[2]) Линейная связь между поляризацией $\mathbf{P}$ и полем $\mathbf{E}$ отвечает линейной электродинамике. В последние годы получила широкое развитие также нелинейная электродинамика (и, соответственно, нелинейная оптика) — в этом случае и используется нелинейная связь между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$. Учет нелинейности необходим в сильных полях, ставших доступными, в частности, в связи с созданием лазеров. Кроме того, для ряда сред с большой поляризуемостью (сегнетоэлектрики, плазма и др.) нелинейность может иметь место уже в сравнительно слабых полях — полях, малых по сравнению с характерным атомным полем $E \sim e/a^2 \sim 10^8 - 10^9$ В/см (здесь $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ — заряд протона и $a \sim (1-3)\cdot 10^{-8}$ см — размер атома или постоянная кристаллической решетки). См. также конец § 63. (*Примеч. ред.*)

Коэффициент α в (21.6) характеризует собой свойства данного диэлектрика и носит название *поляризуемости* диэлектрика.

Остается еще вопрос о направлении вектора $\mathbf{P}$. В изотропных диэлектриках уже из соображений симметрии явствует, что вектор $\mathbf{P}$ может быть направлен только по единственно выделенному направлению электрического поля $\mathbf{E}$ (или же противоположно $\mathbf{E}$). Так как положительные заряды смещаются при поляризации диэлектрика по направлению поля и так как вектор электрического момента направлен от отрицательных зарядов к положительным (ср. случай простого диполя, рис. 26), то вектор $\mathbf{P}$ параллелен полю $\mathbf{E}$, и в векторной форме мы получаем окончательно:

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}. \tag{21.7}$$

Однако в анизотропных средах направление вектора поляризации может не совпадать и, вообще говоря, не совпадает с направлением поля. Абсолютная величина вектора $\mathbf{P}$ в этом случае также зависит не только от абсолютной величины вектора $\mathbf{E}$, но и от направления вектора $\mathbf{E}$ по отношению к кристаллографическим осям диэлектрика. Однако связь слагающих вектора $\mathbf{P}$ со слагающими вектора $\mathbf{E}$ остается линейной, а именно в анизотропных диэлектриках уравнения (21.6) и (21.7) должны быть заменены следующими:

$$\begin{aligned} P_x &= \alpha_{11} E_x + \alpha_{12} E_y + \alpha_{13} E_z, \\ P_y &= \alpha_{21} E_x + \alpha_{22} E_y + \alpha_{23} E_z, \\ P_z &= \alpha_{31} E_x + \alpha_{32} E_y + \alpha_{33} E_z, \end{aligned} \tag{21.8}$$

причем значения коэффициентов поляризуемости α_{ik} зависят от ориентации осей x, y, z координатной системы по отношению к кристаллографическим осям диэлектрика.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только изотропных диэлектриков, к которым применима формула (21.7).

§ 22. Вектор электрической индукции. Дифференциальные уравнения поля в произвольной среде. Линии индукции

1. Вместо поляризации $\mathbf{P}$ удобно ввести в рассмотрение вектор $\mathbf{D}$, определяемый формулой

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}. \tag{22.1}$$

Вектор этот у разных авторов носит различные названия: электрическое смещение, электрическая поляризация [не смешивать с вектором $\mathbf{P}$, уравнение (20.7)], *электрическая индукция* и т. д. Мы будем пользоваться последним из этих терминов.

Вектор электрической индукции, в сущности, представляет собой сумму двух совершенно различных физических величин: напряженности поля и (умноженной на 4π) поляризации единицы объема среды. Тем не менее введение в рассмотрение этого вектора чрезвычайно упрощает изучение поля в диэлектриках.

В частности, одно из основных уравнений электрического поля — уравнение (21.5) — с помощью обозначения (22.1) принимает весьма простой вид

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho. \tag{22.2}$$

В случае неполяризующейся среды (например, вакуума) $\mathbf{P} = 0$, вектор индукции $\mathbf{D}$ совпадает с напряженностью поля $\mathbf{E}$, а уравнение (22.2) совпадает с уравнением (6.5):

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

так что последнее уравнение является частным случаем формулы (22.2).

Умножая (22.2) на элемент объема dV и интегрируя по объему, заключенному внутри замкнутой поверхности S, получим, согласно теореме Гаусса (17*),

$$\oint D_n\, dS = 4\pi \int \rho\, dV. \tag{22.3}$$

Эта формула является обобщением электростатической теоремы Гаусса (3.6) для случая произвольной, в частности диэлектрической, среды.

Далее, в изотропных диэлектриках из (21.7) и (22.1) получаем

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\alpha)\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}, \tag{22.4}$$

где

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha. \tag{22.5}$$

Таким образом, индукция $\mathbf{D}$ пропорциональна напряженности поля $\mathbf{E}$; коэффициент пропорциональности между ними ε носит название *диэлектрической проницаемости* [1]). Заметим, что из (21.7) и (22.5) следует:

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathbf{E}. \tag{22.6}$$

2. В предельном случае поверхностных зарядов уравнение (22.2), согласно (6.7) и (6.8), принимает вид

$$\operatorname{Div}\mathbf{D} = D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \tag{22.7}$$

где σ — поверхностная плотность *свободного* электричества.

Согласно (22.4) формулу эту можно записать так:

$$D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = 4\pi\sigma, \tag{22.8}$$

где ε_1 и ε_2 — значения диэлектрической проницаемости по обе стороны поверхности разрыва. В частности, если $\sigma = 0$, т. е. если на этой поверхности нет *свободных* зарядов, то

$$\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}, \quad D_{2n} = D_{1n}.$$

[1]) Уравнение (22.1) справедливо и для анизотропных диэлектриков, но, исключая из него $\mathbf{P}$ с помощью уравнений (21.8), получаем три уравнения того же типа для слагающих вектора $\mathbf{D}$, в которые входят девять диэлектрических коэффициентов ε_{ik}

Следовательно, на *незаряженной* границе раздела двух различных сред ($\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$) нормальная слагающая электрической индукции остается непрерывной, нормальная же слагающая напряженности поля испытывает скачок.

Что же касается тангенциальной слагающей вектора $\mathbf{E}$, то рассуждения, приведшие нас в § 7 к формуле (7.7), остаются в силе, ибо и в произвольном диэлектрике работа электрических сил от формы пути не зависит. Поэтому

$$E_{2t} = E_{1t} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\varepsilon_2} D_{2t} = \frac{1}{\varepsilon_1} D_{1t}. \tag{22.9}$$

Иными словами, тангенциальная слагающая напряженности поля всегда остается непрерывной, тангенциальная же слагающая индукции на поверхности раздела двух различных сред ($\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1$) испытывает скачок.

Так как внутри проводников в случае электростатического равновесия $\mathbf{E}$ (а следовательно, и $\mathbf{D}$) равно нулю, то из (22.9) вытекает, что у внешней поверхности проводников электрический вектор $\mathbf{E}$ (а следовательно, и $\mathbf{D}$) всегда перпендикулярен этой поверхности. Поэтому уравнение (22.8) *у поверхности проводников* принимает вид

$$\varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{D} = 4\pi\sigma \mathbf{n}, \tag{22.10}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к этой поверхности, а ε — диэлектрическая проницаемость соприкасающейся с ней среды. Уравнение (7.8) является, очевидно, частным случаем этой формулы.

3. Уравнения (21.4), (22.2), (22.4) и (22.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\operatorname{grad}\varphi, \quad D = \varepsilon \mathbf{E}, \\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi\rho, \quad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \end{aligned} \tag{A}$$

дополненные требованием непрерывности потенциала φ [1], представляют собой *полную систему* уравнений электростатического поля в произвольной среде. Это значит, что если заданы плотности свободных зарядов ρ и σ и диэлектрическая проницаемость ε в каждой точке пространства и если на бесконечности удовлетворены условия (12.10): ER^2 при $R \to \infty$ остается конечным, то системой (A) однозначно определяется электрическое поле, т. е. значения φ, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ в каждой точке пространства; обратно, если заданы: а) диэлектрическая проницаемость ε и б) напряженность поля $\mathbf{E}$ (или потенциал φ, или индукция $\mathbf{D}$) в каждой

[1]) Ибо двойных электрических слоев, т. е поверхностей разрыва потенциала, мы не рассматриваем. Впрочем, включение их в излагаемую теорию не представляет никаких затруднений Заметим, что, согласно § 7, уравнением $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ обеспечивается непрерывность тангенциальных слагающих вектора $\mathbf{E}$

точке пространства, то системой (A) однозначно определяется распределение свободных зарядов ρ и σ.

Справедливость второго утверждения очевидна; для доказательства же первого предположим, что существует два решения $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, φ и $\mathbf{E}'$, $\mathbf{D}'$, φ' системы (A) при заданных ε, ρ, σ. Внося оба решения в (A) и вычитая затем соответственные уравнения друг из друга, получим

$$\begin{gathered}\mathbf{E}'' = -\operatorname{grad}\varphi'', \quad \mathbf{D}'' = \varepsilon\mathbf{E}'', \\ \operatorname{div}\mathbf{D}'' = 0, \quad D''_{2n} = D''_{1n},\end{gathered} \tag{A'}$$

где $\mathbf{E}'' = \mathbf{E} - \mathbf{E}'$, $\mathbf{D}'' = \mathbf{D} - \mathbf{D}'$, $\varphi'' = \varphi - \varphi'$.

Далее на основании (A') и (43_2^*) можем написать следующую цепь равенств:

$$\varepsilon E''^2 = \mathbf{D}''\mathbf{E}'' = -\mathbf{D}''\operatorname{grad}\varphi'' = -\operatorname{div}(\mathbf{D}''\varphi'') + \varphi''\operatorname{div}\mathbf{D}'' = -\operatorname{div}(\mathbf{D}''\varphi'').$$

Следовательно, интеграл $\varepsilon E''^2$ по произвольному объему, ограниченному поверхностью S, на основании (17*) будет равен

$$\int \varepsilon E''^2\, dV = -\int \operatorname{div}(\mathbf{D}''\varphi'')\, dV = -\oint\limits_S D''_n\varphi''\, dS,$$

причем поверхностный интеграл должен быть взят лишь по граничной поверхности S, ибо во всем поле как φ'', так, согласно (A'), и D''_n остаются непрерывными. Если теперь распространить интегрирование по объему *полного поля*, то интеграл по поверхности S обращается в нуль. Следовательно,

$$\int \varepsilon E''^2\, dV = 0,$$

что может иметь место лишь в том случае, если во всех точках поля $\mathbf{E}'' = \mathbf{E} - \mathbf{E}'$ обращается в нуль, чем и доказывается однозначность решения системы (A).

Итак, вектор $\mathbf{E}''$, удовлетворяющий системе (A'), тождественно равен нулю. Так как при отсутствии свободных зарядов ($\sigma = \rho = 0$) система (A) принимает вид (A'), то, стало быть, *в отсутствие свободных зарядов электрическое поле тождественно равно нулю*. Таким образом, наличие диэлектриков может только видоизменять поле свободных зарядов; в отсутствие же последних поляризация диэлектрика спадает, становится равной нулю и электрическое поле исчезает. (См., впрочем, примечание к с. 104.)

4. В заключение заметим, что для графического изображения электрического поля в диэлектриках неудобно пользоваться силовыми линиями этого поля, т. е. линиями вектора $\mathbf{E}$ (см. § 10), ибо дивергенция (объемная и поверхностная) этого вектора при наличии диэлектриков может быть отличной от нуля не только в тех точках поля, где находятся *свободные* (объемные и поверхностные) заряды, но также и в точках расположения связанных зарядов диэлектрика, плотность которых в свою очередь зависит

от напряженности поля, неоднородностей среды и т. д. Поэтому для графического изображения поля в диэлектрике пользуются так называемыми *линиями индукции*, т. е. линиями вектора электрической индукции $\mathbf{D}$.

Так как, согласно (22.4), вектор $\mathbf{D}$ в каждой точке пространства (за исключением анизотропных сред) параллелен вектору $\mathbf{E}$, то каждая линия индукции является вместе с тем и силовой линией и наоборот. Поэтому, в частности, из того, что невозможны замкнутые силовые линии, следует также и *невозможность замкнутых линий индукции*. Однако если, как это принято, чертить линии сил и линии индукции с таким расчетом, чтобы число этих линий, пересекающих любую площадку dS, было по возможности пропорционально потоку соответствующего вектора ($\mathbf{D}$ или $\mathbf{E}$) через эту площадку, то густота линий индукции и линий сил будет, вообще говоря, меняться различным образом от одного участка пространства к другому. В частности, при таком способе черчения некоторые линии сил нужно будет оборвать на связанных отрицательных зарядах диэлектрика, тогда как соответствующие линии индукции будут проходить через и за эти заряды до встречи с зарядами свободными.

Действительно, так как зависимость объемной и поверхностной дивергенции вектора $\mathbf{D}$ от распределения свободных зарядов в произвольной среде совпадает с зависимостью $\operatorname{div}\mathbf{E}$ и $\operatorname{Div}\mathbf{E}$ от ρ и σ в отсутствие диэлектриков, то, согласно результатам § 10, линии индукции могут начинаться и оканчиваться лишь в тех точках поля, в которых расположены *свободные* электрические заряды, либо уходить в бесконечность [1]. В вакууме вектор $\mathbf{D}$ тождествен вектору $\mathbf{E}$, так что линии индукции совпадают с силовыми линиями.

З а д а ч а 16. Показать, что на границе раздела двух диэлектриков силовые линии (т. е. линии направления вектора $\mathbf{E}$) испытывают преломление, причем

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\operatorname{tg}\beta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

где β_1 — угол, образованный направлением силовой линии в первом диэлектрике с нормалью к поверхности раздела, ε_1 — диэлектрическая проницаемость первой среды, а β_2 и ε_2 — соответственные величины для второй среды.

З а д а ч а 17. Показать, что напряженность поля $\mathbf{E}'$ в средней части длинной и узкой щели, проделанной в твердом диэлектрике, равна напряженности поля $\mathbf{E}$ в диэлектрике, если щель эта параллельна вектору $\mathbf{E}$, и что $\mathbf{E}'$ равна индукции $\mathbf{D}$ в диэлектрике, если щель перпендикулярна $\mathbf{E}$.

[1]) См., впрочем, примечание на с. 55 о точках неопределенности.

З а д а ч а 18. Показать, что для однозначного определения электростатического поля в произвольной среде достаточно задать, во-первых, расположение и форму проводников, значение диэлектрической постоянной в каждой точке среды и распределение с в о б о д н ы х объемных и поверхностных з а р я д о в в д и э л е к т р и к е и, во-вторых, либо потенциал φ_i каждого проводника [задача (А)], либо общий заряд e_i каждого проводника [задача (В)] (ср. § 13).

З а д а ч а 19. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектрика. Диэлектрические постоянные этих слоев равны ε_1 и ε_2, а их толщины — d_1 и d_2, причем $d_1 + d_2 = d$, где d — расстояние между пластинами конденсатора. Показать, что емкость конденсатора C определяется соотношением

$$\frac{1}{C} = \frac{4\pi}{S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right),$$

где S — поверхность его пластин.

§ 23. Электрическое поле в однородном диэлектрике

1. Рассмотрим простейший случай диэлектрической среды, когда *все поле*, т. е. все участки пространства, в которых вектор $\mathbf{E}$ не равен нулю, заполнено *однородным* диэлектриком. Это будет иметь место, например, в том случае, если система проводников погружена в бесконечный однородный диэлектрик (ибо в случае электрического равновесия внутри проводников $\mathbf{E} = 0$) или в диэлектрик, ограниченный замкнутой металлической оболочкой (электростатическая защита). В этом случае во всех дифференциальных уравнениях поля постоянные ε и α могут быть вынесены за знак производной, и, например, из (22.2) и (22.4) следует:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

или

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -\nabla^2\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\cdot 4\pi\rho. \tag{23.1}$$

Это значит, что при заданном распределении свободных зарядов потенциал и напряженность поля в однородном диэлектрике в ε раз меньше потенциала и напряженности поля в вакууме. Часто это положение кладется в основу всей формальной теории диэлектриков.

Из него непосредственно вытекает, что потенциал и напряженность поля точечного заряда в *однородном* диэлектрике равны

$$\varphi = \frac{e}{\varepsilon R}, \quad E = \frac{e}{\varepsilon R^2} \tag{23.2}$$

(так называемый *обобщенный закон Кулона*). Далее, разность потенциалов между обкладками конденсатора при заполнении пространства между ними однородным диэлектриком должна уменьшаться в ε раз, если заряды обкладок остаются неизменными. Это значит, что емкость конденсатора C возрастает при этом в ε раз:

$$C = \varepsilon C_0. \tag{23.3}$$

Напомним, наконец, что значение вектора электрической индукции $\mathbf{D}$ в однородной среде не зависит от диэлектрической проницаемости этой среды и вполне определяется распределением свободных зарядов, ибо из (22.4) и (23.2) следует, что

$$D = \varepsilon E = \frac{e}{R^2}. \tag{23.4}$$

2. Необходимо, однако, твердо помнить, что уравнения (23.1)–(23.4) *неприменимы* к диэлектрику *неоднородному*. Так, например, если в поле заряда e внести кусок диэлектрика D (рис. 28), то благодаря поляризации этого диэлектрика напряженность поля в точках P_1 и P_2 не уменьшится, как то соответствовало бы формуле (23.1), а увеличится. Действительно, отрицательные заряды диполей сместятся в диэлектрике влево, а положительные вправо, так что направление результирующего поля этих зарядов в точках P_1 и P_2 будет совпадать с направлением поля заряда e. В точке же P_3 поляризация диэлектрика вызовет ослабление первоначального поля заряда e.

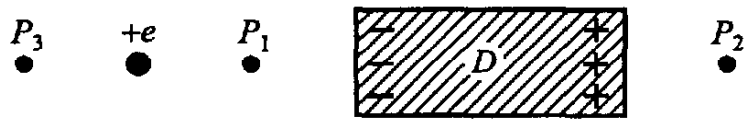

Рис 28

Вообще в *неоднородной* среде нельзя установить сколько-нибудь простой зависимости поля от расположения одних только *свободных* зарядов, зависимости типа закона Кулона (23.2). Лишь обращаясь к дифференциальным уравнениям поля, т. е. к уравнениям, связывающим значения характеризующих поле величин в *смежных* точках пространства, можно прийти к сравнительно простым соотношениям между этими величинами [система уравнений (А), с. 107], ибо лишь дифференциальные соотношения полностью определяются свойствами данного элемента среды независимо от свойств удаленных ее участков.

3. Рассмотрим еще пример, когда бесконечное полупространство над плоскостью $z = 0$ заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_1, а полупространство под этой плоскостью — другим однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_2 (рис. 29). Определим поле заряда e, находящегося в произвольной точке P. Выберем оси координат так, чтобы ось z проходила через точку P; координаты этой точки будут $x = y = 0$, $z = z_0$. Пусть для определенности $z_0 > 0$, т е. заряд находится в верхнем полупространстве, где $\varepsilon = \varepsilon_1$.

Обозначим потенциал в верхнем полупространстве через φ_1, а в нижнем — через φ_2. Условие непрерывности потенциала на границе раздела диэлектриков гласит:

$$(\varphi_1)_{z=0} = (\varphi_2)_{z=0}. \tag{23.5}$$

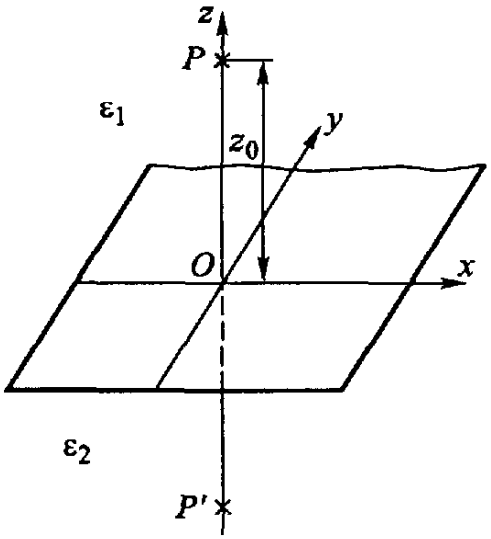

Рис. 29

Далее, так как в нашем случае $\sigma = 0$, то, выражая в (22.8) $\mathbf{E}$ через $\operatorname{grad}\varphi$, получим

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)_{z=0} = \varepsilon_2 \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)_{z=0}. \tag{23.6}$$

Наконец, поскольку в каждом полупространстве ε постоянно, то, согласно (23.1),

$$\nabla^2\varphi_1 = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon_1}, \quad \nabla^2\varphi_2 = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon_2}. \tag{23.7}$$

Так как в нашем случае $\rho = 0$ всюду, кроме точки P, то

$$\nabla^2\varphi_2 = 0, \tag{23 8}$$

а первое из уравнений (23.7) будет, очевидно, удовлетворено, если мы положим

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 R} + \varphi_1', \quad \nabla^2\varphi_1' = 0, \tag{23.9}$$

где R — расстояние точки наблюдения от точки P: $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$.

Потенциал в каждой точке пространства будет зависеть, во-первых, от ее расстояния до точки P, т. е. от R, и, во-вторых, от ее расстояния до плоскости раздела, т. е. от z. По соображениям симметрии вместо последней переменной удобно ввести расстояние $R' = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}$ произвольной точки пространства от точки P', симметричной с P относительно поверхности раздела; координаты точки P' равны 0, 0, $-z_0$. Уравнение плоскости раздела в переменных R и R' примет вид

$$R = R', \tag{23.10}$$

а решениями уравнений (23.8) и (23.9), обладающими требуемой симметрией, будут, очевидно, выражения

$$\varphi_1' = \frac{\lambda e}{\varepsilon_1 R'}, \quad \varphi_2 = \frac{\mu e}{\varepsilon_2 R}, \tag{23.11}$$

где λ и μ — некоторые постоянные. Действительно, потенциал φ_2 в нижнем полупространстве не может содержать члена, пропорционального $1/R'$, ибо он не удовлетворял бы уравнению (23.8); аналогично φ_1' не может содержать члена, пропорционального $1/R$. Внося (23.9) и (23.11) в (23.5) и учитывая (23.10), получаем $\dfrac{1+\lambda}{\varepsilon_1} = \dfrac{\mu}{\varepsilon_2}$; аналогично из (23.6) после элементарных выкладок получаем $1 - \lambda = \mu$ Таким образом, все наши уравнения удовлетворятся, если положить $\lambda = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$, $\mu = \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$, т. е. если положить

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_1 &= \frac{e}{\varepsilon_1 R} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\frac{e}{R'} && \text{при} \quad z > 0, \\ \varphi = \varphi_2 &= \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{e}{R} && \text{при} \quad z < 0 \end{aligned} \tag{23 12}$$

На основании теоремы однозначности (см. § 22) полученные выражения являются единственными решениями нашей задачи (вплоть до аддитивной постоянной в потенциале, не сказывающейся на напряженности поля).

Если все пространство заполнено однородным диэлектриком ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$), то (23.12) переходит в элементарное выражение обобщенного закона Кулона (23.2). При $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ влияние неоднородности диэлектрика на потенциал φ_1 в верхнем полупространстве эквивалентно влиянию добавочного фиктивного заряда $[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]e$, помещенного в симметричную с P точку P'. (Ср. решение аналогичной задачи в § 13 методом изображений.)

§ 24. Непосредственный подсчет поля при наличии диэлектрика (в простейших случаях)

1. Чтобы пояснить влияние поляризации диэлектрика на напряженность поля, мы проведем непосредственное вычисление поля в двух простейших случаях. При этом для простоты мы будем предполагать, что все заряды в диэлектрике закреплены одинаково прочно и имеют одинаковую абсолютную величину e. Число зарядов каждого знака в единице объема диэлектрика обозначим через N.

2. Рассмотрим элементарный вывод обобщенного закона Кулона для *однородного* диэлектрика. Пусть все поле заполнено однородным диэлектриком и «свободный» положительный заряд e_0 находится в однородном диэлектрике в точке O; требуется определить поле $\mathbf{E}$ этого заряда в некоторой точке P на расстоянии R от него. Под воздействием поля $\mathbf{E}$ отрицательные заряды диэлектрика сместятся к центру O, а положительные удалятся от него. Благодаря шаровой симметрии поля все пространство может быть разбито на концентрические шаровые слои с центром в O, в каждом из которых плотность расположения зарядов постоянна. Поле всех заряженных шаровых слоев, *внешних* по отношению к точке P, равно в этой точке нулю, поле же всех *внутренних* слоев в точке P таково, как если бы весь заряд этих слоев был сосредоточен в центре O [см. уравнение (4.6)]. Каков же общий заряд этих внутренних слоев, т. е. заряд, находящийся внутри сферы S, проходящей через точку P?

Так как, по предположению, все заряды в диэлектрике одинаковы и связаны в нем одинаково прочно, то при возникновении поляризации все положительные заряды, находившиеся на расстоянии R от центра O, должны были сместиться наружу на некоторое расстояние δR, а все отрицательные — внутрь на то же расстояние; конечно, это смещение δR уменьшается при удалении от O. Через поверхность сферы S радиуса R при возникновении поляризации должны были пройти *наружу* все *положительные* заряды, находившиеся в слое толщины δR, прилегающем к сфере S изнутри. Число этих зарядов по условию равно $N \cdot 4\pi R^2 \delta R$.

Такое же число *отрицательных* зарядов войдет, очевидно, снаружи *внутрь* сферы S. Таким образом, общий отрицатель-

ный заряд δe, появляющийся внутри сферы S, благодаря поляризации диэлектрика, будет равен

$$\delta e = -eN \cdot 8\pi R^2 \delta R.$$

Напряженность поля этих зарядов в точке P, как указывалось, будет такова, как если бы все эти заряды были сосредоточены в центре симметрии O. Стало быть, общая напряженность поля в точке P будет равна

$$E = \frac{e_0 + \delta e}{R^2}.$$

С другой стороны, электрический момент единицы объема диэлектрика $\mathbf{P} = \sum e_i \mathbf{R}_i$ до поляризации был равен нулю, а после поляризации стал равным

$$\mathbf{P} = \sum e_i (\mathbf{R}_i \pm \delta \mathbf{R}) = 2Ne\delta\mathbf{R}.$$

Таким образом, числовое значение вектора $\mathbf{P}$ равно

$$P = 2Ne\delta R = -\frac{\delta e}{4\pi R^2}$$

и, стало быть,

$$E = \frac{e_0 + \delta e}{R^2} = \frac{e_0}{R^2} - 4\pi P.$$

Таким образом,

$$D = E + 4\pi P = \frac{e_0}{R^2}, \qquad E = \frac{1}{\varepsilon} D = \frac{e_0}{\varepsilon R^2},$$

что и требовалось доказать.

3. Определим поле равномерно поляризованного шара. Пусть поляризация $\mathbf{P}$ постоянна по величине и направлению во всех точках шара радиуса a. При $\mathbf{P} = 0$ положительные и отрицательные заряды диэлектрика одинаково распределены по объему шара и поля их взаимно компенсируются. При возникновении же поляризации положительные заряды сдвигаются на некоторый отрезок $\mathbf{l}$, а отрицательные на отрезок $-\mathbf{l}$. Таким образом, после сдвига отрицательные заряды диэлектрика будут заполнять собой шар радиуса a, центр которого смещен на отрезок $2\mathbf{l}$ относительно центра шара того же радиуса, заполненного положительными зарядами (рис. 30). Следовательно, поле равномерно поляризованного шара должно быть тождественно с полем двух сдвинутых друг относительно друга на отрезок $2\mathbf{l}$ шаров радиуса a, равномерно заряженных разноименным электричеством. Так как, по предположению, на единицу объема диэлектрика приходится по N зарядов каждого знака, то общий заряд

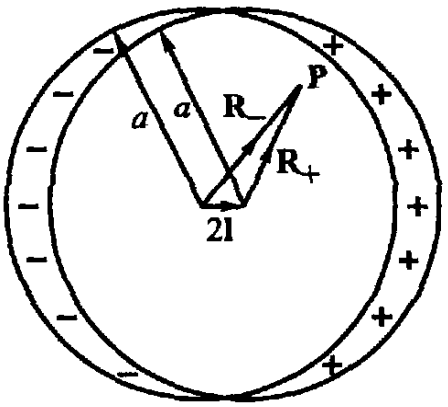

Рис. 30

каждого шара по абсолютной величине будет равен $e' = eNV$, где $V = {}^4/_3\pi a^3$ есть объем шара.

Внешнее поле равномерно заряженного шара таково, как если бы весь заряд шара e' был сосредоточен в его центре [уравнение (4.7)]. Стало быть, внешнее поле поляризованного шара таково, как если бы два точечных заряда $\pm e'$ находились на расстоянии $2\mathbf{l}$ друг от друга, т. е. тождественно с полем диполя момента $\mathbf{p} = 2e'\mathbf{l} = 2VeN\mathbf{l}$. Таким образом, потенциал равномерно поляризованного шара объема V вне этого шара, согласно (8.10), будет равен

$$\varphi_e = 2eNV\frac{\mathbf{lR}}{R^3} \qquad (R \geqslant a),$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор из центра шара в исследуемую точку поля.

С другой стороны, электрический момент единицы объема шара $\mathbf{P} = \sum e_i\mathbf{R}_i$ до поляризации был равен нулю, после же поляризации он станет равным $\mathbf{P} = \sum e_i(\mathbf{R}_i \pm \mathbf{l}) = 2eN\mathbf{l}$. Следовательно, окончательно имеем

$$\varphi_e = V\frac{\mathbf{PR}}{R^3} \qquad (R \geqslant a). \tag{24.1}$$

Аналогичной же формулой определяется и потенциал внутренних точек шара ($R \leqslant a$), если только в этом случае понимать под V объем не всего шара, а лишь той его части, которая ближе к центру, чем рассматриваемая точка поля, т. е. если в (24.1) положить $V = {}^4/_3\pi R^3$:

$$\varphi_i = \frac{4\pi}{3}R^3\frac{\mathbf{PR}}{R^3} = \frac{4\pi}{3}\mathbf{PR} \qquad (R \leqslant a). \tag{24.2}$$

Действительно, потенциал поля заряженного шара, образованного положительными зарядами диэлектрика, внутри этого шара равен [уравнение (8 12)]

$$\varphi_+ = 2\pi\rho\left(a^2 - \frac{R_+^2}{3}\right),$$

где $\rho = eN$ есть плотность положительных зарядов в диэлектрике, потенциал же шара, образованного отрицательными зарядами диэлектрика, равен

$$\varphi_- = -2\pi\rho\left(a^2 - \frac{R_-^2}{3}\right),$$

причем $\mathbf{R}_+$ и $\mathbf{R}_-$ суть расстояния точки поля от центра соответственных шаров: $\mathbf{R}_+ = \mathbf{R} - \mathbf{l}$, $\mathbf{R}_- = \mathbf{R} + \mathbf{l}$. Поэтому результирующий потенциал всех зарядов диэлектрика при $R \leqslant a$ равен

$$\varphi_i = \varphi_+ + \varphi_- = -\frac{2}{3}\pi\rho(R_+^2 - R_-^2)$$

Так как $R_+^2 - R_-^2 = -4\mathbf{lR}$, то потенциал поля внутри поляризованного шара равен

$$\varphi_i = \frac{8\pi\rho}{3}\mathbf{lR} = \frac{8\pi Ne}{3}\mathbf{lR} = \frac{4\pi}{3}\mathbf{PR},$$

что и требовалось доказать

Очевидно, что при $R = a$ выражения для φ_e и φ_i принимают одинаковые значения, т. е. что потенциал φ поляризованного шара является непрерывной функцией точки.

Наконец, напряженность поля поляризованного шара внутри этого шара будет равна

$$\mathbf{E}_i = -\nabla\varphi_i = -\frac{4}{3}\pi\nabla(\mathbf{PR}) \quad (R \leqslant a).$$

Так как вектор $\mathbf{P}$ постоянен по величине и направлению, то $\nabla(\mathbf{PR}) = \mathbf{P}$, и поэтому окончательно:

$$\mathbf{E}_i = -\frac{4}{3}\pi\mathbf{P} \quad (R \leqslant a). \tag{24.3}$$

Таким образом, напряженность поля равномерно поляризованного шара постоянна по величине и направлению во всех его внутренних точках.

Конечно, рассмотренную нами задачу можно было бы решить, исходя непосредственно из общих уравнений поля в диэлектрических средах. Этот способ решения, а также рассмотрение вопроса о том, как можно поддерживать равномерную поляризацию в диэлектрическом шаре, мы предлагаем уяснить читателю на следующем примере.

Пример. Шар радиуса a из однородного диэлектрика помещается в однородное внешнее поле E_0, направленное по оси z. Исходя из дифференциальных уравнений поля, доказывается, что шар будет поляризован равномерно, причем поляризация его будет равна

$$P = \frac{3(\varepsilon - 1)}{4\pi(\varepsilon + 2)} E_0, \tag{24.4}$$

а потенциал поля будет равен сумме потенциала внешнего поля

$$\varphi_0 = -E_0 z$$

и потенциала поляризованного шара, определяемого уравнениями (24.1) и (24.2):

$$\begin{aligned} \varphi_e &= -E_0 z + \frac{V\mathbf{PR}}{R^3} = -E_0 z\left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\frac{a^3}{R^3}\right) \quad (R \geqslant a), \\ \varphi_i &= -E_0 z + \frac{4\pi}{3}\mathbf{PR} = -\frac{3E_0 z}{\varepsilon + 2} \quad (R \leqslant a). \end{aligned} \tag{24.5}$$

Чтобы доказать справедливость формул (24.5), достаточно показать, во-первых, что φ_e и φ_i удовлетворяют уравнению Пуассона: $\nabla^2\varphi_e = \nabla^2\varphi_i = 0$ и, во-вторых, что на поверхности диэлектрика, т. е. при $R = a$, потенциал непрерывен:

$$\varphi_e = \varphi_i \quad \text{при} \quad R = a,$$

и непрерывна нормальная слагающая электрической индукции:

$$D_{en} = -\frac{\partial\varphi_e}{\partial R} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi_i}{\partial R} = D_{in} \quad \text{при} \quad R = a.$$

Предоставляем это сделать читателю (при выполнении дифференцирования по R удобно выразить z через $R\cos\theta$).

Из (24.5) следует, что внутри шара

$$E_i = \frac{3E_0}{\varepsilon + 2}.$$

Внося это значение E_i в (22.6), получаем (24.4).

§ 25. Микро- и макроскопические значения физических величин

1. Этот и последующие параграфы, вплоть до § 29, мы посвятим более строгому выводу уравнений *макроскопического* поля в диэлектриках из *микроскопических* уравнений поля, а также выяснению зависимости диэлектрической постоянной среды от атомистического строения этой среды, ее температуры и т. д.

До сих пор мы не обращали достаточного внимания на то обстоятельство, что поле каждой молекулы диэлектрика в непосредственной близости от нее должно чрезвычайно быстро изменяться от точки к точке (например при переходе от положительных к отрицательным зарядам молекулы). Правда, эти изменения поля протекают в микроскопическом масштабе и недоступны нашему макроскопическому наблюдению. Измеряя, например, поле в жидком диэлектрике путем погружения в него пробного заряда, например, достаточно малого заряженного металлического шарика, мы, очевидно, измеряем *среднее* из тех значений, которые имеет напряженность поля $\mathbf{E}$ на поверхности этого шарика.

2. Чтобы уточнить понятие среднего значения, мы введем следующую терминологию, предложенную Лоренцем. Мы будем называть *физически бесконечно малыми в отличие от математически бесконечно малых* такие элементы объемов, поверхностей и линий, которые одновременно удовлетворяют следующим двум требованиям:

а) физически бесконечно малые элементы должны быть чрезвычайно *велики* по сравнению с расстояниями между молекулами среды, а стало быть, и *по сравнению с микроскопическими неоднородностями среды и поля*;

б) вместе с тем физически бесконечно малые элементы должны быть чрезвычайно *малы по сравнению с макроскопическими неоднородностями* поля и среды; другими словами, средние значения физических величин (например φ, $\mathbf{E}$, ε и т. д.) в любом из этих элементов должны бесконечно мало отличаться от средних значений этих величин в смежных с ними элементах [1]).

[1]) За исключением элементов, отделенных друг от друга поверхностями разрыва, если только мы вообще захотим ввести в рассмотрение (в сущности, фиктивные) поверхности разрыва

Даже в газообразных, не говоря уже о жидких и твердых, телах расстояния между молекулами столь малы по сравнению с макроскопическими неоднородностями изучаемых обычно полей, что почти всегда оказывается возможным одновременно удовлетворять обоим этим условиям. Конечно, возможны и такие случаи, когда приведенные условия взаимно исключают друг друга; так, например, длина волны жестких рентгеновских лучей, могущая служить мерой неоднородности поля этих лучей, меньше расстояния между молекулами материальных тел.

3. Оставляя в стороне подобные исключительные случаи, мы будем в дальнейшем под *макроскопическими величинами* понимать *средние значения физических величин в физически бесконечно малом объеме*. Другими словами, под макроскопическим значением произвольной физической (скалярной или векторной) величины ψ (например φ, $\mathbf{E}$, ρ) в данной точке P пространства мы будем понимать среднее из истинных или микроскопических значений этой величины в физически бесконечно малом объеме V, окружающем точку P:

$$\psi_{\text{макро}} = \overline{\psi}_{\text{микро}} = \frac{1}{V}\int \psi_{\text{микро}}\, dV. \tag{25.1}$$

Заметим, что, лишь введя это определение, мы придаем четкий смысл всем нашим предшествующим рассуждениям. В частности, ведь и внутри проводников атомистическое строение электричества проявляется в чрезвычайно быстрых колебаниях микроскопических значений физических величин в смежных точках пространства; так, например, микроскопическая плотность электричества ρ отлична от нуля лишь внутри электронов и атомных ядер. Таким образом, говоря о плотности заряда в поверхностном слое проводников, о постоянстве потенциала внутри них и т. д., мы, в сущности, говорим о средних значениях этих величин, определяемых уравнениями типа (25.1).

4. В последующем нам неоднократно придется находить уравнения для макроскопических величин, исходя из дифференциальных уравнений для микроскопических величин. При этом нам придется пользоваться следующим положением: среднее значение производной по координате (а также и по времени) от произвольной величины ψ равно производной от среднего значения этой величины:

$$\overline{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x}, \tag{25.2}$$

где черта сверху обозначает образование среднего.

Мы докажем эту теорему в предположении, что ψ — величина скалярная. Применяя затем эту теорему к отдельным слагающим произвольного вектора, мы сможем убедиться, что она остается справедливой и для вектор-

ных величин. Наконец, соответствующая теорема справедлива и для производных по времени, в чем можно убедиться простым дифференцированием формулы (25.1).

Согласно (25.1) среднее значение ψ в точке P равно

$$\overline{\psi}_P = \frac{1}{V}\int_V \psi\, dV,$$

где для определенности мы будем считать, что интеграл распространен по объему V физически бесконечно малой сферы поверхности S с центром в P. Подобно этому,

$$\overline{\psi}_{P'} = \frac{1}{V}\int_{V'} \psi\, dV,$$

где V' — объем равновеликой сферы поверхности S' с центром в точке P' (на рис. 31 изображено сечение этих сфер центральной плоскостью). Поэтому

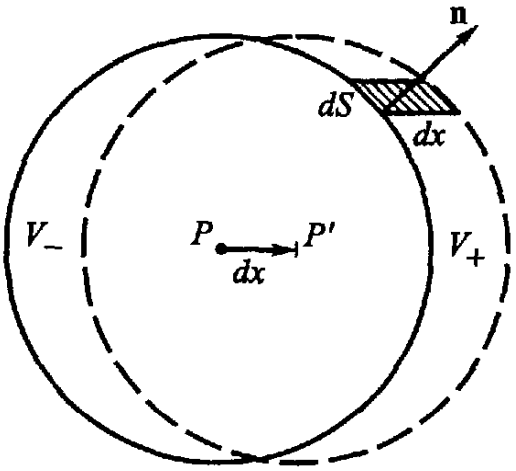

Рис. 31

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{\psi}_P = \lim_{PP'\to 0}\frac{\overline{\psi}_{P'} - \overline{\psi}_P}{PP'} = \frac{1}{V}\lim_{dx\to 0}\frac{\int_{V'}\psi\, dV - \int_V \psi\, dV}{dx}.$$

Но $\int_{V'}\psi\, dV - \int_V \psi\, dV = \int_{V_+}\psi\, dV - \int_{V_-}\psi\, dV$, где V_+ и V_- суть, соответственно, объемы переднего и заднего слоев, заключенных между поверхностями S и S'. Далее, прилегающий к элементу dS сферы S элемент объема dV_+ равен

$$dV_+ = dS\cdot dx\cdot\cos(\mathbf{n}, x) \qquad (\cos(\mathbf{n}, x) \geqslant 0),$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к сфере S, и, соответственно,

$$dV_- = -dS\cdot dx\cdot\cos(\mathbf{n}, x) \qquad (\cos(\mathbf{n}, x) \leqslant 0).$$

Следовательно,

$$\int_{V_+}\psi\, dV - \int_{V_-}\psi\, dV = \int_{\cos(\mathbf{n},x)\geqslant 0}\psi\cos(\mathbf{n}, x)\, dS\, dx + \int_{\cos(\mathbf{n},x)\leqslant 0}\psi\cos(\mathbf{n}, x)\, dS\, dx =$$

$$= dx\oint\psi\cos(\mathbf{n}, x)\, dS,$$

где последний интеграл распространяется по всей поверхности сферы S.

Таким образом, окончательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{\psi}_P = \frac{1}{V}\oint\psi\cos(\mathbf{n}, x)\, dS.$$

С другой стороны,

$$\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x}} = \frac{1}{V}\int_V\frac{\partial\psi}{\partial x}\, dV = \frac{1}{V}\int_V \mathbf{i}\,\mathrm{grad}\,\psi\cdot dV,$$

где $\mathbf{i}$ — единичный вектор по оси x. Ввиду постоянства этого вектора $\mathbf{i}\,\mathrm{grad}\,\psi = \mathrm{div}\,(\mathbf{i}\psi)$, откуда на основании теоремы Гаусса (17*)

$$\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x}} = \frac{1}{V}\int_V\mathrm{div}\,(\mathbf{i}\psi)\, dV = \frac{1}{V}\oint_S(\mathbf{ni})\psi\, dS = \frac{1}{V}\oint_S\psi\cos(\mathbf{n}, x)\, dS,$$

что совпадает с выражением для $\partial\overline{\psi}/\partial x$ Таким образом, уравнение (25.2) доказано.

§ 26. Вывод уравнений поля в диэлектриках путем усреднения микроскопического поля

1. В развитие идей, изложенных в предыдущем параграфе, мы поставим теперь задачу путем непосредственного усреднения уравнений истинного *микроскопического* поля вывести уравнения для средних *макроскопических* значений, характеризующих поле величин $\mathbf{E}$, φ, ρ и т. д., т. е. вывести уравнения, полученные нами несколько иным путем в § 22. При этом мы будем исходить из предположения, что основные уравнения электростатического поля

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \tag{10.2}$$

$$\nabla^2\varphi = -\operatorname{div}\mathbf{E} = -4\pi\rho \tag{11.1}$$

строго *справедливы* для истинного *микроскопического поля*, если под ρ понимать истинную плотность электричества, отличную от нуля лишь внутри отдельных атомов (вернее, внутри электронов и атомных ядер) [1].

2. Из (25.2) непосредственно вытекает, что среднее значение электрического вектора $\mathbf{E}$ равно градиенту от среднего значения потенциала φ, т. е. что (10.2) остается справедливым и для макроскопических величин. Уравнение же (11.1) принимает вид

$$\nabla^2\overline{\varphi} = -\operatorname{div}\overline{\mathbf{E}} = -4\pi\rho, \tag{26.1}$$

где под ρ надо понимать среднее значение истинной плотности электричества, т. е. сумму плотностей электричества свободного и связанного:

$$\rho = \rho_{\text{свбд}} + \rho_{\text{свзн}}. \tag{26.2}$$

Однако плотность связанного в диэлектрике электричества определяется его поляризацией, т. е. в свою очередь зависит от напряженности поля $\overline{\mathbf{E}}$. Поэтому уравнением (26.1) удобно будет пользоваться лишь в том случае, если из него исключить плотность связанного электричества, для чего необходимо определить зависимость $\rho_{\text{свзн}}$ от напряженности поля $\mathbf{E}$.

3. Выделим в диэлектрике поверхностью S некоторый объем V, размеры которого велики по сравнению с расстояниями между молекулами, и предположим для простоты, что диэлектрик состоит из нейтральных молекул и что свободных, не связанных с молекулами диэлектрика зарядов в объеме нет. Вообще говоря, поверхность S пересечет некоторое число молекул так,

[1] Предполагается, что эти электроны и ядра покоятся (электростатика!). Иными словами, с точки зрения классической электронной теории, мы должны пока отвлечься от движения этих элементарных частиц, или, вернее, определять *среднее по времени* интересующих нас величин. С точки же зрения квантовой механики, атомы в нормальном состоянии действительно представляют собой стационарную электрическую систему.

что одни из зарядов этих молекул окажутся вне объема V, а другие — внутри него. Поэтому, несмотря на то, что каждая молекула диэлектрика в целом нейтральна, общий заряд объема V, а стало быть, и средняя плотность электричества в нем, может оказаться отличным от нуля. Чтобы определить величину этого заряда, заменим для упрощения молекулы диэлектриков эквивалентными диполями (рис. 32) и рассмотрим физически бесконечно малый элемент dS поверхности S. Средняя векторная длина $\mathbf{l}$ диполей, находящихся в физически бесконечно малом слое диэлектрика, прилегающем к dS, будет связана с поляризацией $\mathbf{P}$ этого слоя соотношением (20.7)

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = N\mathbf{p} = Ne\mathbf{l},$$

откуда

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{P}}{Ne}.$$

Элемент dS пересечет все те диполи, центры которых расположены в прилегающем к нему слое толщины $l|\cos(\mathbf{l}, \mathbf{n})|$ (рис. 33).

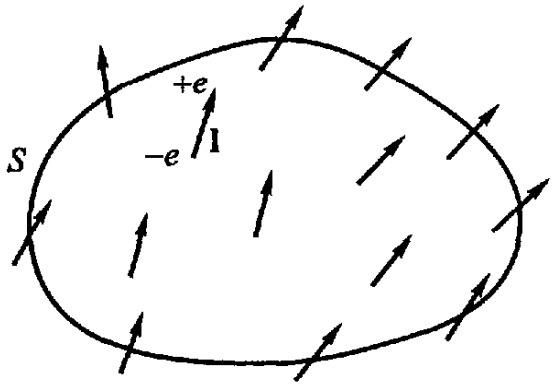

Рис. 32

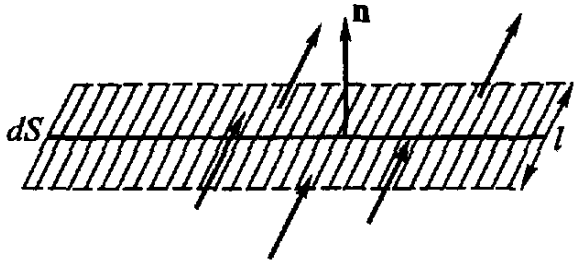

Рис. 33

Объем этого слоя равен $dS \cdot l|\cos(\mathbf{l}, \mathbf{n})|$. Следовательно, число диполей [1], рассекаемых элементом dS надвое, равно $Nl\,dS \times$ $\times\,|\cos(\mathbf{l}, \mathbf{n})|$, абсолютная же величина некомпенсированного заряда в объеме V, соответствующего рассматриваемым диполям, равна

$$|de| = Nel\,dS|\cos(\mathbf{l}, \mathbf{n})| = P|\cos(\mathbf{P}, \mathbf{n})|\,dS = |P_n|\,dS.$$

При этом, если угол между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — *внешняя* нормаль к dS) острый, т. е. $\cos(\mathbf{P}, \mathbf{n}) > 0$, то внутри поверхности S находятся

[1]) Число молекул в микроскопически тонком слое можно принять равным произведению их среднего числа N в единице объема на объем слоя лишь в том случае, если расположение молекул подчинено закону случайности, как это имеет место в газообразных и жидких телах. В кристаллических же веществах, где расположение молекул строго упорядочено, число молекул в таком слое может существенно зависеть от положения границ этого слоя по отношению к узловым точкам кристаллической решетки. Поэтому, строго говоря, приведенный вывод формулы (26.3) в случае твердых диэлектриков нуждается в уточнении.

отрицательные заряды рассекаемых ею диполей ($de < 0$), в противном же случае, при $\cos(\mathbf{P}, \mathbf{n}) < 0$, заряды положительные ($de > 0$). Стало быть, алгебраическая величина нескомпенсированного заряда de равна $de = -P_n\, dS$.

4. Чтобы определить общий заряд e, находящийся в объеме V, достаточно, очевидно, проинтегрировать полученное выражение по всей граничной поверхности объема S; воспользовавшись затем (17*), получим

$$e = -\oint\limits_S P_n\, dS = -\oint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{P}\cdot dV.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$e = \int\limits_V \overline{\rho}_{\text{связн}}\, dV,$$

так что окончательно получаем уже знакомую нам формулу (21.2):

$$\overline{\rho}_{\text{связн}} = -\operatorname{div}\mathbf{P}. \tag{26.3}$$

Таким образом, плотность связанных зарядов в диэлектрике определяется дивергенцией его поляризации. В частности, если $\mathbf{P}$ постоянно, то, рассматривая, например, поверхность куба, легко усмотреть и непосредственно, что передняя и задняя (по направлению $\mathbf{P}$) грани этого куба пересекут одинаковое число диполей; поэтому алгебраическая сумма зарядов (а стало быть, и средняя плотность электричества внутри куба) будет равна нулю.

Отметим, что, согласно (21.7),

$$\operatorname{div}\mathbf{P} = \operatorname{div}\alpha\mathbf{E} = \alpha\operatorname{div}\mathbf{E} + \mathbf{E}\operatorname{grad}\alpha$$

и, следовательно, $\operatorname{div}\mathbf{P}$ и $\rho_{\text{связн}}$ могут быть отличны от нуля лишь в том случае, если диэлектрик неоднороден ($\operatorname{grad}\alpha \neq 0$), либо если $\operatorname{div}\mathbf{E} \neq 0$. Последнее неравенство, как следует из (6.5), означает (при $\alpha = \text{const}$), что в диэлектрике находятся свободные заряды, не связанные с его молекулами.

5. Справедливость формулы (26.3) предполагает, конечно, непрерывность вектора $\mathbf{P}$; на поверхностях же разрыва сплошности этого вектора формула (26.3), согласно (6.7) и (6.8), принимает вид

$$\overline{\sigma}_{\text{связн}} = -\operatorname{Div}\mathbf{P} = -(P_{2n} - P_{1n}), \tag{26.4}$$

где $\overline{\sigma}_{\text{связн}}$ есть средняя поверхностная плотность связанных зарядов на поверхности разрыва, а $\operatorname{Div}\mathbf{P}$ — поверхностная дивергенция вектора $\mathbf{P}$. Так как $\mathbf{P}$ равно $\alpha\mathbf{E}$, то поверхности разрыва этого вектора, т. е. поверхностные заряды связанного электричества, должны совпадать либо с поверхностями раздела двух

сред (скачок поляризуемости α), либо с поверхностями разрыва вектора $\mathbf{E}$; последние поверхности, как следует из (22.8), в свою очередь совпадают (при $\alpha = \text{const}$) с поверхностными зарядами *свободного* электричества.

В справедливости формулы (26.4) можно убедиться также путем непосредственного рассмотрения расположения диполей, индуцированных в молекулах диэлектрика. Очевидно, что появление поверхностных связанных зарядов объясняется тем, что заряды диполей, прилегающих к противоположным сторонам поверхности разрыва вектора поляризации, не могут взаимно компенсироваться.

6. Возвратимся к формуле (26.1). Воспользовавшись формулами (26.2) и (26.3), мы можем ее записать в следующем виде:

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{E}} = 4\pi(\overline{\rho}_{\text{свбд}} + \overline{\rho}_{\text{свзн}}) = 4\pi\overline{\rho}_{\text{свбд}} - 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P},$$

или

$$\operatorname{div}(\overline{\mathbf{E}} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\overline{\rho}_{\text{свбд}}.$$

Это уравнение совпадает с формулой (22.2), ибо в ней по самому ее смыслу под $\overline{\mathbf{E}}$ нужно понимать *среднюю* напряженность микроскопического поля $\mathbf{E}$, а под ρ — *среднюю* плотность *свободного* электричества $\rho_{\text{свбд}}$.

Из (21.5) и из (10.2) непосредственно следует система дифференциальных уравнений макроскопического поля в диэлектрике [система (А), § 22], что и требовалось доказать.

§ 27. Два класса диэлектриков. Квазиупругие диполи

1. Этот и два последующих параграфа мы посвятим молекулярной теории диэлектриков, которая позволяет связать свойства диэлектрика с его молекулярным строением, а также определить зависимость диэлектрической проницаемости от температуры диэлектрика, его плотности и т. д.

Нужно различать два рода или два класса диэлектриков (с нейтральными молекулами): 1) диэлектрики, молекулы которых построены из электрических зарядов столь симметрично, что в отсутствие внешнего электрического поля их электрический дипольный момент равен нулю, и 2) диэлектрики, молекулы которых в отсутствие внешнего поля обладают некоторым определенным моментом $\mathbf{p}_0$. К первому классу относятся, например, газы N_2, H_2, CO_2, CH_4, CCl_4 в газообразном и жидком состоянии и т. д.; ко второму же классу — например, газы SO_2, H_2S, NH_3 и такие жидкости, как вода, нитробензол, эфиры, органические кислоты, в большинстве случаев обладающие большой диэлектрической проницаемостью.

2. При наличии внешнего поля $\mathbf{E}$ молекулы диэлектриков первого класса поляризуются, т. е. симметрия расположения их зарядов нарушается, и каждая молекула приобретает некоторый электрический момент $\mathbf{p}$, который (при не слишком больших полях) пропорционален напряженности поля:

$$\mathbf{p} = \beta \mathbf{E}. \tag{27.1}$$

Коэффициент β носит название *поляризуемости молекул.*

Что касается молекул второго класса, то их электрический момент $\mathbf{p}_0$ также будет изменяться под воздействием внешнего поля. Однако гораздо большее значение будет иметь поворот оси молекулы по направлению поля под воздействием приложенного к ней момента сил:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_0 \mathbf{E}]$$

[ср. уравнение (17.6)]. По сравнению с этим поворотом оси, т. е. с изменением направления вектора $\mathbf{p}_0$, изменение момента под воздействием поля играет практически во всех случаях столь незначительную роль, что им можно вовсе пренебречь [1]).

Соответственно этому мы будем в дальнейшем рассматривать только два предельных случая: 1) молекулы, момент которых пропорционален напряженности поля $\mathbf{E}$ (их мы будем для краткости называть молекулами *квазиупругими*), и 2) молекулы с отличным от нуля постоянным по величине моментом p_0 (их мы будем называть молекулами *твердыми*). Диэлектрики второго класса будут подробнее рассмотрены в § 29.

В случае квазиупругих молекул направление моментов всех молекул параллельно полю, и, стало быть, из (27.1) следует, что

$$\mathbf{p} = \sum \mathbf{p} = N\mathbf{p} = N\beta \mathbf{E}, \tag{27.2}$$

где N — число молекул в единице объема. Сравнивая это с (21.7), мы приходим к следующему соотношению между поляризуемостью диэлектрика α и поляризуемостью его молекул β:

$$\alpha = N\beta. \tag{27.3}$$

3. В дальнейшем мы, как уже упоминалось, будем иногда для упрощения заменять рассмотрение совокупности реальных молекул диэлектрика рассмотрением совокупности эквивалентных им диполей того же момента $\mathbf{p}$.

В том случае, когда мы имеем дело с «квазиупругими» молекулами, момент эквивалентного диполя определится на основании (27.1) формулой

$$\mathbf{p} = e\mathbf{l} = \beta \mathbf{E}. \tag{27.4}$$

[1]) За исключением быстропеременных полей (см. § 101).

В частности, при отсутствии внешнего поля длина диполя должна обращаться в нуль, и заряды его должны взаимно нейтрализоваться, раздвигаясь лишь при наличии внешнего поля **E**.

Диполь, момент которого пропорционален полю, называется *диполем квазиупругим*, потому что формула (27.4) равносильна предположению, что между зарядами диполя действует квазиупругая сила взаимного притяжения $F = \varkappa l$, пропорциональная расстоянию l между зарядами.

Действительно, помимо F, на каждый заряд действует сила внешнего поля $\pm eE$, которая должна уравновешивать силу F. Стало быть, длина квазиупругого диполя должна определяться соотношением

$$\varkappa l = eE,$$

где $\varkappa$ — мера упругих сил или «коэффициент упругости» диполя. Таким образом, момент диполя должен быть равен

$$p = el = \frac{e^2}{\varkappa} E,$$

что совпадает с (27.4), если положить

$$\beta = \frac{e^2}{\varkappa}, \quad \varkappa = \frac{e^2}{\beta}. \tag{27.5}$$

4. В действительности каждая молекула представляет собою сложную динамическую систему зарядов, подчиняющихся квантовым закономерностям. Однако в интересующих нас отношениях эти молекулы эквивалентны простейшей электростатической модели — элементарному диполю (см. § 20). Для того чтобы зависимость момента эквивалентного диполя от внешнего поля была такой же, как и зависимость от него момента реальной «квазиупругой» молекулы, нужно допустить, что между зарядами этого диполя действуют некоторые силы неэлектростатического происхождения, которые *в совокупности* с кулоновым притяжением этих зарядов оказываются эквивалентными квазиупругой силе. Согласно теореме Ирншоу (см. § 19) лишь введение подобных неэлектростатических сил, соответствующих понятию связей аналитической механики, может обеспечить устойчивость электростатической модели молекулы.

§ 28. Отличие действующего на диполь поля от среднего [1])

1. В предыдущем параграфе при выводе соотношения (27.3) мы неявно допустили некоторую неточность. А именно, в (27.2)

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E} \tag{28.1}$$

[1]) При первом чтении этот параграф можно опустить.

мы должны, очевидно, понимать под $\mathbf{p}$ *средний* момент диполей, находящихся в физически бесконечно малом объеме диэлектрика, а под $\mathbf{E}$ — напряженность *среднего макроскопического* поля. Чтобы получить формулу (27.3)

$$\alpha = N\beta,$$

мы внесли в (28.1) соотношение (27.1)

$$\mathbf{p} = \beta\mathbf{E},$$

справедливое для отдельного диполя. Следовательно, мы неявно допустили, что это последнее соотношение остается справедливым и для связи между *средним* моментом диполя и *средней* макроскопической напряженностью поля.

Между тем, по определению, β есть коэффициент пропорциональности между моментом эквивалентного молекуле диполя и электрической силой, действующей на его заряды. Эта сила определяется напряженностью *внешнего* (по отношению к данному диполю) электрического поля в месте нахождения диполя, или, кратко выражаясь, *в центре* диполя. Стало быть, средний момент диполей должен быть равен

$$\mathbf{p} = \beta\mathbf{E}', \tag{28.2}$$

где $\mathbf{E}'$ есть *средняя* напряженность поля в точках расположения *центров диполей*, и притом поля, *внешнего* по отношению к каждому отдельному диполю. Между тем под $\mathbf{E}$ понимается средняя напряженность поля в диэлектрике, при вычислении которой учитывается поле *всех* диполей во *всех* точках диэлектрика, а не только в центрах диполей. Очевидно, что $\mathbf{E}'$ будет, вообще говоря, отличаться от $\mathbf{E}$ и что формулу (27.2) нужно заменить формулой

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\beta\mathbf{E}'.$$

Так как $\mathbf{E}'$, очевидно, пропорционально $\mathbf{E}$, то основное уравнение (21.7), конечно, остается в силе, однако поляризуемость единицы объема диэлектрика α *не равна* $N\beta$. Обозначая коэффициент поляризуемости, вычисленный без учета отличия $\mathbf{E}'$ от $\mathbf{E}$, через α_0:

$$\alpha_0 = N\beta, \quad \mathbf{P} = \alpha_0\mathbf{E}', \tag{28.2'}$$

мы поставим задачу найти зависимость между α и α_0, для чего в свою очередь необходимо найти зависимость между $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{E}$.

2. Чтобы определить напряженность поля $\mathbf{E}'$ в центре какого-либо диполя O, опишем из этого центра сферу S физически бесконечно малого радиуса [1]). Поле $\mathbf{E}'$ в точке O будет слагаться,

[1]) Результат вычисления, очевидно, не может зависеть от формы поверхности S. Сферическая форма выбрана нами лишь для удобства вычислений.

во-первых, из поля $\mathbf{E}_1$ всех зарядов, расположенных вне сферы S, и, во-вторых, из поля $\mathbf{E}_2$ зарядов, лежащих внутри S, за исключением зарядов самого диполя O.

Если бы мы вырезали и удалили из диэлектрика сферу S, то поле в образовавшейся сферической полости и было бы, очевидно, равно полю $\mathbf{E}_1$. Поскольку заряды, возбуждающие это поле, находятся вне сферы S, при определении $\mathbf{E}_1$ можно пренебречь атомистической структурой диэлектрика и заменить совокупность его молекул непрерывно распределенным по его объему электрическим моментом плотности $\mathbf{P}$. Далее, поскольку сфера имеет физически бесконечно малые размеры, поляризация $\mathbf{P}$ окружающего сферу диэлектрика будет постоянной по величине и направлению. Итак, $\mathbf{E}_1$ равно напряженности поля в сферической полости, вырезанной внутри равномерно поляризованного диэлектрика. До удаления сферы поле в равномерно поляризованном диэлектрике однородно и равно средней напряженности макроскопического поля $\mathbf{E}$. По удалении же сферы S из этого поля, очевидно, вычтется поле равномерно поляризованной сферы S, напряженность которого, согласно (24.3), равна $-{}^4\!/_3\pi\mathbf{P}$. Стало быть,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} - \left(-\frac{4}{3}\pi\mathbf{P}\right) = \mathbf{E} + \frac{4}{3}\pi\mathbf{P}. \tag{28.3}$$

Таким образом, поле $\mathbf{E}_1$ постоянно по всему объему сферы S и не зависит от ее диаметра.

Что же касается величины $\mathbf{E}'$, которую мы для краткости назовем напряженностью «действующего на диполь» или «эффективного» электрического поля, то она, согласно изложенному, равна

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{E} + \frac{4}{3}\pi\mathbf{P} + \mathbf{E}_2. \tag{28.4}$$

Таким образом, задача определения эффективного поля $\mathbf{E}'$ сводится к задаче определения среднего поля $\mathbf{E}_2$, возбуждаемого в центре диполя O прочими зарядами, лежащими внутри сферы S. Напряженность этого поля может существенно зависеть от строения диэлектрика, — в частности, от взаимного расположения его диполей, — и поэтому, строго говоря, никакой универсальной зависимости $\mathbf{E}_2$ от β, N и $\mathbf{E}$ не существует. Однако при некоторых простейших предположениях о строении диэлектрика, как мы сейчас покажем, поле $\mathbf{E}_2$ оказывается равным нулю.

3. Введем декартову систему координат с центром в O. Согласно (10.4), слагающая E_x поля, возбуждаемого в точке O отдельным диполем, обладающим координатами x, y, z, равна

$$E_x = \frac{3(\mathbf{pR})x - p_x R^2}{R^5} = \frac{p_x(2x^2 - y^2 - z^2) + 3x(p_y y + p_z z)}{R^5}.$$

Стало быть, слагающая по оси x поля $\mathbf{E}_2$ будет равна

$$E_{2x} = \sum p_x \frac{x^2 - y^2}{R^5} + \sum p_x \frac{x^2 - z^2}{R^5} + 3\sum p_y \frac{xy}{R^5} + 3\sum p_z \frac{xz}{R^5}, \tag{28.5}$$

где суммирование должно распространяться на все диполи, находящиеся внутри физически бесконечно малой сферы S (за исключением диполя, находящегося в ее центре) [1].

Допустим, что диполи диэлектрика расположены по узлам кубической пространственной решетки. В этом случае моменты $\mathbf{p}$ всех диполей внутри физически бесконечно малой сферы S будут одинаковы по величине и направлению, и в формуле (28.5) можно вынести p_x, p_y и p_z за знак суммы. Приведем оси координат x, y, z в совпадение с главными осями кристалла. Если координаты какого-либо из диполей, лежащего внутри S, равны $x = a$, $y = b$, $z = c$, то внутри S найдется также диполь с координатами $x = b$, $y = a$, $z = c$. Отсюда следует, что $\sum \frac{x^2 - y^2}{R^5} = 0$. Кроме того, внутри S найдется также и диполь с координатами $x = -a$, $y = b$, $z = c$, откуда следует, что $\sum \frac{xy}{R^5} = 0$, и т. д. Таким образом, в этом случае, действительно, $\mathbf{E}_2 = 0$.

Тот же результат ($\mathbf{E}_2 = 0$) получится и в случае совершенно беспорядочного расположения молекул диэлектрика (газообразный диэлектрик). Действительно, если все положения любой выделенной молекулы внутри сферы S равновероятны и не зависят от положения других молекул, то среднее значение поля любой молекулы в центре сферы O равно нулю [2]. Нужно, однако, иметь в виду, что предположение об отсутствии всякой корреляции между положениями различных молекул равносильно пренебрежению: 1) конечными размерами молекул и 2) дипольным взаимодействием молекул друг с другом.

4. При $\mathbf{E}_2 = 0$ формула (28.4) принимает вид

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4}{3}\pi\mathbf{P}. \tag{28.6}$$

Внося это в (28.2′), получим

$$\mathbf{P} = \alpha_0\mathbf{E}' = \alpha_0\mathbf{E} + \frac{4}{3}\pi\alpha_0\mathbf{P},$$

[1] Если при определении среднего значения $\mathbf{E}_2$ учитывать поле *всех* диполей, находящихся внутри сферы S, во *всех* точках этой сферы, а не только в центре диполя O, то это среднее значение $\mathbf{E}_2$ окажется, очевидно, равным $-\frac{4}{3}\pi\mathbf{P}$, так что $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ будет равно $\mathbf{E}$.

[2] Это утверждение справедливо только для *среднего* поля. Фактически, поле $\mathbf{E}_2$ в системе случайно расположенных диполей описывается функцией распределения конечной ширины, центрированной при $E_2 = 0$.

откуда

$$\mathbf{P} = \frac{\alpha_0}{1 - (4/3)\pi\alpha_0}\mathbf{E} = \alpha\mathbf{E},$$

и, следовательно,

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 - (4/3)\pi\alpha_0}. \tag{28.7}$$

Таким образом, тот факт, что «действующее» поле $\mathbf{E}'$ отлично от среднего поля $\mathbf{E}$, сказывается лишь на числовом значении коэффициента поляризуемости диэлектрика. В частности, соотношение между диэлектрической проницаемостью и постоянной α_0 получится из (22.5):

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha = 1 + \frac{4\pi\alpha_0}{1 - (4/3)\pi\alpha_0},$$

откуда

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4}{3}\pi\alpha_0. \tag{28.8}$$

Эта формула и формула (28.6) называются *формулами Лоренц–Лорентца*. Внося в (28.8) значение α_0 из (28.2′), получаем

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4}{3}\pi N\beta. \tag{28.9}$$

При $\alpha_0 \ll 1$ (т. е. при ε, близком к единице) α может быть принято равным α_0, а $\mathbf{E}'$ равным $\mathbf{E}$, и мы возвращаемся к прежним формулам, которые, таким образом, оказываются вполне справедливыми для слабо поляризующихся диэлектриков. Это и понятно, ибо в слабо поляризующихся диэлектриках влияние диполей друг на друга существенной роли не играет. Между тем отличие $\mathbf{E}'$ от $\mathbf{E}$ обусловливается, в сущности, именно взаимодействием диполей диэлектрика, учитываемым вторым членом формулы (28.6). Если N сравнительно мало (например в газах), то α может быть принято равным α_0.

5. Следствия, вытекающие из формулы Лоренц–Лорентца, будут рассмотрены в § 29, пока же мы отметим еще раз, что ее вывод основан на ряде допущений и пренебрежений. В частности, при замене поля отдельной молекулы или атома диэлектрика полем эквивалентного диполя [формула (28.5)] вовсе не было учтено, что эта замена законна лишь на расстояниях, значительно превышающих размеры атома (см. § 20), тогда как в твердых и жидких диэлектриках расстояния между смежными атомами сравнимы с размерами этих атомов.

Таким образом, из предыдущего, в сущности, с несомненностью вытекает только необходимость учитывать различие между средним макроскопический полем $\mathbf{E}$ и средним эффективным полем $\mathbf{E}'$. Что же касается формулы Лоренц–Лорентца, то, хотя справедливость ее строго доказана лишь при весьма специальных предположениях, все же она, как мы увидим в § 29, хорошо оправдывается на опыте в применении к жидким диэлектрикам

с *квазиупругими диполями* [в газообразных средах ε настолько близко к 1, что (28.8) практически не отличимо от (22.5) с $\alpha = \alpha_0$].

О неприменимости формулы Лоренц–Лорентца к диэлектрикам с твердыми диполями см. следующий параграф.

§ 29. Поляризация диэлектриков, молекулы которых обладают постоянным электрическим моментом. Зависимость диэлектрической проницаемости от температуры

1. Как уже упоминалось в § 27, если молекулы диэлектрика и в отсутствие внешнего поля обладают электрическим моментом p_0, то изменением этого момента под воздействием поля можно пренебречь. Поляризация диэлектрика обусловливается тем, что силы электрического поля стремятся повернуть оси молекул по направлению вектора $\mathbf{E}$, т. е. стремятся упорядочить ориентацию электрических моментов молекул. Однако поляризация диэлектрика не сразу достигает максимума, соответствующего установке всех молекул по направлению поля, а возрастает пропорционально полю $\mathbf{E}$, ибо беспорядочное тепловое движение (в частности, вращение) молекул и их взаимные столкновения стремятся нарушить упорядоченность ориентации их осей, т. е. стремятся деполяризовать диэлектрик. Таким образом, фактическая поляризация определяется соотношением между упорядочивающим воздействием поля и противоположным воздействием теплового движения. Очевидно, что поляризация диэлектриков этого класса будет резко падать с повышением температуры.

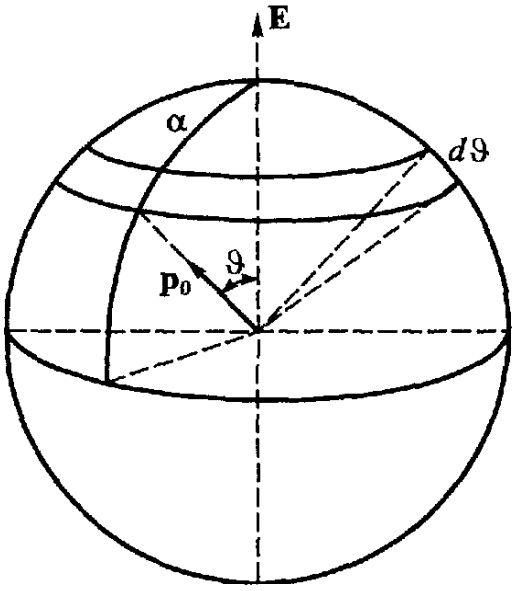

Рис 34

2. Пусть в единице объема диэлектрика содержится N молекул с постоянным электрическим моментом p_0. Опишем около произвольной точки диэлектрика сферу радиусом, равным единице, и введем на ней полярные координаты: ϑ — полярный угол и α —долгота, выбрав полярную ось параллельной вектору $\mathbf{E}$. Направление момента $\mathbf{p}_0$ произвольной молекулы будет характеризоваться координатами ϑ и α «следа» оси этой молекулы на единичной сфере, т. е. координатами точки пересечения поверхности этой сферы с продолжением оси молекулы (рис. 34). Если бы поле $\mathbf{E}$ отсутствовало, то оси молекул

были бы равномерно распределены по всем направлениям. Это значит, что число молекул, след оси которых лежит на данном элементе единичной сферы, было бы пропорционально этому элементу. В частности, число dN молекул, полярный угол осей которых лежит в пределах от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, т. е. следы которых лежат на шаровом поясе поверхности $2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta$, заключенном между двумя параллельными кругами ϑ и $\vartheta + d\vartheta$, должно быть равно

$$dN = c \sin\vartheta\, d\vartheta, \tag{29.1}$$

где c — некоторый постоянный коэффициент.

Для того чтобы определить распределение осей молекул при наличии ориентирующего их внешнего поля $\mathbf{E}$, необходимо прибегнуть к известной теореме статистической механики, так называемой *теореме Больцмана*. Теорема эта гласит: в условиях термодинамического равновесия закон распределения молекул при наличии консервативного поля сил (в нашем случае — поля электростатического) отличается от закона их распределения в отсутствие этого поля множителем $e^{-U/kT}$, где U — потенциальная энергия молекулы в рассматриваемом поле сил, T — абсолютная температура, а k — универсальная постоянная Больцмана, равная $1{,}38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К.

В нашем случае потенциальная энергия дипольной молекулы в электрическом поле сил равна, согласно (15.8),

$$U = -p_0 E \cos\vartheta.$$

Стало быть, распределение молекул определится ввиду (29.1) уравнением

$$dN = c \exp\frac{p_0 E \cos\vartheta}{kT} \sin\vartheta\, d\vartheta = c e^{a\cos\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta, \tag{29.2}$$

где dN — число молекул, углы осей которых с направлением поля лежат в пределах между ϑ и $d\vartheta$, и где введено обозначение

$$\alpha = \frac{p_0 E}{kT}. \tag{29.3}$$

Таким образом, отклонение распределения молекул от равномерного, определяемое фактором $\exp\frac{p_0 E\cos\vartheta}{kT}$, тем больше, чем больше напряженность поля и чем меньше температура. Это и понятно, ибо с повышением температуры растет энергия теплового движения, нарушающего упорядоченность распределения.

3. В газах и в разбавленных растворах дипольных жидкостей можно совершенно пренебречь разницей между действующим на диполь полем $\mathbf{E}'$ (см. § 28) и средним макроскопическим полем $\mathbf{E}$. При нормальных температурах величина a во всех практически доступных внешних полях [1]) оказывается значительно меньше

[1]) О молекулярных полях см в конце параграфа.

единицы. Ввиду этого можно с достаточной точностью заменить фактор $e^{a\cos\vartheta}$ первыми двумя членами его разложения в ряд по степеням a. При этом (29.2) примет вид

$$dN = c(1 + a\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta \qquad (a \ll 1).$$

Коэффициент пропорциональности c можно определить из того условия, что общее число всех молекул в единице объема должно равняться N:

$$\int dN = \int_0^\pi c(1 + a\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = 2c = N.$$

Следовательно, (29.2) можно окончательно записать так:

$$dN = \frac{1}{2} N(1 + a\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta \qquad (a \ll 1). \tag{29.4}$$

Зная, таким образом, распределение осей молекул по направлениям, нетрудно определить и их результирующий электрический момент, т. е. поляризацию диэлектрика $\mathbf{P}$. Вектор $\mathbf{P}$ параллелен напряженности поля $\mathbf{E}$, поэтому числовое значение его должно равняться сумме проекций моментов всех N молекул на направление $\mathbf{E}$. Общий момент тех dN молекул, оси которых лежат между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$, равен $p_0\, dN$, а проекция этого момента на направление $\mathbf{E}$ равна $p_0\, dN\cos\vartheta$. Следовательно, поляризация диэлектрика P равна

$$P = \int p_0\cos\vartheta\, dN = \frac{1}{2} p_0 N \int_0^\pi \cos\vartheta(1 + a\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{3} N p_0 a,$$

или, по внесении значения a из (29.3),

$$P = \frac{N p_0^2}{3kT} E = \alpha E, \tag{29.5}$$

где

$$\alpha = \frac{N p_0^2}{3kT}. \tag{29.6}$$

Следует заметить, что приведенные вычисления верны с точностью до второго порядка по параметру a включительно, а не до первого, как кажется на первый взгляд. Действительно, если в разложении функции $ce^{a\cos\vartheta}$ сохранить квадратичные члены, а затем обычным способом вычислить нормировочную постоянную c, то вместо формулы (29.4) получится

$$dN = \frac{N}{2(1 + a^2/6)}\left(1 + a\cos\vartheta + \frac{a^2\cos^2\vartheta}{2}\right)\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

или с той же точностью

$$dN = \frac{1}{2} N\left(1 + a\cos\vartheta + \frac{1}{2} a^2\cos^2\vartheta - \frac{1}{6} a^2\right)\sin\vartheta\, d\vartheta \qquad (a \ll 1). \tag{29.4a}$$

После этого в выражении для P добавится интеграл

$$\frac{1}{2} p_0 N \int_0^{\pi} \cos\vartheta \left(\frac{1}{2} a^2 \cos^2\vartheta - \frac{1}{6} a^2\right) \sin\vartheta \, d\vartheta,$$

который, очевидно, обращается в нуль [1]). Этим замечанием мы воспользуемся в § 31 при разборе вопроса об энергии газообразных диэлектриков с твердыми диполями. Таким образом, учет квадратичных членов не меняет окончательное выражение для P.

Отметим еще раз, что применимость формул (29.5) и (29.6) ограничена условием

$$a = \frac{p_0 E}{kT} \ll 1. \tag{29.7}$$

При нарушении этого условия в очень сильном поле или при очень низкой температуре P перестает возрастать пропорционально E и приближается к максимально возможному значению, соответствующему установке всех диполей по направлению поля. «Поляризация насыщения», очевидно, равна

$$P_{\text{нас}} = N p_0 \text{ [2])}.$$

4. Примем теперь во внимание, что в действительности молекулы всех тел, вне зависимости от того, обладают ли они некоторым постоянным электрическим моментом p_0 или нет, обладают также некоторой квазиупругой поляризуемостью β. Поэтому поляризация диэлектрика с твердыми диполями слагается из поляризации квазиупругой [уравнение (27.3)] и из поляризации, соответствующей упорядочению ориентации твердых диполей [уравнение (29.6)], т. е. определяется выражением

$$\varepsilon - 1 = 4\pi\alpha = 4\pi N\left(\beta + \frac{1}{3}\frac{p_0^2}{kT}\right). \tag{29.8}$$

Чтобы выявить зависимость ε от температуры T и плотности τ диэлектрика, выразим число N молекул в единице его объема через его плотность τ, его молекулярную массу M и через универсальную постоянную Авогадро $N_0 = 6{,}06 \cdot 10^{23}$, равную числу молекул в одном моле вещества. Так как τ и M равны, соответственно, массе единицы объема и массе одного моля, то

$$N = \frac{\tau N_0}{M}. \tag{29.9}$$

[1]) Вообще, все члены с четной степенью a в разложении $\exp(a\cos\vartheta)$ дают для P нулевой вклад.

[2]) Поляризация веществ с твердыми диполями в сильных полях будет подробнее рассмотрена в § 72 в связи с намагничением пара- и ферромагнетиков.

Внося это в (29.8), получим

$$\frac{\varepsilon-1}{\tau}=\frac{4\pi N_0}{M}\left(\beta+\frac{1}{3}\frac{p_0^2}{kT}\right). \tag{29.10}$$

В этой формуле ярко проявляется тот факт, что поляризация твердых диполей не представляет собой внутримолекулярного процесса, как в случае диполей квазиупругих, а определяется соотношением между ориентирующим воздействием электрического поля и дезориентирующим воздействием теплового движения. А именно, диэлектрическая проницаемость с квазиупругими диполями ($p_0=0$) при постоянной плотности τ от температуры не зависит [1]), тогда как в диэлектриках с твердыми диполями обусловленная этими диполями доля поляризуемости $\frac{\varepsilon-1}{4\pi}$ при постоянном τ обратно пропорциональна абсолютной температуре [2]).

Зависимость ε от T и τ, выражаемая формулой (29.10), хорошо подтверждается на опыте как для диэлектриков с квазиупругими диполями (N_2, H_2, CO_2, CH_4, CCl_4 и т. д.), так и для диэлектриков с диполями твердыми (H_2O, SO_2, HCl, NH_3 и т. д.), если исследуемые диэлектрики находятся в газообразном состоянии (о жидкостях см. ниже). В частности, пользуясь формулой (29.10), можно по измеренной зависимости ε от T вычислить электрический момент молекулы диэлектрика; для большинства молекул с «твердыми диполями» p_0 оказывается порядка 10^{-18} абс. (электростатических) единиц. К тем же результатам приводит и непосредственное определение момента отдельных молекул, основанное на измерении отклонения, которое испытывает в неоднородном электрическом поле в вакууме пучок молекул, влетающих в это поле (метод Штерна).

5. Заметим, что в формулах (29.6) и (29.10) не учтено различие между средним значением напряженности электрического поля E и средним значением E' поля, действующего на молекулы диэлектрика (см. § 28). Поэтому эти формулы применимы только в слабо поляризующихся средах ($a\ll 1$). В случае диэлектриков с квазиупругими диполями учет отличия действующего поля E' от

[1]) При рассмотрении диэлектриков с упругими диполями мы вовсе не учитывали теплового движения молекул, что, конечно, допустимо в первом приближении. Можно, однако, показать, что и при более точном рассмотрении вопроса средний момент каждой молекулы $p=\beta E$ от температуры не зависит См., например, *Дебай П.* Избранные труды Статьи. 1909–1965. — Л.: Наука, 1987.

[2]) Впоследствии (см § 101) мы увидим, что диэлектрики этих двух типов существенно отличаются также своим поведением в быстропеременных электрических полях.

среднего поля E приводит к формуле Лоренц–Лорентца (28.8):

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{4\pi}{3}N\beta=\frac{4\pi N_0\tau}{3M}\beta, \tag{29.11}$$

которая хорошо подтверждается для диэлектрических жидкостей этого класса (поляризуемость которых α не мала по сравнению с 1).

Некоторое время было распространено предположение, что отличие действующего поля $\mathbf{E}'$ от среднего поля $\mathbf{E}$ выражается формулой (28.6) не только в диэлектриках с квазиупругими диполями, но и в диэлектриках с твердыми диполями. Из этого предположения вытекало, что при значительном отличии α от единицы формула (29.10) должна быть заменена формулой

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{4\pi N_0\tau}{3M}\left(\beta+\frac{p_0^2}{3kT}\right), \tag{29.12}$$

являющейся обобщением формулы Лоренц–Лорентца (28.9) и применимой к диэлектрикам любого класса.

Однако результаты экспериментального исследования дипольных жидкостей (вода, спирты, эфиры и т. п.) вовсе не согласуются с формулой (29.12) [1]. Это вполне понятно, так как исходное для этой формулы лоренцево соотношение (28.6) между действующим и средним полями $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{E}$ неприменимо к диэлектрикам с твердыми диполями Действительно, в диэлектриках этого класса каждая молекула (диполь) испытывает очень сильное ориентирующее воздействие со стороны смежных молекул (диполей). Хотя в отсутствие внешнего электрического поля оси молекул и распределены равномерно по всем направлениям, однако между направлениями осей *смежных* молекул существует определенная корреляция. Эта корреляция мало изменяется и во внешнем поле, что не учитывается формулой (29.6) [2].

6 Отметим в заключение, что электрическое взаимодействие *смежных* ионов играет существенную роль в своеобразных свойствах *сегнетоэлектриков*. К числу их относятся, во-первых, кристаллы сегнетовой соли и родственных ей веществ, представляю-

[1]) К сильно разбавленным растворам веществ с твердыми диполями в недипольных жидкостях приближенно применима формула типа (29.12)

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{4\pi}{3}\left(N\beta+\frac{N'p_0^2}{3kT}\right),$$

где N и N' означают соответственно число молекул растворителя и растворенного вещества в единице объема раствора, β — поляризуемость молекул растворителя и p_0 — электрический момент молекул растворенного вещества Однако условием применимости этой формулы является малость дипольного члена (второго члена в скобках)

[2]) См *Киттель Ч* Введение в физику твердого тела — М Мир, 1978 Гл. 13 и литература к этой главе.

щих собою сложные органические соединения, и, во-вторых, ряд кристаллов типа KH_2PO_4. В определенном температурном интервале, ограниченном в случае кристаллов первого типа двумя «точками Кюри» как со стороны высоких, так и со стороны низких температур (в случае кристаллов второго типа нижняя точка Кюри отсутствует), сегнетоэлектрики обладают аномальными электрическими свойствами, подобными магнитным свойствам ферромагнетиков. Так, например, в этом температурном интервале диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков достигает в слабых электрических полях значений порядка нескольких тысяч; при увеличении поля ε быстро падает, а поляризация сегнетоэлектриков стремится к насыщению и т. д. [1]).

§ 30. Энергия электрического поля в диэлектриках

1. В § 15 было выведено выражение (15.6) для энергии электрического поля в отсутствие диэлектриков:

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV + \frac{1}{2}\int \sigma\varphi\, dS. \tag{30.1}$$

Эта формула остается справедливой и для случая электрического поля в произвольный среде, если только под ρ и σ понимать плотность *свободных* зарядов. Влияние же диэлектрика сказывается в том, что при одном и том же распределении свободных зарядов значение потенциала φ в диэлектрике отличается от значения его в вакууме. В частности, при том же распределении свободных зарядов потенциал φ, а вместе с тем, согласно (30.1), и энергия W в *однородном* диэлектрике в ε раз меньше, чем в вакууме.

2. Чтобы доказать справедливость формулы (30.1) в случае наличия диэлектриков, нужно было бы вычислить работу A сил поля при перемещениях как свободных зарядов, так и самих диэлектриков и показать, что

$$A = -dW. \tag{30.2}$$

Доказательство справедливости этого соотношения при произвольных перемещениях свободных зарядов, но при неподвижности диэлектриков совершенно аналогично рассуждениям, приведшим нас в § 15 к формуле (15.6). Рассматривая перемещение заряда e_1 в поле заряда e_2, получаем формулу (15.2)

$$W = e_1\varphi_1,$$

[1]) В настоящее время известно очень много сегнетоэлектриков (по иностранной терминологии — ферроэлектриков). Среди них важное место занимает $BaTiO_3$ и другие вещества такого типа. См. *Лайнс М., Глисс А.* Сегнетоэлектрики и родственные им материалы. — М.: Мир, 1981; *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. — М.: Мир, 1978. Гл. 14. (*Примеч. ред.*)

где φ_1 — потенциал поля заряда e_2 в точке нахождения заряда e_1. Рассматривая же перемещение заряда e_2, получаем

$$W = e_2\varphi_2.$$

Очевидно, что оба выражения для W должны совпадать [1]:

$$e_1\varphi_1 = e_2\varphi_2. \tag{30.3}$$

---

[1]) Справедливость этого «*соотношения взаимности*» в отсутствие диэлектриков была доказана нами в § 15 путем использования для φ его выражения e/R Справедливость же (30 3) в произвольной среде может быть доказана следующим образом.

Пусть $\varphi^{(k)}$ и $\mathbf{D}^{(k)}$ означают потенциал и индукцию поля, создаваемого зарядом e_k. Выделим вокруг каждого из зарядов e_1 и e_2 бесконечно малые объемы V_1 и V_2; поверхности этих объемов обозначим через S_1 и S_2 Во всем пространстве V' вне V_1 и V_2

$$\operatorname{div}\mathbf{D}^{(1)} = \operatorname{div}\mathbf{D}^{(2)} = 0,$$

а стало быть, и

$$\varphi^{(2)}\operatorname{div}\mathbf{D}^{(1)} = \varphi^{(1)}\operatorname{div}\mathbf{D}^{(2)},$$

или, согласно (43*),

$$\operatorname{div}(\varphi^{(2)}\mathbf{D}^{(1)}) = \mathbf{D}^{(1)}\nabla\varphi^{(2)} = \operatorname{div}(\varphi^{(1)}\mathbf{D}^{(2)}) - \mathbf{D}^{(2)}\varphi^{(1)}.$$

Ввиду того, что

$$-\mathbf{D}^{(1)}\varphi^{(2)} = \mathbf{D}^{(1)}\mathbf{E}^{(2)} = \varepsilon\mathbf{E}^{(1)}\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}^{(1)}\mathbf{D}^{(2)} = -\mathbf{D}^{(2)}\nabla\varphi^{(1)},$$

последнее соотношение равносильно

$$\operatorname{div}(\varphi^{(2)}\mathbf{D}^{(1)}) = \operatorname{div}(\varphi^{(1)}\mathbf{D}^{(2)}).$$

Интегрируя обе части этого равенства по всему пространству V' вне объемов V_1 и V_2, получаем на основании теоремы Гаусса (17*).

$$\oint\limits_{S_1+S_2} \varphi^{(2)}D_n^{(1)}\,dS = \oint\limits_{S_1+S_2} \varphi^{(1)}D_n^{(2)}\,dS. \tag{а}$$

На бесконечно малой поверхности S_1, окружающей заряд e_1, потенциал $\varphi^{(2)}$ заряда e_2 можно считать постоянным Обозначая его через φ_1, получаем на основании (22.3):

$$\oint\limits_{S_1} \varphi^{(2)}D_n^{(1)}\,dS = \varphi_1\oint\limits_{S_1} D_n^{(1)}\,dS = -4\pi e_1\varphi_1$$

(знак минус появляется потому, что внешняя по отношению к объему интегрирования V' нормаль к S_1 направлена к заряду e_1, а не от него). Далее, поверхность S_2 можно выбрать так, чтобы на ней потенциал $\varphi^{(2)}$ имел постоянное значение. Тогда

$$\oint\limits_{S_2} \varphi^{(2)}D_n^{(1)}\,dS = \varphi^{(2)}\oint\limits_{S_2} D_2^{(1)}\,dS = 0,$$

ибо внутри S_2 нет зарядов, создающих поле $\mathbf{D}^{(1)}$. Таким образом,

$$\oint\limits_{S_1+S_2} \varphi^{(2)}D_n^{(1)}\,dS = -4\pi e_1\varphi_1.$$

Совершенно аналогично получим $\oint\limits_{S_1+S_2} \varphi^{(1)}D_n^{(2)}\,dS = -4\pi e_2\varphi_2$. Внося это в (а), получаем соотношение взаимности (30.3).

Таким образом, мы вновь приходим к уравнениям (15.3), (15.4) и (15.6), что и требовалось доказать.

Конечно, уравнение (15.5) уже не имеет места при наличии диэлектриков, ибо $\varphi_1 \neq e_2/R_{12}$.

3. Для исчерпывающего обоснования формулы (30.1) нужно еще вычислить работу A сил поля при произвольных перемещениях диэлектриков и убедиться в том, что она также равна $-dW$. Однако строгое проведение этого вычисления было бы не только весьма сложно, но и не могло бы быть выполнено без определенных предположений о строении и свойствах диэлектриков. Поэтому мы удовольствуемся приведенным обоснованием формулы (30.1) и обратим задачу, т. е. будем в дальнейшем рассматривать это выражение для энергии [или, точнее, выражение (30.4), — см. ниже] как один из *постулатов макроскопической теории* поля, следствия из которого оправдываются на опыте. В частности, мы будем с помощью (30.2) определять работу сил поля при перемещениях диэлектриков, *исходя* из выражения (30.1) для энергии, как из данного.

Помимо этого, мы здесь и в следующем параграфе покажем, что в тех простейших случаях, когда нетрудно непосредственно подсчитать работу сил поля при перемещениях диэлектриков, результаты подсчетов совпадают со следствиями, вытекающими из формулы (30.1).

4. Как уже упоминалось в § 16, выражение электрической энергии (30.1) по своей форме соответствует представлению о взаимодействии зарядов на расстоянии. Однако, как и в случае отсутствия диэлектриков, это выражение может быть преобразовано так, чтобы соответственно представлениям теории близкодействия энергию поля можно было считать распределенной с определенной объемной плотностью w по всему пространству, в котором поле отлично от нуля. Действительно, подынтегральное выражение первого из интегралов, входящих в (30.1), на основании (22.2), (43_2^*) и (10.2) может быть представлено в следующем виде:

$$\varphi\rho = \frac{1}{4\pi}\varphi \operatorname{div}\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi}\{\operatorname{div}(\varphi\mathbf{D}) - \mathbf{D}\operatorname{grad}\varphi\} = \frac{1}{4\pi}\{\operatorname{div}(\varphi\mathbf{D}) + \mathbf{DE}\},$$

откуда на основании теоремы Гаусса (17*) имеем

$$\frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{DE}\, dV + \frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}(\varphi\mathbf{D})\, dV =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{DE}\, dV + \frac{1}{8\pi}\oint D_n\varphi\, dS.$$

Последний интеграл должен быть распространен, во-первых, на поверхность S, ограничивающую объем интегрирования V, и, во-вторых, на поверхности S_1', выделяющие из этого объема поверхности разрыва подынтегрального выражения, т. е. поверх-

ности разрыва нормальной слагающей вектора $\mathbf{D}$ (ибо потенциал φ должен быть непрерывным, поскольку мы не рассматриваем двойных электрических слоев). Если мы условимся рассматривать *полное поле*, то интеграл по ограничивающей его поверхности S обратится в нуль (см. с. 81). Поверхности же разрыва нормальной слагающей вектора $\mathbf{D}$ являются поверхностями, заряженными свободным электричеством, причем скачок этой слагающей D_n определяется уравнением (22.8). Стягивая обычным образом поверхности S_1' вплоть до полного прилегания их к поверхностям разрыва S_1 (см. с. 64), мы получим уравнение

$$\lim_{S_1'\to S_1} \frac{1}{8\pi}\int\limits_{S_1'} D_n\varphi\, dS = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{S_1}\varphi(D_{1n}-D_{2n})\, dS = -\frac{1}{2}\int\limits_{S_1}\varphi\sigma\, dS.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{DE}\, dV - \frac{1}{2}\int \sigma\varphi\, dS,$$

и, следовательно, энергия *полного поля*, согласно (30.1), равна

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{DE}\, dV. \tag{30.4}$$

Это выражение можно истолковать в том смысле, что энергия электрического поля распределена по всему занимаемому им пространству с объемной плотностью w, равной

$$w = \frac{1}{8\pi}\mathbf{DE} = \frac{\varepsilon}{8\pi}E^2. \tag{30.5}$$

Уравнение это является одной из основных формул теории электричества. Частным случаем его при $\varepsilon = 1$ является (16.3).

Эквивалентность выражений (30.1) и (30.4) имеет место *только* в постоянном электрическом поле и, как мы увидим в дальнейшем, нарушается в поле переменном. Переменное электрическое поле вообще не может быть охарактеризовано однозначным скалярным потенциалом φ, и поэтому формула (30.1), в которую входит φ, теряет смысл в переменном поле; выражение же (30.4) для энергии электрического поля остается справедливым и в переменном поле и должно поэтому рассматриваться как основное определение энергии электрического поля.

§ 31. Преобразования энергии, связанные с поляризацией диэлектриков. Свободная энергия электрического поля

1. Согласно (30.5) при заданной напряженности $\mathbf{E}$ энергия поля в диэлектрике в ε раз больше, чем в вакууме. Между тем, если носителем электрической энергии является электрическое

поле, как это предполагается теорией близкодействия, то, казалось бы, что энергия эта должна зависеть от напряженности поля, а не от свойств среды, находящейся в поле. В частности, при одинаковой напряженности поля энергия его должна быть одинаковой как в вакууме, так и в том случае, если в вакуум вкраплены отдельные молекулы диэлектрика. Существуют, однако, две причины, по которым плотность энергии поля в диэлектрике зависит от напряженности этого поля $\mathbf{E}$ иначе, чем в случае вакуума.

Во-первых, в макроскопической теории под $\mathbf{E}$ понимается *средняя* напряженность электрического поля (см. § 25): $\mathbf{E} = \overline{\mathbf{E}}_{\text{микро}}$. Так как средняя плотность электрической энергии равна

$$w_{\text{эл}} = \frac{1}{8\pi}\overline{E^2}_{\text{микро}} \tag{31.1}$$

и так как средний квадрат напряженности поля, вообще говоря, не равен квадрату средней напряженности:

$$\overline{E^2}_{\text{микро}} \neq (\overline{E}_{\text{микро}})^2 = E^2,$$

то истинная плотность $w_{\text{эл}}$ электрической энергии в диэлектрике, вообще говоря, не выражается формулой (16.3):

$$w_{\text{эл}} \neq \frac{1}{8\pi}E^2.$$

Во-вторых, под энергией поля понимается вся энергия, которую нужно затратить на возбуждение поля (или, что то же, вся энергия, которая выделяется при исчезновении поля). При наличии диэлектриков вовсе не вся эта энергия целиком является электрической энергией в собственном смысле слова.

2. Действительно, рассмотрим сначала диэлектрик *с квазиупругими диполями*. Возникновение поля в таком диэлектрике неразрывно связано с поляризацией его молекул, т. е. с раздвиганием зарядов диполей, эквивалентных молекулам. Между зарядами каждого диполя по основному предположению действуют силы как электростатического, так и *неэлектростатического* происхождения, сводящиеся в совокупности к квазиупругой силе взаимного притяжения этих зарядов. Стало быть, при раздвигании зарядов диполя на расстояние l силы электрического поля совершают определенную работу, диполем же приобретается равная этой работе упругая энергия $^1/_2\varkappa l^2$, где $\varkappa$ — мера упругих сил, или коэффициент упругости, диполя. Согласно (27.5) и (27.4)

$$\frac{1}{2}\varkappa l^2 = \frac{e^2}{2\beta}\left(\frac{\beta E'}{e}\right)^2 = \frac{1}{2}\beta E'^2 = \frac{1}{2}pE', \tag{31.2}$$

где E' — напряженность поля, действующего на диполь. То же значение будет иметь и внутренняя энергия поляризованной мо-

лекулы. Общая же квазиупругая энергия $w_{\text{упр}}$ всех молекул, находящихся в единице объема диэлектрика, будет равна

$$w_{\text{упр}} = \frac{1}{2} N\overline{pE'}. \tag{31.3}$$

Так как под энергией электрического поля понимается вся энергия, которую нужно затратить на возбуждение поля, то полную энергию w поля в диэлектрике нужно, очевидно, положить равной сумме собственно электрической энергии $w_{\text{эл}}$ и неразрывно связанной с ней упругой энергии $w_{\text{упр}}$ поляризованных диполей:

$$w = w_{\text{эл}} + w_{\text{упр}} = \frac{1}{8\pi}\overline{E^2}_{\text{микро}} + \frac{1}{2} N\overline{pE'}.$$

Если мы пренебрежем разницей между $E_{\text{микро}}$, E' и средней напряженностью макроскопического поля E и примем во внимание, что $P = Np$, то мы получим

$$w_{\text{упр}} = \frac{1}{2} NpE = \frac{1}{2} PE = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon - 1)E^2$$

и

$$w = w_{\text{эл}} + w_{\text{упр}} = \frac{1}{8\pi} E^2 + \frac{1}{8\pi}(\varepsilon - 1)E^2 = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi},$$

что совпадает с (30.5).

Мы привели этот вывод формулы (30.5) ввиду его большой наглядности. Однако пренебрегать разницей между $E_{\text{микро}}$, E' и E, в сущности, совершенно незаконно. Поэтому мы приведем также более строгое доказательство того, что энергия поля (30.5) в диэлектрике с квазиупругими молекулами равна сумме собственно электрической энергии поля и упругой энергии, запасенной в поляризованных молекулах диэлектрика.

3 Выделим внутри диэлектрика физически бесконечную малую сферу S и разложим поле $\mathbf{E}_{\text{микро}}$ на две составляющие — поле $\mathbf{E}_1$ зарядов, расположенных вне сферы S, и поле $\mathbf{E}_{in}$ диполей диэлектрика, находящихся внутри S. Средняя плотность энергии внутри S будет равна

$$w = \frac{1}{8\pi}\overline{E^2_{\text{микро}}} = \frac{1}{8\pi}\overline{(E_1 + E_{in})^2} = \frac{1}{8\pi}(\overline{\mathbf{E}}_1^2 + 2\overline{\mathbf{E}_1\mathbf{E}_{in}} + \overline{\mathbf{E}}_{in}^2).$$

Поле $\mathbf{E}_1$ внешних зарядов, согласно (28 3), постоянно на всем протяжении сферы S, причем

$$\overline{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \frac{4}{3}\pi\mathbf{P}$$

Далее,

$$\overline{\mathbf{E}}_{in} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_1 = -\frac{4}{3}\pi\mathbf{P}$$

Следовательно, плотность энергии поля $\mathbf{E}_1$ равна

$$w_{11} = \frac{1}{8\pi}\overline{\mathbf{E}_1^2} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E} + \frac{4}{3}\pi\mathbf{P}\right)^2,$$

а плотность взаимной энергии полей $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_{in}$ равна

$$w_{12} = \frac{1}{4\pi}\overline{\mathbf{E}_1\ \mathbf{E}_{in}} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}_1\ \overline{\mathbf{E}}_{in} = \frac{1}{3}\mathbf{P}\left(\mathbf{E} + \frac{4}{3}\pi\mathbf{P}\right)$$

Что же касается энергии поля $\mathbf{E}_{in}$ диполей, расположенных в S, то общая энергия этого поля равна сумме: 1) взаимной энергии диполей, 2) собственной энергии положительных и отрицательных зарядов, входящих в состав диполей, и, наконец, 3) энергии попарного взаимодействия зарядов, входящих в состав одного и того же диполя. Согласно исходному положению теории совокупность электростатического и неэлектростатического взаимодействия зарядов каждого диполя сводится к квазиупругой силе; следовательно, энергия этого взаимодействия равна упругой энергии диполя. Собственная же энергия зарядов диполя от напряженности поля и поляризации диэлектрика не зависит; в макроскопической теории эта аддитивная постоянная во внимание не принимается. Наконец, энергия взаимодействия системы диполей равна

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,\,k}\mathbf{p}_i\mathbf{E}_{ki} \qquad (k\neq i)$$

[ср. (15.8)], где $\mathbf{E}_{ki}$ — напряженность поля k-го диполя системы в месте нахождения i-го диполя $\mathbf{p}$.

Известная доля этой энергий взаимодействия диполей локализована вне занимаемой диполями сферы S: доля эта равна интегралу $\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}_{in}^2\,dV$, распространенному по всему пространству вне сферы. При определении напряженности поля $\mathbf{E}_{in}$ во внешнем пространстве можно считать электрический момент диполей равномерно распределенным по объему сферы S, т. е. считать эту сферу равномерно поляризованной; следовательно, согласно (24.1), поле $\mathbf{E}_{in}$ во внешнем пространстве равно полю диполя момента $V\mathbf{P}$, где V — объем сферы S. Воспользовавшись формулой (10.4), получим

$$\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}_{in}^2\,dV=\frac{V^2}{8\pi}\int\frac{3(\mathbf{PR})^2+P^2R^2}{R^8}\,dV=\frac{4\pi}{9}P^2V,$$

где оба интеграла распространены по всему пространству вне сферы S. Таким образом, доля взаимной энергии диполей, локализованная внутри сферы S, равна

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,\,k}\mathbf{p}_i\mathbf{E}_{ki}-\frac{4\pi}{9}P^2V,$$

а плотность ее равна

$$w'_{22}=-\frac{1}{2V}\sum_{i,\,k}\mathbf{p}_i\mathbf{E}_{ki}-\frac{4\pi}{9}P^2.$$

Плотность упругой энергии диполей [ср. (31.2)] равна

$$w_{\text{упр}}=\frac{1}{2V}\sum_i\mathbf{p}_i\mathbf{E}'_i,$$

где $\mathbf{E}'_i$ — напряженность поля, действующего на i-й диполь. Складывая полученные выражения, имеем

$$w=w_{11}+w_{12}+w'_{22}+w_{\text{упр}}=\frac{1}{8\pi}\left(E^2-\frac{(4\pi)^2}{3}P^2\right)+\frac{1}{2V}\sum_i\mathbf{p}_i\left(\mathbf{E}_i-\sum_k\mathbf{E}_{ki}\right).$$

Очевидно, что

$$\mathbf{E}'_i-\sum_k\mathbf{E}_{ki}=\mathbf{E}_1=\mathbf{E}+\frac{4}{3}\pi\mathbf{P},$$

причем $\mathbf{E}_1$ постоянно по всему объему сферы. Следовательно,

$$\frac{1}{2V}\sum_i\mathbf{p}_i\left(\mathbf{E}'_i-\sum_k\mathbf{E}_{ki}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}+\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}\right)\frac{\sum\mathbf{p}_i}{V}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}+\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}\right)\mathbf{P}.$$

Внося это в предшествующее уравнение, получим

$$W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + 4\pi \mathbf{EP}),$$

что, ввиду (22.6), совпадает с формулой (30.5).

4. Рассмотрим в заключение энергию электрического поля в диэлектрике с *твердыми диполями*. Этот случай существенно отличен от только что рассмотренного, ибо твердые диполи, в отличие от квазиупругих, не обладают запасом внутренней энергии, меняющейся в зависимости от напряженности поля. Однако, с другой стороны, нужно учесть следующее. В случае квазиупругих диполей мы вправе предполагать, что никакого взаимодействия между поляризацией диэлектрика и тепловым движением его молекул нет [1]. В случае же молекул с твердыми диполями тепловое движение, как мы видели, оказывает существенное влияние на поляризацию, препятствуя ее насыщению. Стало быть, и обратно, возникновение поляризации, т. е. установка осей диполей по направлению внешнего поля, должна сказываться на тепловом движении молекул диэлектрика и должна быть связана с изменением энергии этого движения, т. е. с поглощением или выделением тепла.

Так, например, в газообразных диэлектриках под воздействием электрического поля $\mathbf{E}$ ось каждого диполя (если только она не параллельна $\mathbf{E}$) должна совершать маятникообразные колебания около направления этого поля. При соударениях молекул диэлектрика происходит частичный обмен между энергией этих колебаний и энергией поступательного теплового движения молекул, пока не установится равновесие, соответствующее определенной степени поляризации диэлектрика (зависящей как от $\mathbf{E}$, так и от температуры).

Итак, *работа внешних сил* [2] $A_{\text{внш}}$, затрачиваемая на изменение напряженности поля в диэлектрике с твердыми диполями и на его поляризацию, должна идти не только на приращение собственно электрической энергии поля, но и на нагревание (или охлаждение) диэлектрика. Если же диэлектрик поддерживается при постоянной температуре, то избыток работы $A_{\text{внш}}$ над изменением электрической энергии $dW_{\text{эл}}$ будет передан окружающим телам в форме некоторого количества теплоты Q:

$$A_{\text{внш}} = dW_{\text{эл}} + Q.$$

На основании второго закона термодинамики, количество теплоты Q, передаваемое системой окружающим ее телам при

[1]) См. примечание к с. 134.

[2]) Обозначение A без индекса мы сохраняем для работы пондеромоторных сил электрического поля, которая в случае обратимых процессов равна по величине, но обратна по знаку работе внешних сил $A_{\text{внш}}$.

произвольном *обратимом* процессе, пропорционально приращению, испытываемому при этом процессе энтропией системы S:

$$Q = -T\,dS,$$

где T — абсолютная температура системы. Стало быть [1]),

$$A_{\text{внш}} = dW_{\text{эл}} - T\,dS,$$

или, так как по сделанному предположению $T = \text{const}$,

$$A_{\text{внш}} = d(W_{\text{эл}} - TS).$$

Как известно из термодинамики, функция состояния системы, приращение которой при обратимом изотермическом процессе равно затрачиваемой в этом процессе работе внешних сил, называется *свободной энергией* системы Ψ. Следовательно, та часть свободной энергии *единицы объема* диэлектрика, которая зависит от напряженности электрического поля и поляризации диэлектрика, равна

$$\psi = w_{\text{эл}} - Ts,$$

где s — зависящая от поляризации диэлектрика часть энтропии единицы его объема.

Мы можем теперь уточнить смысл, вкладываемый в выражение (30.5) для плотности электрической энергии. Одним из основных *постулатов макроскопической теории электричества* является утверждение, что выражение

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \psi \tag{31.4}$$

определяет собою плотность *свободной энергии* электрического поля в диэлектриках [2]).

Справедливость этого постулата, как и всякого постулата вообще, может быть доказана только сравнением с опытом совокупности вытекающих из него следствий; теоретические же соображения в пользу него состоят в следующем.

Во-первых, в начале § 30 было доказано, что работа сил электрического поля при перемещениях *свободных* электрических

[1]) Строго говоря, это выражение для $A_{\text{внш}}$ справедливо лишь в том случае, если объем диэлектрика при его поляризации поддерживается постоянным. Если же поляризация производится при постоянном давлении p, то она, вообще говоря, сопровождается некоторым изменением dV объема диэлектрика V (*электрострикция*), на которое затрачивается добавочная работа $-p\,dV$.

[2]) Как известно из термодинамики, свободная энергия ψ совпадает с энергией системы только в том случае, если ψ от температуры T не зависит (при постоянном объеме V системы); в данном случае это условие означает независимость ε от T при постоянном V [квазиупругие диполи, см. (28 9), а также примечание 1 на с. 134].

зарядов равна убыли выражения (30.1) или равного ему выражения (30.4); при этом доказательстве предполагалось, что диэлектрик неподвижен и что значение ε в каждой точке поля *остается неизменным* при перемещениях свободных зарядов. Ввиду того, что ε, вообще говоря, зависит от температуры, постоянство ε означает, что диэлектрики поддерживаются при постоянной температуре, т. е. что от них отводится та теплота dQ, которая выделяется в них при изменениях поля, вызываемых перемещениями свободных зарядов. Таким образом, выводы § 30 относятся к *изотермическим процессам*, т. е. формулы (30.4) и (30.5) определяют *свободную* энергию электрического поля.

Во-вторых, в этом параграфе мы показали, что в диэлектриках, состоящих из квазиупругих диполей, поляризация которых не связана с тепловыми эффектами, выражение (30.5) плотности свободной энергии, как и должно быть, совпадает с плотностью внутренней энергии. Наконец, мы сейчас покажем, что при некоторых упрощающих предположениях непосредственное вычисление *свободной* энергии поля в диэлектрике с идеальными твердыми диполями приводит к выражению (30.5) или (31.4).

Рассмотрим газообразный диэлектрик столь малой поляризуемости, что различием между $(\overline{E}_{\text{микро}})^2 = E^2$ и $\overline{E}^2_{\text{микро}}$, а также между E и E' (§ 28) в нем можно пренебречь. Молекулы диэлектрика считаем твердыми диполями. Плотность собственно электрической энергии в таком диэлектрике равна

$$w_{\text{эл}} = \frac{E^2}{8\pi}.$$

Энтропия произвольного тела связана с термодинамической вероятностью Π его состояния соотношением Больцмана:

$$S = k \ln \Pi,$$

где k — постоянная Больцмана. Пусть распределение осей молекул по направлениям определяется соотношением

$$dN = f(\vartheta) \sin \vartheta \cdot d\vartheta,$$

где dN — число молекул, оси которых составляют с некоторым определенным направлением в пространстве угол, лежащий между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$. Тогда логарифм термодинамической вероятности этого распределения выразится так [1]):

$$\ln \Pi = -\int_0^\pi f \ln f \sin \vartheta \, d\vartheta.$$

В нашем случае при $a \ll 1$, согласно (29.4а),

$$f = \frac{1}{2} N \left(1 + a \cos \vartheta + \frac{1}{2} a^2 \cos^2 \vartheta - \frac{1}{6} a^2\right).$$

Вставим это значение в предыдущее выражение и ограничимся первыми

[1]) См., например, *Зоммерфельд А.* Термодинамика и статистическая физика. — М.: УРСС, 2002. — § 35.

двумя членами разложения $\ln f$ по степеням a:

$$\ln f = a\cos\vartheta - \frac{1}{6}a^2 + \ln N - \ln 2.$$

При интегрировании можно опустить несущественную аддитивную постоянную, поскольку она не зависит от напряженности электрического поля, а весь наш расчет имеет целью вычисление только той части энтропии, которая возникает из-за действия электрического поля. Выполнив интегрирование, получим

$$\ln \Pi = -\frac{Na^2}{2\cdot 3}.$$

Полагая здесь N равным числу молекул в единице объема, получим логарифм термодинамической вероятности состояния для единицы объема.

С другой стороны, согласно (29.3) и (29.5),

$$a = \frac{p_0 E}{kT}, \quad P = \frac{Np_0^2}{3kT}E.$$

Следовательно,

$$\ln \Pi = -\frac{Na^2}{2\cdot 3} = -\frac{Np_0^2E^2}{2\cdot 3(kT)^2} = -\frac{PE}{2kT}.$$

Стало быть,

$$TS = kT\ln\Pi = -\frac{1}{2}PE,$$

или, имея ввиду (22.6):

$$TS = -\frac{\varepsilon - 1}{8\pi}E^2.$$

Таким образом, свободная энергия ψ единицы объема диэлектрика равна

$$\psi = \frac{E^2}{8\pi} - TS = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}E^2 = \frac{\varepsilon}{8\pi}E^2.$$

Итак, вообще говоря, выражение (30.5) определяет не «внутреннюю» энергию электрического поля, а его свободную энергию, являющуюся мерой работы, связанной с изотермическими и только изотермическими изменениями поля. Если же выделяемое при поляризации диэлектрика тепло не поглощается сполна окружающими телами, то работа электрических сил не равна убыли величины w, определяемой уравнением (30.4). Впрочем, при поляризации диэлектрика выделяется, вообще говоря, столь незначительное количество теплоты, что это обстоятельство в большинстве случаев практической роли не играет.

§ 32. Пондеромоторные силы в диэлектриках

1. На каждый элемент объема диэлектрика в электрическом поле должна, очевидно, действовать сила, равная сумме сил, приложенных к отдельным молекулам диэлектрика. Заменим по-прежнему эти молекулы эквивалентными диполями и воспользуемся формулой (17.5), определяющей равнодействующую

сил, приложенных к диполю:

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}\nabla \cdot \mathbf{E}',$$

где $\mathbf{E}'$ означает напряженность действующего на диполь поля.

Плотность сил, приложенных к диэлектрику, т. е. сила, отнесенная к единице объема диэлектрика, будет, следовательно, равна

$$\mathbf{f} = \sum \mathbf{F} = \sum \mathbf{p}\nabla \cdot \mathbf{E}' = N\overline{\mathbf{p}\nabla \cdot \mathbf{E}'}, \tag{32.1}$$

где суммирование должно быть произведено по всем диполям (молекулам), находящимся в единице объема; N есть число молекул в единице объема, а черта означает среднее значение. В слабо поляризующихся диэлектриках ($\alpha \ll 1$) можно в первом приближении, во-первых, заменить *среднее значение произведения* $\mathbf{p}\nabla \cdot \mathbf{E}'$ *произведением средних значений* $\mathbf{p}$ и $\nabla \cdot \mathbf{E}'$ и, во-вторых, пренебречь разницей между $\overline{\nabla \cdot \mathbf{E}'}$ и $\nabla \cdot \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ есть напряженность среднего макроскопического поля (см. § 28). В этом приближении

$$\mathbf{f} = N\mathbf{p}\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{P}\nabla \cdot \mathbf{E}$$

или, на основании формулы (22.6),

$$\mathbf{f} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathbf{E}\nabla \cdot \mathbf{E}.$$

Далее, согласно (47*),

$$\mathbf{E}\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2}\nabla E^2 - [\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}].$$

В электростатическом поле последний член равен нулю, так как $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, а ротор градиента равен нулю [уравнение (42_1^*)].

Таким образом, в электростатическом поле

$$\mathbf{E}\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \cdot \nabla E^2, \tag{32.2}$$

$$\mathbf{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\nabla E^2. \tag{32.3}$$

Таким образом, в указанном приближении плотность пондеромоторных сил в диэлектрике пропорциональна *градиенту квадрата* напряженности поля; это и понятно, ибо, во-первых, в однородном поле сумма приложенных к каждому диполю сил равна нулю, и, во-вторых, по мере возрастания поля возрастают не только силы поля, но и поляризация, т. е. векторная сумма моментов диполей диэлектрика. Сила $\mathbf{f}$ направлена в сторону возрастания *абсолютной* величины вектора $\mathbf{E}$ *независимо от направления этого вектора*; причина этого лежит в том, что при изменении направления вектора $\mathbf{E}$ изменяется также и направление поляризации $\mathbf{P}$. Таким образом, в электрическом поле диэлектрик *увлекается в область наибольшей напряженности*

поля. Этими пондеромоторными силами обусловливается, например, притяжение заряженными проводниками кусочков бумаги, бузиновых шариков и т. д.

2. Приведенный вывод формулы (32.3) основан на ряде приближений и упрощений. Общее же выражение для пондеромоторных сил может быть получено из выражения для энергии поля W [формула (30.1) или (30.4)] путем рассмотрения изменения энергии δW, связанного с бесконечно малым произвольным (виртуальным) перемещением $\mathbf{q}$ находящихся в поле тел (проводников и диэлектриков); конечно, перемещение различных точек этих тел может быть различным, так что $\mathbf{q}$ является произвольной, но непрерывной функцией точки. При соблюдении условий, рассмотренных в § 18, это изменение энергии должно быть равно взятой с обратным знаком работе A пондеромоторных сил поля [уравнение (18.1)]:

$$\delta W = -A,$$

которая в свою очередь, очевидно, равна

$$A = \int \mathbf{q}\mathbf{f}\, dV,$$

где интеграл должен быть распространен по всему объему *полного поля*, причем $\mathbf{f}\, dV$ есть сила, приложенная к элементу объема dV, а $\mathbf{q}$ — испытываемое им смещение. Следовательно,

$$\delta W = -\int \mathbf{q}\mathbf{f}\, dV, \tag{32.4}$$

где $\mathbf{f}$ — плотность пондеромоторных сил поля. Определив δW из выражения энергии, можно с помощью (32.4) найти $\mathbf{f}$.

В этом состоит наиболее общий метод вычисления пондеромоторных сил, которым мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

3. Применяя этот общий метод к вычислению пондеромоторных сил электрического поля, мы в этом параграфе предположим, что как диэлектрическая проницаемость ε, так и напряженность поля повсюду непрерывны, т. е. что значение ε плавно изменяется в пограничных слоях, служащих разделом между различными средами, и что поверхностные свободные заряды σ отсутствуют ($\sigma = 0$). Вопрос же о силах, приложенных к поверхностям разрыва, будет рассмотрен в § 34.

На основании допущения об отсутствии поверхностей разрыва во всех поверхностных интегралах, с которыми нам придется встретиться в этом параграфе, интегрирование будет распространяться лишь на внешнюю граничную поверхность поля. Кроме того, мы условимся рассматривать *полное поле*, так что все эти поверхностные интегралы обратятся в нуль. Вместе с тем обратятся в нуль и все интегралы типа

$$\int \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV,$$

так как, согласно теореме Гаусса (17*), интегралы эти могут быть преобразованы в интегралы поверхностные:

$$\int \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = \oint a_n\, dS = 0. \tag{32.5}$$

4. Согласно (30.1) и (30.4) энергия электростатического поля, ввиду предполагаемого нами в этом параграфе отсутствия поверхностных зарядов ($\sigma = 0$), может быть выражена одним из следующих уравнений:

$$W_1 = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV \quad \text{и} \quad W_2 = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon E^2\, dV \cdot \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon(\operatorname{grad}\varphi)^2\, dV,$$

причем, конечно, $W_1 = W_2$. Следовательно, изменение энергии при произвольном бесконечно малом перемещении $\mathbf{q}$ находящихся в поле тел равно

$$\delta W_1 = \frac{1}{2}\int \varphi\,\delta\rho\, dV + \frac{1}{2}\int \rho\,\delta\varphi\, dV$$

или

$$\delta W_2 = \delta W_1 = \frac{1}{8\pi}\int (\operatorname{grad}\varphi)^2\,\delta\varepsilon\, dV + \frac{1}{4\pi}\int \varepsilon \operatorname{grad}\varphi\,\delta(\operatorname{grad}\varphi)\, dV,$$

где $\delta\rho$, $\delta\varphi$, $\delta\varepsilon$, ... суть изменения величин ρ, φ, ε, ..., обусловленные перемещением $\mathbf{q}$.

Как известно, порядок выполнения операций дифференцирования и варьирования можно менять без изменения их результата, так что

$$\delta(\operatorname{grad}\varphi) = \delta\left(\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \mathbf{i}\frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial z} = \operatorname{grad}(\delta\varphi).$$

С другой стороны,

$$\varepsilon \operatorname{grad}\varphi = -\varepsilon\mathbf{E} = -\mathbf{D}.$$

Следовательно, на основании (43_2^*) подынтегральное выражение последнего интеграла можно преобразовать следующим образом:

$$\varepsilon \operatorname{grad}\varphi \cdot \delta(\operatorname{grad}\varphi) = -\mathbf{D}\operatorname{grad}(\delta\varphi) = -\operatorname{div}(\mathbf{D}\,\delta\varphi) + \delta\varphi \operatorname{div}\mathbf{D}.$$

Интеграл первого слагаемого правой части, согласно (32.5), равен нулю, так что, воспользовавшись уравнением (22.2), окончательно получим

$$\delta W_2 = \frac{1}{8\pi}\int (\operatorname{grad}\varphi)^2\,\delta\varepsilon\, dV + \frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}\mathbf{D}\,\delta\varphi\, dV = \frac{1}{8\pi}\int E^2\,\delta\varepsilon\, dV + \int \rho\,\delta\varphi\, dV.$$

Ввиду того, что δW_2 равно δW_1, приращение энергии δW можно, очевидно, представить также в следующей форме:

$$\delta W = 2\delta W_1 - \delta W_2 = \int \varphi\,\delta\rho\, dV - \frac{1}{8\pi}\int E^2\,\delta\varepsilon\, dV.$$

Таким образом, вычисление δW сведено нами к определению изменения плотности свободного электричества ρ и диэлектрической проницаемости ε при виртуальном перемещении $\mathbf{q}$ находящихся в поле тел.

5. Величины $\delta\rho$ и $\delta\varepsilon$, входящие в последнее уравнение, носят название *локальных изменений* величин ρ и ε, в отличие от так называемых *изменений материальных*, которые мы обозначим через $\delta'\rho$ и $\delta'\varepsilon$. Разница между этими понятиями состоит в следующем. *Локальное* изменение, испытываемое какой-либо величиной при перемещениях среды, есть изменение значения этой величины в некоторой определенной точке пространства, не принимающей участия в этом перемещении. *Материальное* же изменение есть изменение значения данной величины ρ в некотором определенном материальном элементе перемещающейся среды. Иными словами, если элемент dV материальной среды, находившийся до перемещения в точке P, перемещается в точку P', то $\delta'\rho$ равно разности между значением, которым обладало ρ в точке P до перемещения, и тем значением, которым обладает ρ в точке P' после перемещения $\mathbf{q}$.

С другой стороны, $\delta\rho$ равно разности между значениями, которыми обладало ρ в одной и той же точке P до и после перемещения $\mathbf{q}$. Соответственно этому локальное изменение $\delta\rho$ какой-либо величины ρ в точке P может быть представлено в виде суммы двух слагаемых. Во-первых, после смещения $\mathbf{q}$ в точке P будет находиться элемент объема среды, ранее находившийся в точке P'' на расстоянии $-\mathbf{q}$ от P, в которой величина ρ имела, очевидно, значение

$$\rho_{P''} = \rho_P + (-\mathbf{q})\operatorname{grad}\rho = \rho_P - \mathbf{q}\operatorname{grad}\rho.$$

Кроме того, значение величины ρ в этом объеме испытает материальное изменение $\delta'\rho$. Следовательно [1]),

$$\delta\rho = \delta'\rho - \mathbf{q}\operatorname{grad}\rho. \tag{32.6}$$

Таким образом, определение локального изменения сведено к определению изменения материального.

Если перемещение среды не сопровождается ее деформацией, то материальное изменение $\delta'\rho$ равно, очевидно, нулю. Если же элемент V среды, обладающий зарядом de, испытывает при смещении сжатие или расширение, так что объем его становится равным $V + \delta'V$, то, очевидно,

$$de = \rho V = (\rho + \delta'\rho)(V + \delta'V).$$

Произведя приведение членов и пренебрегая произведением $\delta'\rho \cdot \delta'V$, получаем

$$\delta'\rho = -\rho\frac{\delta'V}{V}.$$

Чтобы определить относительное изменение $\delta'V/V$ объема элемента среды, заметим, что при смещении $\mathbf{q}$ элемента dS поверхности S, ограничивающей объем V, этот объем возрастает на $q_n\,dS$, т. е. на объем цилиндра, описанного элементом dS при этом перемещении Конечно, $q_n\,dS$ может иметь как положительное, так и отрицательное значение в зависимости от значения угла между $\mathbf{q}$ и внешней нормалью $\mathbf{n}$ к элементу dS. Полное же изменение объема V при смещении $\mathbf{q}$ будет, очевидно, равно

$$\delta'V = \oint q_n\,dS,$$

и, следовательно [см. определение дивергенции вектора, уравнение (18*)], в пределе при $V \to 0$,

$$\frac{\delta'V}{V} = \frac{1}{V}\oint q_n\,dS = \operatorname{div}\mathbf{q}. \tag{32.7}$$

Внося это значение в выражение для $\delta'\rho$, получаем

$$\delta'\rho = -\rho\operatorname{div}\mathbf{q}. \tag{32.8}$$

Очевидно, что формулой этого вида будет определяться не только локальное изменение плотности электричества ρ, но, например, и изменение плотности τ самой среды (т. е. изменение массы единицы объема):

$$\delta'\tau = -\tau\operatorname{div}\mathbf{q}.$$

6. Внося (32.8) в (32.6), получаем с помощью (43_2^*)

$$\delta\rho = -\rho\operatorname{div}\mathbf{q} - \mathbf{q}\operatorname{grad}\rho = -\operatorname{div}(\rho\mathbf{q}). \tag{32.9}$$

С другой стороны, по аналогии с (32.6), имеем

$$\delta\varepsilon = \delta'\varepsilon - \mathbf{q}\operatorname{grad}\varepsilon.$$

---

[1]) Ввиду предполагаемой бесконечной малости смещения $\mathbf{q}$ мы вправе не учитывать разницы между $(\delta'\rho)_{P''}$ и $(\delta'\rho)_{P'}$, сводящейся к величинам второго порядка малости.

Так как значение ε зависит от плотности диэлектрика[1]), то материальное изменение ε будет определяться материальным изменением $\delta'\tau$ плотности τ:

$$\delta'\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\delta'\tau = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\tau\operatorname{div}\mathbf{q}$$

и, стало быть,

$$\delta\varepsilon = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\tau\operatorname{div}\mathbf{q} - \mathbf{q}\operatorname{grad}\varepsilon. \tag{32.9'}$$

Внося значения $\delta\varepsilon$ и $\delta\rho$ [уравнение (32.9)] в выражение для δW, получим

$$\delta W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{q}E^2\operatorname{grad}\varepsilon\,dV + \frac{1}{8\pi}\int E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\tau\operatorname{div}\mathbf{q}\,dV - \int\varphi\operatorname{div}(\rho\mathbf{q})\,dV.$$

Подынтегральные выражения двух последних интегралов можно преобразовать с помощью (43_2^*):

$$E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\tau\operatorname{div}\mathbf{q} = \operatorname{div}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\tau\mathbf{q}\right) - \mathbf{q}\operatorname{grad}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\tau\right),$$

$$\varphi\operatorname{div}(\rho\mathbf{q}) = \operatorname{div}(\varphi\rho\mathbf{q}) - \mathbf{q}\rho\operatorname{grad}\varphi.$$

Согласно (32.5) интегралы первых слагаемых этих выражений обращаются в нуль; приняв еще во внимание, что $\operatorname{grad}\varphi = -\mathbf{E}$, получаем

$$\delta W = \left\{\frac{1}{8\pi}E^2\operatorname{grad}\varepsilon - \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\tau\right) - \rho\mathbf{E}\right\}\int\mathbf{q}\,dV.$$

7. Это выражение для δW должно совпадать с выражением (32.4) при произвольной зависимости смещения $\mathbf{q}$ от координат точки. Отсюда следует равенство выражений, на которые множится $\mathbf{q}$ в обоих интегралах:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} - \frac{1}{8\pi}E^2\operatorname{grad}\varepsilon + \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\tau\right). \tag{32.10}$$

Эта формула и является искомым выражением для плотности пондеромоторных сил $\mathbf{f}$. Она слагается из двух частей, $\mathbf{f}^{(1)}$ и $\mathbf{f}^{(2)}$, а именно из

$$\mathbf{f}^{(1)} = \rho\mathbf{E}, \tag{32.11}$$

действующей на свободные электрические заряды, и из

$$\mathbf{f}^{(2)} = \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\tau\right) - \frac{1}{8\pi}E^2\operatorname{grad}\varepsilon, \tag{32.12}$$

зависящей от $\partial\varepsilon/\partial\tau$ и $\operatorname{grad}\varepsilon$ и отличной от нуля только в диэлектриках.

Из (32.11) следует, что плотность $\mathbf{f}^{(1)}$ пондеромоторных сил, действующих на *свободные* заряды, в диэлектрике, как и в вакууме, определяется напряженностью электрического поля. Из

[1]) В твердых диэлектриках ε может зависеть (при заданной температуре) не только от плотности диэлектрика, но и от его деформаций, не связанных с изменениями плотности. Исследование этого обстоятельства требует учета анизотропии деформированного диэлектрика и проведено, например, в книге: *Стреттон.* Теория электромагнетизма. — М.: Гостехиздат, 1948.

этого положения мы исходили в § 30 при подсчете работы, совершаемой полем при перемещении свободных зарядов. Что же касается плотности $\mathbf{f}^{(2)}$ пондеромоторных сил, действующих на диэлектрик, то в слабо поляризующихся диэлектриках ($\alpha \ll 1$) выражение (32.12) совпадает с тем выражением (32.3), которое было получено нами непосредственным подсчетом пондеромоторных сил в этих диэлектриках.

Действительно, согласно (29.12),

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{1}{3}C\tau,$$

где коэффициент C от плотности диэлектрика τ не зависит. При $\alpha \ll 1$, т. е. при $\varepsilon \approx 1$, можно с достаточной точностью положить

$$\varepsilon - 1 = C\tau.$$

Тогда

$$\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}=\tau C=\varepsilon-1,$$

и (32.12) принимает вид

$$\mathbf{f}^{(2)}=\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\{E^2(\varepsilon-1)\}-\frac{1}{8\pi}E^2\operatorname{grad}\varepsilon.$$

Но, согласно (43_1^*),

$$\operatorname{grad}\{E^2(\varepsilon-1)\}=(\varepsilon-1)\operatorname{grad}E^2+E^2\operatorname{grad}\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\mathbf{f}^{(2)}=\frac{\varepsilon-1}{8\pi}\operatorname{grad}E^2,$$

что, действительно, совпадает с (32.3).

Таким образом, условием применимости формулы (32.3) является линейная зависимость диэлектрической проницаемости от плотности диэлектрика, имеющая место, строго говоря, только в газах.

Заметим в заключение, что Максвелл и ряд других авторов, например Абрагам, не принимали во внимание зависимости диэлектрической проницаемости от плотности среды, благодаря чему выражение пондеромоторных сил в диэлектриках, которым они пользовались:

$$\mathbf{f}=-\frac{1}{8\pi}E^2\operatorname{grad}\varepsilon, \tag{32.13}$$

отличалось от (32.12) отсутствием первого члена

$$\mathbf{f}''=\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right). \tag{32.14}$$

Этот член в твердых и жидких диэлектриках сравним по величине с (32.13), так что пренебрегать им, вообще говоря, не представляется возможным.

Однако надо иметь в виду, что отличие формулы (32.12) от максвелловой формулы (32.13) сказывается лишь на распределении сил по объему диэлектрика; равнодействующая же не учтенных Максвеллом сил $\mathbf{f}''$, приложенных к какому-либо телу, либо равна нулю (если тело это помещено в вакуум), либо уравновешивается гидростатическим давлением, возникающим в окружающей среде под влиянием электрического поля. Это утверждение будет доказано в § 34.

§ 33. Сведение объемных сил к натяжениям [1])

1. Как уже упоминалось в § 16, механистическая теория электромагнитного поля прошлого века искала причины электрических явлений в упругих деформациях гипотетической среды — эфира. Характерной особенностью сил упругости, как, впрочем, и вообще сил близкодействия, является возможность сведения их к *натяжениям*, возникающим в деформированных средах, т. е. возможность сведения сил, действующих на произвольный участок среды, к силам натяжения, испытываемым *поверхностью* этого участка (в частности, давление есть отрицательное натяжение).

Соответственно этому перед механистической теорией поля стояла задача сведения пондеромоторных сил поля к упругим натяжениям среды. Свести эти силы к натяжениям, как мы покажем, действительно, оказывается возможным. Правда, это обстоятельство ни в коей мере не спасает механистической теории поля, оказавшейся в целом несостоятельной; однако при рассмотрении многих вопросов замена пондеромоторных сил эквивалентными им натяжениями оказывается весьма целесообразной.

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о сведении объемных сил к натяжениям в общей форме с тем, чтобы в следующем параграфе применить полученные результаты к интересующему нас случаю электрического поля.

2. Рассмотрим некоторый объем среды V, ограниченный поверхностью S. Если $\mathbf{f}$ есть объемная плотность сил, то равнодействующая всех сил, приложенных к телам, находящимся внутри объема V, будет равна

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f}\, dV. \tag{33.1}$$

С другой стороны, если объемные силы вообще могут быть сведены к натяжениям, то той же величине должна равняться и совокупность натяжений, действующих *извне* на замкнутую поверхность S.

[1]) Этот и следующий параграфы можно опустить при первом чтении книги.

Сила натяжения, испытываемая каким-либо элементом dS поверхности dS произвольного участка среды, пропорциональна этому элементу и зависит не только от его положения, но и от его направления, — иными словами, является не только функцией точки, но и функцией направления нормали $\mathbf{n}$ к элементу dS. В частности, при повороте площадки dS на 180°, т. е. при изменении направления нормали $\mathbf{n}$ на обратное, сила натяжения меняет свой знак. В этом выражается тот факт, что на противоположные стороны произвольного элемента поверхности dS [1]) всегда действуют взаимно уравновешивающиеся равные и противоположные натяжения.

Обозначим через $\mathbf{T}_n$ силу, действующую извне на единицу поверхности, внешняя нормаль к которой направлена по $\mathbf{n}$; компоненты этой силы по осям координат обозначим через T_{xn}, T_{yn} и T_{zn} [2]). Тогда равнодействующая всех натяжений, приложенных извне к поверхности, очевидно, равна

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{T}_n \, dS, \tag{33.2}$$

где $\mathbf{n}$ есть внешняя нормаль к элементу dS. Приравнивая выражения (33.1) и (33.2):

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} \, dV = \oint_S \mathbf{T}_n \, dS, \tag{33.3}$$

мы можем найти соотношение между плотностью объемных сил $\mathbf{f}$ и натяжением $\mathbf{T}_n$.

3. Выберем какую-либо произвольную систему декартовых координат и обозначим соответственно через $\mathbf{T}_x$, $\mathbf{T}_y$ и $\mathbf{T}_z$ силу натяжения, действующую извне на единичную площадку, внешняя нормаль к которой направлена соответственно по оси x, по оси y и по оси z. Слагающие этой силы по осям координат обозначим через T_{xx}, T_{yx}, T_{zx} и т. д., так что

$$\mathbf{T}_x = \mathbf{i}T_{xx} + \mathbf{j}T_{yx} + \mathbf{k}T_{zx}, \quad \mathbf{T}_y = \mathbf{i}T_{xy} + \mathbf{j}T_{yy} + \mathbf{k}T_{zy},$$
$$\mathbf{T}_z = \mathbf{i}T_{xz} + \mathbf{j}T_{yz} + \mathbf{k}T_{zz}.$$

Таким образом, например, T_{xz} есть слагающая по оси x силы $\mathbf{T}_z$, действующей на единичную площадку, внешняя нормаль к которой направлена по оси z.

Легко показать (см. любой учебник теории упругости), что сила натяжения $\mathbf{T}_n$, действующая извне на произвольно ориентированную единичную площадку, внешняя нормаль к которой

[1]) За исключением элементов поверхностей разрыва, которых мы в этом параграфе не рассматриваем.

[2]) Часто эти компоненты обозначают через T_{nx}, T_{ny}, T_{nz}. Произведенный нами выбор порядка индексов соответствует принятому в общей теории, изложенной в § 105.

имеет направление $\mathbf{n}$, связана с силами $\mathbf{T}_x$, $\mathbf{T}_y$ и $\mathbf{T}_z$ следующим соотношением:

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T}_x \cos(\mathbf{n}, x) + \mathbf{T}_y \cos(\mathbf{n}, y) + \mathbf{T}_z \cos(\mathbf{n}, z), \tag{33.4}$$

так что слагающая этой силы, например, по оси x равна

$$T_{xn} = T_{xx} \cos(\mathbf{n}, x) + T_{xy} \cos(\mathbf{n}, y) + T_{xz} \cos(\mathbf{n}, z). \tag{33.5}$$

Таким образом, девять величин, T_{xx}, T_{xy} и т. д., вполне характеризуют собою систему натяжений в данной точке пространства: значениями этих величин вполне определяются натяжения, испытываемые произвольно ориентированной площадкой. Величины T_{xx}, T_{xy} и т. д. называются *компонентами* тензора натяжений, а их совокупность носит название *тензора натяжений*, который будет обозначаться нами буквой $\mathbf{T}$ (без индексов). Компоненты тензора могут быть записаны в следующей симметричной форме:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}. \tag{33.6}$$

4. Чтобы от интегрального соотношения (33.3) между натяжениями и объемными силами перейти к соотношениям дифференциальным, мы должны, очевидно, прежде всего преобразовать поверхностный интеграл справа в объемный (или наоборот). Воспользовавшись формулами (33.2) и (33.5), мы можем следующим образом выразить слагающую равнодействующей $\mathbf{F}$ по оси x через компоненты тензора натяжений:

$$F_x = \oint_S T_{xn}\, dS = \oint_S \{T_{xx} \cos(\mathbf{n}, x) + T_{xy} \cos(\mathbf{n}, y) + T_{xz} \cos(\mathbf{n}, z)\}\, dS.$$

Воспользуемся теперь теоремой Гаусса (17*), которая в развернутой форме гласит:

$$\oint_S \{a_x \cos(\mathbf{n}, x) + a_y \cos(\mathbf{n}, y) + a_z \cos(\mathbf{n}, z)\}\, dS = \int_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dV.$$

Так как эта теорема справедлива для любых непрерывных функций точки a_x, a_y, a_z, то, полагая в ней $a_x = T_{xx}$, $a_y = T_{xy}$, $a_z = T_{xz}$, получаем (при условии непрерывности компонент тензора натяжений внутри объема V):

$$F_x = \oint_S T_{xn}\, dS = \int_V \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\right) dV.$$

Внося это в (33.3) и приравнивая ввиду произвольности объема V подынтегральные выражения, получаем окончательно

$$f_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z},$$

и аналогично:

$$f_y = \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}, \quad f_z = \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}. \tag{33.7}$$

Эти формулы и устанавливают искомые дифференциальные соотношения между плотностью объемных сил $\mathbf{f}$ и компонентами тензора натяжения $\mathbf{T}$.

5. Из (33.7) следует, что плотность объемных сил определяется не абсолютной величиной натяжений, а характером изменения натяжений в пространстве (при перемещениях точки наблюдения). В частности, $\mathbf{f}$ равно нулю, если компоненты тензора натяжения $\mathbf{T}$ имеют в данном участке среды постоянные значения. Это и понятно, ибо если мы мысленно выделим в среде произвольный параллелепипед, то в случае постоянства тензора $\mathbf{T}$ на противоположные его грани будут действовать натяжения, равные по величине и противоположные по направлению; следовательно, равнодействующая приложенных к параллелепипеду сил будет равна нулю.

6. Для эквивалентности объемных сил и натяжений необходимо, чтобы при замене объемных сил эквивалентными натяжениями оставались неизменными не только *равнодействующая* сил, приложенных к произвольному объему, но и *момент* этих сил. Это обстоятельство накладывает дополнительное ограничение на компоненты тензора натяжений.

Момент $\mathbf{N}$ объемных сил, приложенных к произвольному объему V, равен

$$\mathbf{N} = \int [\mathbf{R}\mathbf{f}]\, dV, \tag{33.8}$$

где $\mathbf{R}$ есть расстояние от точки O, относительно которой определяется момент сил, до элемента dV. Если объемные силы $\mathbf{f}$ эквивалентны натяжениям $\mathbf{T}$, то должно выполняться соотношение (33.7). Следовательно, слагающая $\mathbf{N}$, например, по оси x, должна равняться

$$N_x = \int_V (yf_z - zf_y)\, dV =$$

$$= \int_V \left\{ y\left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\right) - z\left(\frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}\right) \right\} dV.$$

Подынтегральное выражение справа может быть представлено следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}(yT_{zx} - zT_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y}(yT_{zy} - zT_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(yT_{zz} - zT_{yz}) - T_{zy} + T_{yz}.$$

Так как первые три члена этого выражения по своему виду совпадают с выражением дивергенции вектора с компонентами

$$a_x = yT_{zx} - zT_{yx}, \quad a_y = yT_{zy} - zT_{yy}, \quad a_z = yT_{zz} - zT_{yz},$$

то объемный интеграл можно преобразовать с помощью теоремы Гаусса (17*):

$$N_x = \oint_S a_n\, dS + \int_V (T_{yz} - T_{zy})\, dV,$$

причем на основании (33.5)

$$\begin{aligned} a_n &= a_x \cos(x, \mathbf{n}) + a_y \cos(y, \mathbf{n}) + a_z \cos(z, \mathbf{n}) = \\ &= y\{T_{zx} \cos(x, \mathbf{n}) + T_{zy} \cos(y, \mathbf{n}) + T_{zz} \cos(z, \mathbf{n})\} - \\ &- z\{T_{yx} \cos(x, \mathbf{n}) + T_{yy} \cos(y, \mathbf{n}) + T_{yz} \cos(z, \mathbf{n})\} = yT_{zn} - zT_{yn}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$N_x = \int_V (yf_z - zf_y)\, dV = \oint_S (yT_{zn} - zT_{yn})\, dS + \int_V (T_{yz} - T_{zy})\, dV. \tag{33.9}$$

Поверхностный интеграл справа равен моменту сил натяжения $\mathbf{T}_n$, приложенных к поверхности S объема V. Момент этих сил натяжения будет равняться моменту сил объемных в том и только в том случае, если последний интеграл справа равен нулю. Ввиду произвольности объема V это будет иметь место только при равенстве нулю подынтегрального выражения во всех точках пространства:

$$T_{yz} = T_{zy}.$$

Повторив те же рассуждения для слагающих $\mathbf{N}$ по осям y и z, получим следующие соотношения:

$$T_{yz} = T_{zy}, \quad T_{zx} = T_{xz}, \quad T_{xy} = T_{yx}. \tag{33.10}$$

Тензоры, компоненты которых удовлетворяют соотношениям (33.10), называются *симметричными*.

Таким образом, необходимые и достаточные условия того, чтобы система объемных сил и система натяжений были эквивалентны друг другу как в отношении равнодействующей сил, приложенных к произвольному объему, так и в отношении момента этих сил, сводятся, во-первых, к соотношениям (33.7) и, во-вторых, к симметрии тензора натяжений. Если же тензор натяжений не симметричен, то система натяжений не может быть заменена эквивалентным распределением объемных сил.

Это, впрочем, явствует уже из того, что если компоненты тензора $\mathbf{T}$ постоянны, то объемные силы, согласно (33.7), обращаются в нуль, тогда как момент сил натяжения, приложенных

к произвольному объему, будет при $T_{ik} \neq T_{ki}$ отличаться от нуля даже при постоянстве T_{ik} [1].

7. Ранее мы пользовались некоторой произвольно выбранной системой координат и не касались вопроса о законе преобразования компонент тензора при преобразовании координат. Этот закон может быть найден из требования (вытекающего из самого определения понятия натяжения), чтобы слагающие $T_{xn}\,dS$, $T_{yn}\,dS$, $T_{zn}\,dS$ силы $\mathbf{T}_n\,dS$, действующей на произвольно расположенную и произвольно ориентированную площадку dS, преобразовывались по правилам преобразования векторов [2].

Мы не будем останавливаться здесь на выводе этого закона преобразования; отметим только, что с помощью его можно убедиться в том, что как уравнение (33.7), так и условие (37.10) симметрии тензора сохраняют свой вид при любом преобразовании декартовых координат.

§ 34. Тензор натяжений электрического поля

1. Обращаемся к поставленной в начале предыдущего параграфа задаче сведения пондеромоторных сил электрического поля к натяжениям. С этой целью удобно разложить общее выражение (32.10) для объемной плотности этих сил на два слагаемых:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}' + \mathbf{f}'', \tag{34.1}$$

$$\mathbf{f}' = \rho\mathbf{E} - \frac{1}{8\pi}\mathbf{E}^2 \operatorname{grad}\varepsilon, \quad \mathbf{f}'' = \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right).$$

Наша задача будет, очевидно, разрешена, если мы найдем такой тензор $\mathbf{T}$, чтобы по подстановке его компонент в правую часть уравнений (33.7) левые части этих уравнений совпали с определяемыми формулой (34.1) слагающими плотности объемных сил $\mathbf{f}$.

2. Выразим в (34.1) ρ через $\operatorname{div}\mathbf{D}$ с помощью (22.2) и рассмотрим слагающую плотности сил $\mathbf{f}'$ по какому-нибудь направлению, например по оси x: $f'_x = \frac{1}{4\pi}E_x \operatorname{div}\mathbf{D} - \frac{1}{8\pi}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}$. Легко убедиться [ср. уравнение (43^*_2), где φ соответствует в нашем случае величине E_x], что

$$E_x \operatorname{div}\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x}(E_xD_x) + \frac{\partial}{\partial y}(E_xD_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_xD_z) - \mathbf{D}\nabla\cdot E_x.$$

[1] Заметим, что в анизотропных средах тензор натяжений электрического поля, вообще говоря, не симметричен.

[2] Однако, например, величина T_x со слагающими T_{xx}, T_{yx}, T_{zx}, определяющая силу, действующую на некоторую площадку, сама не является вектором, ибо само направление площадки зависит от произвольно выбранного направления координатной оси x.

Далее, воспользовавшись (32.2) и имея в виду (7.6), получаем

$$\mathbf{D}\nabla \cdot E_x = \varepsilon \mathbf{E}\nabla \cdot E_x = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial x}E^2,$$

и, следовательно,

$$-\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\nabla \cdot E_x - \frac{1}{8\pi}E^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{1}{8\pi}\left\{\varepsilon\frac{\partial E^2}{\partial x} + E^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right\} = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial(\varepsilon E^2)}{\partial x}.$$

Таким образом,

$$f'_x = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(E_x D_x - \frac{\varepsilon E^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(E_x D_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_x D_z)\right\}.$$

Уравнение это совпадает по форме с (33.7), если положить

$$T'_{xx} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(E_x^2 - \frac{E^2}{2}\right), \quad T'_{xy} = \frac{\varepsilon}{4\pi}E_x E_y, \quad T'_{xz} = \frac{\varepsilon}{4\pi}E_x E_z.$$

Аналогичным образом могут быть определены и остальные компоненты тензора $\mathbf{T}'$, совокупность которых может быть представлена в форме (33.6):

$$4\pi\mathbf{T}' = \left\{\begin{array}{lll} \varepsilon\left(E_x^2 - \frac{E^2}{2}\right) & \varepsilon E_x E_y & \varepsilon E_x E_z \\ \varepsilon E_y E_x & \varepsilon\left(E_y^2 - \frac{E^2}{2}\right) & \varepsilon E_y E_z \\ \varepsilon E_z E_x & \varepsilon E_z E_y & \left(\varepsilon E_z^2 - \frac{E^2}{2}\right) \end{array}\right\}. \qquad (34.2)$$

Что же касается второй слагающей $\mathbf{f}''$ объемных сил, то, как непосредственно видно, она совпадает по форме с (33.7), причем отличны от нуля только те компоненты эквивалентного ей тензора натяжений $\mathbf{T}''$, которые расположены на главной диагонали матрицы (33.6):

$$T''_{xx} = T''_{yy} = T''_{zz} = \frac{1}{8\pi}E^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\tau, \quad T_{ik} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k. \qquad (34.3)$$

Таким образом, как $\mathbf{T}'$, как и $\mathbf{T}''$ (а стало быть, и их сумма $\mathbf{T} = \mathbf{T}' + \mathbf{T}''$) являются симметричными тензорами, т. е. удовлетворяют условию (33.10).

Итак, эквивалентность объемных сил (34.1) системе натяжений (34.2) и (34.3) нами доказана, и мы можем утверждать, что общая сила $\mathbf{F}$, действующая на произвольный участок среды V, определяется состоянием поля *на границах этого участка*, т. е. может быть сведена к системе сил или натяжений, приложенных к его поверхности S.

3. Впервые пондеромоторные силы поля были сведены к натяжениям Максвеллом, который, однако, не учитывал зависимо-

сти диэлектрической проницаемости от плотности диэлектрика (см. конец § 32). Поэтому *максвеллов тензор натяжений* соответствует лишь части нашего тензора натяжений $\mathbf{T}$, а именно тензору $\mathbf{T}'$.

Для отличия от «максвелловых» сил $\mathbf{f}'$ и «максвелловых» натяжений $\mathbf{T}'$ мы будем называть силы $\mathbf{f}''$ и соответствующий им тензор $\mathbf{T}''$ *стрикционными*. Заметим, что стрикционные натяжения $\mathbf{T}''$ эквивалентны всестороннему давлению [1])

$$p'' = -\frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau, \tag{34.4}$$

ибо давление есть отрицательное натяжение, направленное по нормали к произвольной площадке внутри тела и не зависящее от ориентации этой площадки.

В жидких и твердых телах стрикционные силы и натяжения одного порядка величины с максвелловыми силами и натяжениями (ибо $(\partial\varepsilon/\partial\tau)\,\tau$ одного порядка с ε). Это отмечалось Гельмгольцем, Джинсом и др., однако оставалось неясным, почему пренебрегавшие стрикционными силами и натяжениями авторы не получали существенно ошибочных результатов. Покажем, в чем здесь дело.

Допустим, что мы интересуемся только равнодействующей $\mathbf{F}$ всех сил электрического поля, приложенных к произвольному телу A, и результирующим моментом $\mathbf{N}$ этих сил. Согласно (33.3) и (33.9) равнодействующая $\mathbf{F}$ и момент $\mathbf{N}$ этих сил однозначно определяются значениями тензора $\mathbf{T}$ *с внешней стороны поверхности тела* S. Стрикционные натяжения $\mathbf{T}''$ в вакууме, очевидно, равны нулю (ибо в вакууме $(\partial\varepsilon/\partial\tau)\,\tau$ нужно считать равным нулю). Поэтому, если тело окружено вакуумом, то стрикционные силы $\mathbf{f}''$ и натяжения $\mathbf{T}''$ влияют только на распределение сил по объему тела [2]), но не влияют ни на величину равнодействующей всех сил $\mathbf{F}$, ни на их момент $\mathbf{N}$.

Если же тело A окружено не вакуумом, а диэлектриком B, то определяемая тензором $\mathbf{T}''$ равнодействующая $\mathbf{F}''$ приложенных к A стрикционных сил $\mathbf{f}''$, вообще говоря, не равна нулю. Однако если система тел A и B находится в механическом равновесии, то эта не учитывавшаяся Максвеллом сила $\mathbf{F}''$ точно компенсируется также не учитывавшимися Максвеллом дополнительными *механическими* силами, испытываемыми телом A

[1]) В твердых диэлектриках наши выражения для стрикционных сил и натяжений, учитывающие лишь объемную стрикцию, должны быть дополнены членами, величина которых определяется зависимостью ε от деформаций сдвига, не сопровождающихся изменениями плотности среды.

[2]) Этим распределением определяются возникающие в теле под воздействием электрического поля упругие натяжения — так называемая *электрострикция*, откуда и название сил $\mathbf{f}''$ и натяжения $\mathbf{T}''$.

со стороны тела B благодаря тому, что само тело B подвергается электрострикции.

Поясним это простейшим примером. Пусть тело A представляет собой заряженный шарик, погруженный в бесконечный однородный жидкий диэлектрик B; гидростатическое давление в жидкости B вдали от шарика A задано и равно p_2^0. Весом жидкости B пренебрегаем. Тогда «по Максвеллу» на поверхность S шарика A будут действовать, во-первых, электрические натяжения $\mathbf{T}'$ и, во-вторых, гидростатическое давление жидкости p_2^0. В действительности же надо еще учесть, во-первых, электрострикционные натяжения $\mathbf{T}''$, действующие на поверхность тела A и эквивалентные, согласно (34.4), давлению p''; во-вторых, так как жидкость подвергается в электрическом поле давлению p'', то *гидростатическое* давление p_2 жидкости вблизи шарика A не будет равно гидростатическому давлению p_2^0 в бесконечности: условием равновесия жидкости будет постоянство полного давления в ней

$$p'' + p_2 = \text{const} = p_2^0.$$

Таким образом, сумма действующих на поверхность тела электрострикционных натяжений $\mathbf{T}''$, эквивалентных давлению p'', и фактического гидростатического давления жидкости p_2 равна гидростатическому давлению жидкости p_2^0, вычисленному без учета электрострикции [1]. Конечно, если жидкость не находится в равновесии, то неучет электрострикции поведет, вообще говоря, к ошибке.

Итак, если нас интересует не распределение пондеромоторных сил по объему произвольного тела A, а лишь равнодействующая $\mathbf{F}$ этих сил и их момент $\mathbf{N}$, то можно ограничиться рассмотрением одних только максвелловых сил $\mathbf{f}'$ и максвелловых натяжений $\mathbf{T}'$, отбрасывая стрикционные силы и натяжения $\mathbf{f}''$ и $\mathbf{T}''$, при условии, что тело A окружено либо вакуумом, либо диэлектрической средой, находящейся в механическом равновесии.

4. Внося в (33.5) значения компонент тензора $\mathbf{T} = \mathbf{T}' + \mathbf{T}''$, можно определить слагающие по оси x силы натяжения $\mathbf{T}_n$, действующей в электрическом поле на единичную площадку, внешняя нормаль к которой направлена по $\mathbf{n}$:

$$T_{xn} = \frac{1}{4\pi}\left\{\varepsilon E_x^2 - \frac{1}{2}\left(\varepsilon - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right)E^2\right\}\cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\varepsilon}{4\pi}E_xE_y\cos(\mathbf{n}, y) + \\ + \frac{\varepsilon}{4\pi}E_xE_y\cos(\mathbf{n}, z) = \frac{\varepsilon}{4\pi}E_xE_n - \frac{1}{8\pi}E^2\left(\varepsilon - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right)\cos(\mathbf{n}, x).$$

[1]) Строго говоря, надо учесть, что из-за электрострикции изменяется плотность τ, а вместе с ней и диэлектрическая проницаемость в жидкости. Поэтому изменяется поле заряженного шарика A в жидкости и действующие на него максвелловы натяжения $\mathbf{T}'$. Однако, как показывает подсчет, эти изменения натяжений совершенно ничтожны.

Совокупность этого выражения для T_{xn} и аналогичных выражений для T_{yn} и T_{zn} в векторной форме может быть записана так:

$$\mathbf{T}_n = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_n \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} \mathbf{n} E^2 \left(\varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau\right). \tag{34.5}$$

В частном случае, если рассматриваемый элемент поверхности перпендикулярен полю $\mathbf{E}$ и его внешняя нормаль $\mathbf{n}$ параллельна $\mathbf{E}$, натяжение, приложенное к нему извне, определится выражением

$$\mathbf{T}_n = \frac{\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau}{8\pi} E^2 \mathbf{n} \qquad (\mathbf{n} \parallel \mathbf{E}); \tag{34.6}$$

если же нормаль $\mathbf{n}$ перпендикулярна полю, то

$$E_n = 0$$

и

$$\mathbf{T}_n = -\frac{\varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau}{8\pi} E^2 \mathbf{n} \qquad (\mathbf{n} \perp \mathbf{E}). \tag{34.7}$$

Наконец, если площадка dS имеет некоторое промежуточное направление, то ее можно разложить на две взаимно перпендикулярные площадки, параллельную и перпендикулярную $\mathbf{E}$, причем действующие на эти площадки силы определятся из (34.6) и (34.7). Стало быть, система натяжений в электрическом поле сводится к *тяге* $\left(\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau\right) E^2/8\pi$ *по направлению поля* $\mathbf{E}$ [уравнение (34.6)] и к *давлению* (отрицательная тяга) $\left(\varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau\right) E^2/8\pi$ *по направлению, перпендикулярному* $\mathbf{E}$ [уравнение (34.7)].

С точки зрения механической теории поля, эта тяга и это давление суть не что иное, как силы упругости, возникающие в эфире при деформации его в электрическом поле. Согласно (34.6) и (34.7), силы эти испытываются всеми теми участками эфира (как в вакууме, так и в материальных телах), в которых поле (т. е. деформация эфира) не равно нулю [1]).

Конечно, с точки зрения современной теории, отрицающей существование материального эфира (в механическом смысле этого слова), пондеромоторные силы электрического поля могут быть приложены лишь к электрическим зарядам и к материальным телам, несущим эти заряды, или, точнее, состоящим из

[1]) Мы получим правильную картину этих натяжений, если представим себе, что вдоль силовых линий поля натянуты материальные упругие нити, подверженные тяге $\left(\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau\right) E^2/8\pi$ и оказывающие друг на друга боковое давление $\left(\varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau\right) E^2/8\pi$.

электрических зарядов (электронов и атомных ядер). Однако, по доказанному, результирующая сила, действующая на тела, находящиеся в произвольном объеме V, может быть формально представлена в виде суммы натяжений, «испытываемых» поверхностью этого объема S (могущей, конечно, проходить как в вакууме, так и в материальных телах). Следовательно, мы можем оперировать с этими натяжениями, будучи уверенными в правильности окончательных результатов. Принципиальное же значение понятия натяжений электромагнитного поля выяснится в § 105, в котором мы убедимся, что в *переменных* электромагнитных полях нарушается эквивалентность между пондеромоторными силами и электромагнитными натяжениями и что избыток суммы натяжений, испытываемых поверхностью объема V, над пондеромоторными силами, испытываемыми находящимися в этом объеме телами, определяет собою изменение количества движения электромагнитного поля в этом объеме.

5. Замена пондеромоторных сил эквивалентной системой натяжений весьма облегчает, в частности, определение сил, приложенных к поверхности разрыва электрического поля, т. е. к поверхностям, заряженным свободным электричеством, и к поверхностям раздела сред различной поляризуемости. Правда, при выводе системы натяжений (34.2) и (34.3) мы базировались на результатах § 32, в котором подобные поверхности разрыва предполагались отсутствующими. Однако, определив на основании (34.2) и (34.3) результирующую силу, приложенную, например, к заряженному слою конечной толщины, и переходя затем в пределе к бесконечно тонкому слою, мы найдем, очевидно, силу, действующую на заряженную поверхность.

Нормаль к поверхности слоя, отграничивающего среду *1* от среды *2*, обозначим через $\mathbf{n}$; для определенности предположим, что $\mathbf{n}$ направлено из среды *1* в среду *2*. Элемент dS той поверхности слоя, которая граничит со средой *1*, будет, согласно (34.5), испытывать со стороны этой среды силу

$$\mathbf{T}'_{1n}\,dS = -\frac{\varepsilon_1}{8\pi}\,(2E_{1n}\mathbf{E}_1 - E_1^2\mathbf{n})\,dS$$

(для простоты тензор $\mathbf{T}$ заменяем максвелловым тензором $\mathbf{T}'$), а элемент dS поверхности, граничащей со средой *2*, будет испытывать со стороны этой среды силу

$$\mathbf{T}'_{2n}\,dS = +\frac{\varepsilon_2}{8\pi}\,(2E_{2n}\mathbf{E}_2 - E_2^2\mathbf{n})\,dS.$$

Отличие знаков этих выражений обусловливается тем, что, по условию, направление *внешней* нормали к слою совпадает в среде *2* с направлением $\mathbf{n}$, а в среде *1* — прямо ему противоположно. Общая сила, действующая на элемент слоя поверхности dS, равна, таким образом:

$$\mathbf{f}'\,dS = (\mathbf{T}'_{1n} + \mathbf{T}'_{2n})\,dS = \frac{1}{4\pi}\,(D_{2n}\mathbf{E}_2 - D_{1n}\mathbf{E}_1)\,dS - \frac{1}{8\pi}\,(D_2E_2 - D_1E_1)\mathbf{n}\,dS.$$

Очевидно, что это соотношение должно остаться справедливым и при переходе к предельному случаю бесконечно тонкого слоя, т. е. к поверхности.

Таким образом, результирующая сила, действующая на единицу площади произвольной поверхности, равна

$$\mathbf{f}' = \frac{1}{4\pi}(D_{2n}\mathbf{E}_2 - D_{1n}\mathbf{E}_1) - \frac{1}{8\pi}(D_2E_2 - D_1E_1)\mathbf{n}, \qquad (34.8)$$

где $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{D}_2$ суть, соответственно, значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ с внутренней и с внешней (по отношению к $\mathbf{n}$) сторон этой поверхности.

Разумеется, для всякой поверхности, не являющейся поверхностью разрыва, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ и $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2$, так что сила $\mathbf{f}$ обращается в нуль.

Приложенные к поверхности разрыва силы (34.8) проявляются в том, что под их воздействием в помещенных в электрическое поле телах возникают уравновешивающие их *упругие* натяжения, сумма всех натяжений (электрических и упругих) не может испытывать разрывов и должна быть одинаковой по обеим сторонам любой поверхности, в том числе и поверхности заряженной или поверхности раздела двух сред. Впрочем, в большинстве случаев представляют интерес не натяжения, возникающие в телах под воздействием электрического поля, а результирующая сила, действующая в этом поле на данное тело и определяющаяся не *скачком* тензора электрических натяжений $\mathbf{T}$ на поверхности этого тела S, а значением слагающих тензора $\mathbf{T}$ с *внешней стороны поверхности тела* S.

6. Воспользуемся теперь тензором натяжений $\mathbf{T}$, чтобы уточнить смысл обычного утверждения, гласящего· пробный заряд e, помещенный в жидкий или газообразный диэлектрик, напряженность электрического поля в котором равна $\mathbf{E}_0$, испытывает силу

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}_0. \qquad (34\,9)$$

Пусть пробный заряд e представляет собою небольшое заряженное произвольной формы тело A из металла или диэлектрика. Обозначим через $\mathbf{E}'$ поле этого тела, помещенного в данную точку среды, так что истинное поле при наличии пробного тела равно $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$. Поле $\mathbf{E}'$ возбуждается, во-первых, свободным зарядом e пробного тела и, во-вторых, распределением связанных или индуцированных зарядов, которые возникают в нем под воздействием внешнего поля $\mathbf{E}_0$. Результирующую силу, действующую на пробное тело A, можно вычислить с помощью формулы (34.2); тензор $\mathbf{T}''$, по доказанному, к этой силе ничего не привносит

Слагающие тензора $\mathbf{T}'$ являются квадратичными функциями слагающих поля $\mathbf{E}$. При вычислении слагающих $\mathbf{T}'$ сделаем два предположения:

1) тело A настолько мало, что на всем протяжении некоторой охватывающей его поверхности S невозмущенное наличием пробного тела поле $\mathbf{E}_0$ и диэлектрическую проницаемость среды ε можно считать постоянными;

2) заряд e и размеры тела A настолько малы, что возбуждаемое им в точках этой поверхности S поле $\mathbf{E}'$ гораздо меньше $\mathbf{E}_0$ [1]), так что при вычислении $\mathbf{T}'$ членами, квадратичными в $\mathbf{E}'$, можно пренебречь.

Пусть ось x совпадает с направлением поля $\mathbf{E}_0$ вблизи пробного тела A. Тогда при перечисленных условиях путем простых выкладок получим из (34.2):

$$4\pi T'_{xx} = \varepsilon\left(\frac{E_0^2}{2} + E_0E'_x\right), \quad 4\pi T'_{xy} = \varepsilon E_0E'_y, \quad 4\pi T'_{xz} = \varepsilon E_0E'_z$$

и после подстановки в (33.2) и (33.5)

$$F_x = F'_x = \frac{\varepsilon}{8\pi}E_0^2\oint\cos(\mathbf{n}, x)\,dS + \frac{1}{4\pi}E_0\oint\varepsilon E'_n\,dS.$$

[1]) Заметим, что размеры поверхности S могут значительно превышать размеры самого пробного тела и ограничены только первым условием, ибо на находящиеся внутри S участки однородной среды силы $\mathbf{f}'$ не действуют.

Первый интеграл, как легко убедиться, обращается в нуль [1], второй же на основании (22.3) равен $4\pi e$, так что $F_x = eE_0$.

Далее, при указанных условиях [2] $F_y = F_z = 0$. Таким образом, перечисленные условия действительно обеспечивают справедливость формулы (34.9).

Задача 20. Заряд e расположен в вакууме на расстоянии z_0 от поверхности однородного диэлектрика, заполняющего полупространство $z \leqslant 0$. Пользуясь результатами решения примера в конце § 23, показать, что сила притяжения между зарядом и диэлектриком равна

$$F = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \left(\frac{e}{2z_0}\right)^2.$$

Примечание. Конечно, это выражение для силы взаимодействия остается справедливым и в случае диэлектрика конечных размеров, если только его поперечные размеры (точнее, расстояние от заряда тех участков, где поверхность диэлектрика перестает быть плоской или где начинает меняться диэлектрическая проницаемость) и толщина достаточно велики по сравнению с z_0.

---

[1]) Ср. § 56, в частности формулу (56.3), из которой следует

$$\oint \cos(\mathbf{n}, x)\, dS = \oint \mathbf{i}\, d\mathbf{S} = \mathbf{i} \oint d\mathbf{S} = 0.$$

[2]) Действительно, приняв во внимание, что $\oint \cos(\mathbf{n}, y)\, dS = 0$, для F_y легко получить выражение $F_y = F_y' = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_0 \oint \{E_y' \cos(x, \mathbf{n}) - E_x' \cos(y, \mathbf{n})\}\, dS$. Вводя единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ по осям координат, можем написать $E_y' \cos(x, \mathbf{n}) - E_x' \cos(y, \mathbf{n}) = (\mathbf{E}'\mathbf{j})(\mathbf{in}) - (\mathbf{E}'\mathbf{i})(\mathbf{jn}) = [\mathbf{ij}][\mathbf{nE}']$. Наконец, на основании (56*) и (7.6) $\oint [\mathbf{nE}']\, dS = \int \operatorname{rot} \mathbf{E}' \cdot dV = 0$.

ГЛАВА III

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 35. Электрический ток в металлах. Законы Ома и Джоуля. Напряжение

1. Согласно данному в § 5 определению, проводники электричества суть тела, отличающиеся тем свойством, что если внутри проводника напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ отлична от нуля, то в проводнике возникает электрический ток, т. е. движение зарядов.

В настоящей книге мы почти исключительно ограничимся рассмотрением лишь одного определенного класса проводников, а именно металлов. Прохождение тока через металлические проводники *не сопровождается химическими процессами* в проводнике [1]), тогда как, например, при прохождении тока через раствор электролита происходит электролиз, т. е. выделение ионов электролита на опущенных в раствор электродах.

Объясняется это отличие тем, что в электролитах носителями зарядов являются ионы, т. е. заряженные атомы или группы атомов, тогда как в металлах заряды переносятся «свободными» электронами, отщепившимися от атомов металла.

Не вдаваясь пока в рассмотрение физического механизма прохождения тока через металл, мы начнем с изложения феноменологической теории постоянных токов.

2. Основной закон постоянного тока — *закон Ома*, являющийся обобщением данных *опыта*, формулируется обычно следующим образом:

$$J = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}, \tag{35.1}$$

где J — сила тока в проводнике, R — сопротивление определенного участка этого проводника, а φ_1 и φ_2 — значения потенциала у начала и конца этого участка (считая по направлению тока). При этом *силой тока*, как известно, называется количество электричества, протекающее через сечение проводника в единицу времени [2]), а направление тока условно считается совпадающим

[1]) Это относится и к прохождению тока через так называемые полупроводники.

[2]) Определение это однозначно, ибо через любое сечение проводника протекает одинаковое количество электричества (если только ток постоянен и цепь тока не имеет разветвлений, — см. § 37).

с тем направлением, в котором под действием поля должны были бы двигаться *положительные* заряды; другими словами, условно считается, что ток течет от большего потенциала к меньшему ($\varphi_1 > \varphi_2$).

Следовательно, в абсолютной системе единиц размерность силы тока равна

$$[J] = \left[\frac{\text{абс. ед. электричества}}{\text{с}}\right] = \text{M}^{1/2} \cdot \text{L}^{3/2} \cdot \text{T}^{-2}.$$

Абсолютная единица силы тока соответствует переносу через сечение проводника одной абсолютной единицы электричества в одну секунду. В практической же системе единиц количество электричества измеряется в кулонах; соответственно этому сила тока измеряется в амперах. По определению, ток силою в 1 ампер переносит через сечение проводника 1 кулон в секунду:

$$1\text{A} = 1\frac{\text{Кл}}{\text{с}} = 3 \cdot 10^9 \frac{\text{абс. ед. электричества}}{\text{с}} = 3 \cdot 10^9 \text{ абс. ед. силы тока.}$$

3. Что же касается сопротивления R, то его размерность, как явствует из (35.1), равна

$$[R] = \left[\frac{\varphi}{J}\right] = \frac{\text{M}^{1/2} \cdot \text{L}^{1/2} \cdot \text{T}^{-1}}{\text{M}^{1/2}\ \text{L}^{3/2} \cdot \text{T}^{-2}} = \text{L}^{-1}\text{T};$$

таким образом, размерность сопротивления обратна размерности скорости.

В практических единицах потенциал измеряется в вольтах; соответственно этому сопротивление измеряется в омах. Проводник обладает по определению сопротивлением в 1 ом, если при разности потенциалов на его концах в 1 вольт по нему протекает ток силою в 1 ампер:

$$1\ \text{Ом} = 1\frac{\text{В}}{\text{А}} = \frac{\frac{1}{300}\ \text{абс. ед. потенциала}}{3 \cdot 10^9\ \text{абс ед силы тока}} =$$

$$= \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ абс. ед. сопротивления.}$$

4. Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, входящую в формулу (35.1), согласно (8.2), можно выразить через линейный интеграл напряженности поля $\mathbf{E}$, взятый от начального до конечного сечения рассматриваемого участка проводника:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_s\, ds, \tag{35.2}$$

где ds — элемент длины проводника.

Линейный интеграл напряженности электрического поля между точками *1* и *2* носит название *напряжения*, существующего

между этими точками, и будет нами обозначаться через $\mathscr{E}_{12}$:

$$\mathscr{E}_{12} = \int_1^2 E_s\, ds. \tag{35.3}$$

Нужно весьма остерегаться смешивать понятия *напряжения* $\mathscr{E}_{12}$ и *напряженности поля* $\mathbf{E}$, тем более, что иногда эти понятия обозначаются одним и тем же термином «напряжение».

Внося (35.2) и (35.3) в (35.1), получаем

$$JR = \int_1^2 E_s\, ds = \mathscr{E}_{12}. \tag{35.4}$$

Эта форма закона Ома в случае постоянного электрического поля равносильна формуле (35.1). Однако она обладает тем преимуществом, что остается применимой и к переменным (квазистационарным) токам, тогда как в поле этих токов, как мы убедимся в гл. VI, понятие электрического потенциала φ, а стало быть, и формула (35.1) оказываются неприменимыми.

5. С прохождением тока, как известно, неразрывно связано *выделение тепла* (нагревание проводников) *в цепи тока*

Количество теплоты Q, выделяемое током в единицу времени в каком-либо участке цепи, может быть определено следующим образом. Если сила тока в проводнике равна J, то за элемент времени dt через каждое сечение проводника протекает $de = J\,dt$ единиц электричества; в частности, сколько единиц электричества проникнет через начальное сечение *1* внутрь рассматриваемого участка проводника, такое же количество электричества выйдет из этого участка через его сечение *2* (рис. 35). Так как распределение зарядов в проводнике остается при этом неизменным (постоянный ток!), то весь процесс эквивалентен непосредственному переносу de единиц электричества от сечения *1* к сечению *2*.

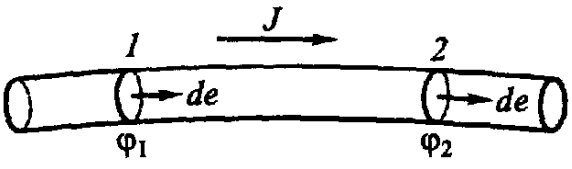

Рис. 35

Совершаемая при этом переносе работа электрических сил равна

$$A = de \int_1^2 E_s\, ds = J\,dt \int_1^2 E_s\, ds = J\,dt\mathscr{E}_{12}, \tag{35.5}$$

где линейный интеграл может быть взят по оси цилиндрического проводника. Согласно закону сохранения энергии, эквивалентное этой работе электрических сил количество энергии должно выделиться в виде иной формы энергии (например, в форме тепла).

Следовательно, выделяемая током энергия равна

$$Q\,dt = J\,dt \int_1^2 E_s\,ds,$$

откуда

$$Q = J \int_1^2 E_s\,ds. \tag{35.6}$$

Воспользовавшись законом Ома (35.4), получим

$$Q = RJ^2. \tag{35.7}$$

Наконец, в том случае, если поле E обладает потенциалом φ, как это имеет место для поля постоянных токов, мы можем, согласно (35.2), записать это уравнение так:

$$Q = J(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{35.8}$$

Если проводник неподвижен и если в нем не происходит химических реакций (электролиты!), то это количество энергии Q выделяется током в форме *тепла*. Таким образом, уравнения (35.6) и (35.8) выражают собой известный *закон Джоуля*.

Уже в § 38 мы убедимся, что область приложимости уравнения (35.7) гораздо шире приложимости уравнений (35.6) и (35.8), хотя в пределах нашего теперешнего рассмотрения все эти уравнения вполне эквивалентны друг другу. Мы увидим, что при наличии сторонних электродвижущих сил эквивалентность этих уравнений нарушается и что количество выделяемого тепла определяется именно уравнением (35.7).

6. Величина Q, равная количеству выделяющейся в единицу времени энергии, должна, очевидно, иметь размерность мощности. Действительно:

$$[Q] = [\varphi J] = (\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{1/2}\mathrm{T}^{-1})(\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{T}^{-2}) = \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-3} = \frac{\text{работа}}{\text{время}}.$$

Соответственно этому в абсолютной системе единиц Q измеряется в эргах в секунду. В практической же системе единиц Q измеряется в ваттах: 1 ватт есть энергия, выделяемая током силою в 1 ампер при прохождении разности потенциалов в 1 вольт:

$$1\ \text{Вт} = 1\ \text{вольт} \cdot \text{ампер} =$$

$$= \left(\frac{1}{300}\ \text{абс. ед. потенциала}\right)(3 \cdot 10^9\ \text{абс. ед. силы тока}) =$$

$$= 10^7\ \text{абс. ед. мощности} = 10^7\,\frac{\text{эрг}}{\text{с}}.$$

Как известно, в практической системе единиц работа измеряется в джоулях (Дж):

$$1\ \text{Дж} = 10^7\ \text{эрг};$$

поэтому

$$1\ \text{Вт} = 1\ \frac{\text{Дж}}{\text{с}}.$$

Разумеется, выделяемая током энергия Q может быть выражена также и в тепловой мере, т. е. в калориях в секунду.

§ 36. Плотность тока. Дифференциальная форма уравнений Ома и Джоуля

1. Наряду с силой тока весьма важное значение имеет также *плотность тока* j: по определению она равна количеству электричества, протекающему в 1 с *через единицу* перпендикулярного току *сечения* проводника. В однородном цилиндрическом проводнике ток равномерно распределяется по его сечению, так что

$$j = \frac{J}{S}, \tag{36.1}$$

где S — сечение проводника.

Однако в общем случае плотность тока j, вообще говоря, не будет одинаковой по всему сечению проводника, так что под плотностью тока в каждой данной точке проводника нужно будет понимать предел отношения силы тока dJ, протекающей через *перпендикулярный к направлению тока* элемент сечения проводника dS, к этому элементу dS:

$$j = \lim_{dS \to 0} \frac{dJ}{dS},$$

откуда

$$dJ = j\, dS. \tag{36.2}$$

Если, наконец, рассматривать плотность тока как *вектор*, направление которого совпадает с направлением тока в данной точке проводника, то при любом направлении площадки dS будет справедливо соотношение

$$dJ = j_n\, dS$$

или

$$j_n = \frac{dJ}{dS}, \tag{36.3}$$

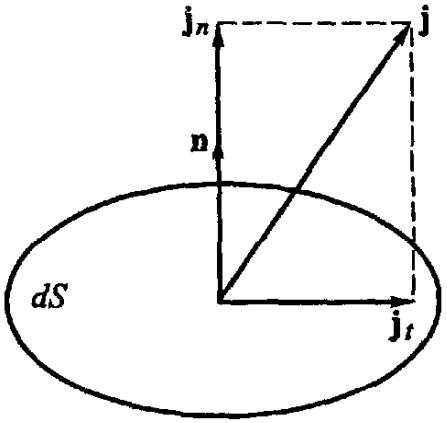

Рис. 36

где j_n — проекция вектора $\mathbf{j}$ на внешнюю нормаль $\mathbf{n}$ к dS, а dJ — сила тока, протекающего через dS. Справедливость этого соотношения явствует из того, что тангенциальная к dS слагающая плотности тока характеризует течение электричества *вдоль* (а не *через*) площадки dS (рис. 36). Из (36.3) следует, в частности, что силе протекающего через площадку dS тока dJ нужно приписывать

как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от того, протекает ли ток через dS в направлении произвольно выбранной положительной нормали $\mathbf{n}$ к этой площадке или же в обратном ей направлении.

2. Воспользовавшись понятием плотности тока, мы можем выразить основные уравнения электрического тока в *дифференциальной* форме, устанавливающей связь между величинами, относящимися к одной определенной точке проводника, тогда как законы Ома и Джоуля в интегральной форме [(35.1) и (35.7)] связывают величины, относящиеся к различным точкам (φ_1 и φ_2) или к конечным отрезкам (R) проводника.

Обращаясь прежде всего к закону Ома, рассмотрим какой-либо однородный по составу и цилиндрический по форме участок проводника. В этом случае, как известно,

$$R = \frac{l}{S}\rho,$$

где l — длина участка проводника, обладающего сопротивлением R, S — его сечение, а ρ — *удельное сопротивление*, характеризующее вещество проводника. Если вместо удельного сопротивления ρ ввести обратную ему величину — удельную проводимость, или *электропроводность* λ:

$$\lambda = \frac{1}{\rho},$$

то

$$R = \frac{l}{S\lambda}. \tag{36.4}$$

Внося это выражение в (35.4), получим

$$\frac{Jl}{S\lambda} = \int_1^2 E_s\, ds,$$

или ввиду (36.1)

$$j = \frac{\lambda}{l}\int_1^2 E_s\, ds.$$

В случае постоянного тока в однородном цилиндрическом проводнике, ввиду тождества физических условий по всей его длине, слагающая поля по оси проводника E_s, очевидно, имеет постоянное значение, так что

$$\int_1^2 E_s\, ds = E_s \int_1^2 ds = E_s l,$$

и, следовательно,

$$j = \lambda E_s.$$

В каждой точке проводника направление тока совпадает с направлением электрического поля [1], обусловливающего движение зарядов. Стало быть, вектор плотности тока должен совпадать по направлению с вектором $\mathbf{E}$, и последнее уравнение может быть записано окончательно в виде

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}. \tag{36.5}$$

Это уравнение, устанавливающее пропорциональность плотности тока в проводнике напряженности поля в нем, представляет собой наиболее общую и простую формулировку закона Ома. Его можно назвать *дифференциальной формой закона Ома* (хотя в него и не входят производные), потому что оно устанавливает связь между величинами, относящимися *к одной определенной точке проводника.*

Хотя при выводе формулы (36.5) мы исходили из рассмотрения однородного цилиндрического проводника, однако в этой дифференциальной форме закон Ома оказывается применим к проводникам любой формы, как однородным, так и неоднородным [см., впрочем, уравнение (38.1)].

Более того, уравнение (36.5) остается справедливым и в переменных электрических полях и, таким образом, является одним из основных уравнений электродинамики.

3. Закон Джоуля (35.7), носящий характер закона интегрального, может быть, подобно закону Ома, преобразован в форму дифференциальную. С этой целью введем вместо Q удельную мощность тока q, т е. количество теплоты, выделяющееся за секунду в *единице объема* проводника: $q = Q/V$, где V — объем участка проводника, в котором выделяется общее количество теплоты Q [2].

Рассмотрим опять однородный цилиндрический проводник сечения S, длины l и объема $V = Sl$. Согласно (35 7) и (36.4)

---

[1] В частности, если в однородном цилиндрическом проводнике установился постоянный ток, то вектор $\mathbf{E}$ в этом проводнике должен быть направлен по оси проводника и, стало быть, $E_s = E$ и $j = \lambda E$ Действительно, в противном случае перпендикулярная этой оси слагающая напряженности $\mathbf{E}$ вызвала бы появление параллельного ей тока, т. е. перемещение зарядов с одной стороны поверхности проводника на другую Это перераспределение поверхностных зарядов длилось бы до тех пор, пока поле этих зарядов не скомпенсировало бы внутри проводника перпендикулярной к его оси слагающей внешнего поля, т е. до тех пор, пока $\mathbf{E}$ не стало бы параллельным оси проводника.

[2] Если выделение теплоты происходит неравномерно по объему проводника, то, как обычно, значение q в каждой точке проводника определяется соотношением $q = \lim_{V \to 0} (Q/V)$

получим

$$q = \frac{Q}{V} = \frac{RJ^2}{Sl} = \frac{1}{\lambda}\frac{J^2}{S^2},$$

откуда на основании (36.1)

$$q = \frac{1}{\lambda} j^2, \tag{36.6}$$

или на основании (36.5)

$$q = \lambda E^2 = \mathbf{jE}. \tag{36.7}$$

Уравнение (36.6) представляет собой наиболее общую формулировку закона Джоуля, применимую к любым проводникам, вне зависимости от их формы, однородности и т. д., наконец, вне зависимости от того, имеем ли мы дело с постоянным или переменным током. Что же касается уравнения (36.7), то, как мы увидим в § 39, область приложимости его несколько у́же.

§ 37. Условия стационарности токов. Уравнение непрерывности. Нити тока

1. Электрическое поле постоянных токов, как и поле электростатическое, является полем потенциальным в смысле § 7. В частности, вектор напряженности этого поля $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (7.3) и может быть выражен через градиент потенциала:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Действительно, в поле постоянных токов распределение зарядов в пространстве должно оставаться *стационарным*, т. е. неизменным во времени, ибо если бы имело место какое бы то ни было перераспределение зарядов, то напряженность поля неизбежно должна была бы измениться, и ток перестал бы быть постоянным. Но если распределение зарядов стационарно, то поле их должно быть тождественно с электростатическим полем соответственно распределенных *неподвижных* зарядов; то обстоятельство, что в данной точке пространства одни элементы заряда благодаря наличию тока сменяются другими, не может сказываться на напряженности электрического поля, поскольку плотность зарядов в каждой точке пространства остается постоянной [1]). Стало быть, *стационарное поле постоянных токов*, как и поле электростатическое, должно быть *полем потенциальным*.

2. Из стационарности распределения зарядов в поле постоянных токов вытекает, что токи эти необходимо должны быть либо замкнутыми, либо уходить в бесконечность, ибо, в противном

[1]) Это утверждение является, в сущности, одним из основных постулатов теории электрического поля

случае, в месте начала (истоков) и окончания (стоков) тока происходило бы с течением времени накопление и убывание зарядов. По той же причине через различные сечения проводника (если только между этими сечениями нет разветвлений проводника) должен протекать ток одинаковой силы. Наконец, в каждой точке P разветвления цепи тока, в которой соприкасаются между собой два или вообще n проводников, несущих соответственно токи J_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, должен удовлетворяться так называемый *первый закон Кирхгофа*, согласно которому алгебраическая сумма сил токов, притекающих к точке разветвления цепи, должна равняться нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} J_i = 0; \qquad (37.1)$$

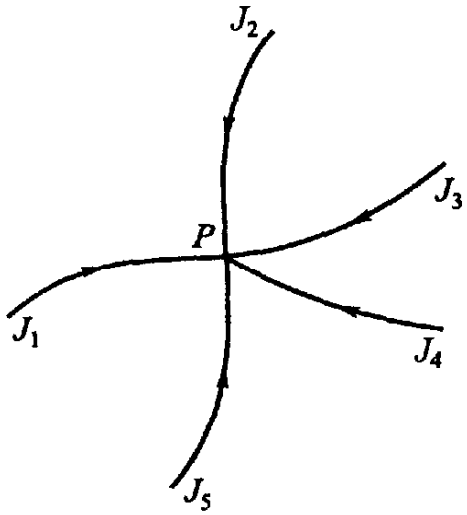

Рис. 37

в противном случае в точке P происходило бы накопление электрических зарядов. При этом для всех проводников, соприкасающихся в точке P, положительное направление тока должно быть, конечно, выбрано одинаковым образом, т. е. совпадающим либо с направлением к точке P, либо с направлением от точки P (рис. 37).

3. Самое общее условие стационарности токов и поля может быть получено следующим образом. Согласно (36.3) интеграл $\oint j_n\, dS$ по произвольной замкнутой поверхности S должен равняться алгебраической сумме сил токов, проходящих через отдельные элементы dS этой поверхности, т. е. должен равняться количеству электричества, выходящего за единицу времени из ограниченного поверхностью S объема V (если $\mathbf{n}$ есть внешняя нормаль к S). С другой стороны, согласно лежащему в основе теории электричества *закону сохранения электричества* [1]), ко-

[1]) Часто закон сохранения электричества формулируют в том смысле, что электрические заряды могут лишь перемещаться в пространстве, но не могут ни возникать, ни исчезать. Действительно, кажущееся возникновение электрических зарядов, например при электризации тел трением, сводится лишь к перераспределению в пространстве элементарных зарядов (электронов и ионов), ранее существовавших в этих телах, но располагавшихся в них так, что заряды противоположных знаков взаимно нейтрализовались.

Однако сохранение числа элементарных зарядов имеет место лишь в пределах обычных физических и химических явлений. В области же явлений, относящихся к физике атомных ядер и космических лучей, число элементарных зарядов не сохраняется. Так, например, возможно образование пары зарядов — электрона и позитрона — за счет энергии гамма-лучей. Поэтому закон сохранения электричества надо понимать в смысле *сохранения алгебраической суммы электрических зарядов*, а не сохранения суммы зарядов каждого знака порознь.

личество электричества, вышедшего за 1 с за пределы объема V, должно равняться $-\partial e/\partial t$, т. е. убыли за тот же промежуток времени заряда e, находящегося внутри этого объема [1]. Таким образом, мы приходим к равенству

$$\oint j_n \, dS = -\frac{\partial e}{\partial t}. \tag{37.2}$$

Это весьма важное уравнение, по установившейся терминологии, носит название *уравнения непрерывности* и является математическим выражением постулата *сохранения количества электричества*. К этому уравнению нам еще придется вернуться в дальнейшем. В интересующем же нас здесь случае постоянных токов распределение зарядов стационарно, т. е. $\partial e/\partial t = 0$, так что уравнение непрерывности принимает вид

$$\oint j_n \, dS = 0. \tag{37.3}$$

4. Если внутри объема V, ограниченного поверхностью S, нет поверхностей разрыва вектора $\mathbf{j}$ (подобные разрывы, вообще говоря, могут иметь место лишь на поверхностях соприкосновения двух различных сред), то (37.3) можно преобразовать с помощью теоремы Гаусса (17*):

$$\oint j_n \, dS = \int \operatorname{div} \mathbf{j} \, dV = 0.$$

Ввиду произвольности объема интегрирования V отсюда следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{37.4}$$

Это уравнение является наиболее общим выражением того факта, что постоянный ток не имеет истоков, т. е. что *линии тока* всегда замкнуты либо уходят в бесконечность (ср. сказанное о силовых линиях электрического поля в § 10) [2]. При этом под линиями тока нужно, очевидно, понимать линии вектора $\mathbf{j}$, т. е. линии, касательные к которым совпадают с направлением вектора $\mathbf{j}$ в точке касания.

На поверхности соприкосновения двух различных сред вектор плотности тока может испытывать разрыв непрерывности.

---

[1]) Знак *частной* производной должен означать, что при дифференцировании по времени поверхность S и объем V считаются неподвижными.

[2]) Согласно § 10, для линий, не имеющих истоков, мыслима еще третья возможность: они могут заполнять собой конечные участки пространства. Однако при отсутствии сторонних ЭДС (см. § 38) линии тока, согласно (36.5), совпадают с силовыми линиями стационарного электрического поля, для которых эта возможность, согласно § 10, исключена. Остается лишь оговорить, что линии тока могут начинаться и кончаться в точках неопределенности поля, где $\mathbf{E} = \mathbf{j} = 0$ (см. примечание на с. 55, § 10).

Однако нормальная к поверхности слагающая этого вектора $\mathbf{j}$ должна быть одинаковой по обеим сторонам поверхности разрыва, ибо в противном случае количество электричества, притекающее к одной стороне этой поверхности, не было бы равно количеству электричества, вытекающему с другой ее стороны. Следовательно,

$$j_{1n} = j_{2n}, \tag{37.5}$$

где $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{j}_2$ — плотности тока в первой и второй средах, а $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности их соприкосновения. Если проводник граничит с непроводящей средой, то в ней $\mathbf{j} = 0$, и, следовательно, нормальная к поверхности слагающая плотности тока в проводнике также должна равняться нулю:

$$j_n = 0. \tag{37.6}$$

5. Благодаря замкнутости постоянных токов их можно разложить на совокупность бесконечно тонких замкнутых (или уходящих в бесконечность) *нитей тока*. С этой целью выберем произвольную площадку dS внутри проводника и проведем через все точки контура этой площадки линии тока. Образованная совокупностью этих линий цилиндрическая поверхность и выделит из объема проводника так называемую нить тока. Так как через боковую поверхность такой нити электричество, очевидно, не протекает, то сила тока dJ во всех сечениях dS каждой нити должна быть постоянной, т. е.

$$dJ = j\,dS = \text{const},$$

где под dS надо понимать перпендикулярное к $\mathbf{j}$ сечение нити тока. Так как, далее, линии тока, а стало быть, и поверхности нитей тока пересекаться нигде не могут (ибо в каждой точке пространства, в которой $\mathbf{j} \neq 0$, направление линии тока *однозначно* определяется направлением вектора $\mathbf{j}$), то каждая нить тока должна замыкаться сама на себя (т. е. быть замкнутой) либо идти из бесконечности в бесконечность (см. примечание к с. 56).

6. В случае постоянных токов, как и в электростатике, макроскопическая плотность (свободных) зарядов внутри *однородных* проводников равна нулю, ибо при $\lambda = \text{const}$ из (37.4) следует:

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = \operatorname{div}\lambda\mathbf{E} = \lambda \operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho = 0. \tag{37.7}$$

Задача 21. Пространство между обкладками шарового конденсатора (радиусы R_1 и R_2) заполнено проводящей средой удельной электропроводности λ. Найти силу тока, проходящего через конденсатор, если его обкладки поддерживаются при постоянной разности потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$, и показать, что сопротивление находящегося между обкладками шарового слоя равно

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Задача 22. Показать, что на поверхности раздела двух проводников линии тока испытывают преломление, причем

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\operatorname{tg}\beta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

где β_1 — угол между линией тока в первой среде и нормалью к поверхности раздела, λ_1 — электропроводность первой среды, а β_2 и λ_2 — соответствующие величины для второй среды (ср. задачу 16, § 22).

Задача 23. Показать, что нормальная слагающая электрической индукции у поверхности проводника определяется уравнением

$$D_n = 4\pi\sigma$$

также и в том случае, если по проводнику протекает постоянный ток, но что векторное уравнение (22 10) в этом случае перестает быть справедливым.

§ 38. Сторонние электродвижущие силы. Квазилинейные токи. Второй закон Кирхгофа

1. Существеннейшее отличие стационарного поля постоянных токов от поля электростатического заключается в том, что для поддержания первого необходима непрерывная затрата энергии, тогда как в электростатическом поле никаких превращений энергии не происходит. Действительно, как мы видели, электрический ток, т. е. перенос электричества по проводникам под воздействием сил электрического поля, сопровождается работой этих сил, причем эквивалентное этой работе количество энергии выделяется в форме так называемого джоулева тепла. Ввиду стационарности поля постоянных токов вся энергия, выделяющаяся в цепи тока, должна непрерывно возмещаться за счет других видов энергии — механической (динамо-машины), химической (гальванические элементы, аккумуляторы), тепловой (термоэлементы) и т. д. Иными словами, для поддержания постоянного тока необходимо, чтобы в известных участках цепи тока действовали *электродвижущие силы неэлектростатического происхождения* (индукционные, контактные на поверхностях соприкосновения различных проводников, термоэлектрические и т. д.); их работой и компенсируется затрата электрической энергии, выделяющейся в форме джоулева тепла.

Если бы все действующие в цепи ЭДС сводились к силам электростатического поля, т. е. к силам кулоновым, то под воздействием этих сил положительные заряды проводников стекались бы из мест большего потенциала к потенциалам меньшим, отрицательные же двигались бы в обратном направлении, что вело бы к выравниванию потенциалов. В результате все соеди-

ненные между собой проводники приобрели бы одинаковый потенциал, и ток прекратился бы. Иными словами, при наличии одних лишь кулоновых сил *стационарное* поле должно быть полем *статическим*. Таким образом, мы приходим к выводу, в известном отношении напоминающему теорему Ирншоу: как и в § 19, нам приходится ввести в рассмотрение силы неэлектростатического происхождения, действующие на электрические заряды. Разница лишь в том, что в § 19 введение подобных сил вызывалось необходимостью учесть возможность *устойчивого равновесия* системы электрических зарядов, теперь же нас вынуждает к этому факт существования *постоянных* токов.

Итак, мы должны допустить, что, помимо электрических сил стационарного электрического поля, на электрические заряды в проводниках может действовать еще некоторое поле сил неэлектростатического происхождения. Для краткости мы будем называть эти силы *сторонними* (электростатическому полю) и будем обозначать напряженность поля сторонних сил через $\mathbf{E}^{\text{стр}}$.

К сторонним силам в *этой главе* мы причисляем все ЭДС неэлектростатического происхождения. Весьма важный класс этих сил будет сведен в гл. VI к силам переменного электромагнитного поля (*индукционным*), после чего мы уже не будем применять к силам этого класса термин «сторонние». Помимо них существуют, однако, и силы *«сторонние» в собственном смысле слова, обусловленные химической и физической неоднородностью проводников*. Таковы силы, возникающие при соприкосновении проводников различного химического состава (гальванический элемент, аккумулятор) или различной температуры (термоэлемент), при наличии градиента концентрации в растворе электролита (концентрационный гальванический элемент) и т. д. Конечно, перед электронной теорией материи стоит задача выяснить механизм возникновения всех «сторонних» ЭДС и свести их к взаимодействию электрических зарядов, входящих в состав атомов неоднородных проводников. Задача эта, однако, выходит за рамки этой книги.

2. Если под действием электростатического поля $\mathbf{E}$ в проводнике возникает, согласно (36.5), ток плотности

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E},$$

то под совокупным действием поля $\mathbf{E}$ и поля сторонних сил $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ должен, очевидно, возникать ток плотности

$$j = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}). \tag{38.1}$$

Это выражение представляет собою дифференциальную форму *обобщенного закона Ома* (для случая наличия сторонних ЭДС), из которого нетрудно получить и интегральную форму этого закона. При этом в настоящем параграфе нам достаточно будет ограничиться рассмотрением *квазилинейных токов*.

3. Квазилинейными (не смешивать с линейными, о которых будет идти речь в следующей главе) токами мы будем называть токи, удовлетворяющие следующим условиям. в каждом участке несущего ток проводника можно определить направление его *оси* так, чтобы во всех точках любого перпендикулярного оси сечения проводника все физические величины ($\mathbf{j}$, φ, λ, $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ и т. д.) можно было с достаточной точностью считать постоянными и чтобы вектор плотности тока $\mathbf{j}$ был параллелен (или антипараллелен) этой оси. Такие токи мы называем квазилинейными потому, что в ряде случаев рассмотрение несущего ток проводника может быть заменено рассмотрением его оси, которую мы будем называть *контуром тока*.

4. Рассмотрим произвольный участок квазилинейного тока, заключенный между сечениями *1* и *2*, и предположим сначала, что в этом участке нет разветвлений цепи тока. Пусть перпендикулярное оси сечение проводника равно S, причем, вообще говоря, S может быть переменным по длине проводника. Разделив уравнение (38.1) на λ, умножая, далее, это уравнение скалярно на элемент оси проводника ds, *взятый по направлению тока* $\mathbf{j}$, и интегрируя от сечения *1* до сечения *2*, получим (ввиду того, что $\mathbf{j}\,d\mathbf{s} = j\,ds$):

$$\int_1^2 \frac{j\,ds}{\lambda} = \int_1^2 E_s\,ds + \int_1^2 E_s^{\text{стр}}\,ds.$$

Заменим в первом интеграле j на J/S и вынесем J как величину постоянную за знак интеграла. Далее, интеграл

$$\int_1^2 \frac{ds}{S\lambda} = R_{12}$$

есть не что иное, как сопротивление участка проводника, лежащего между сечениями *1* и *2*, ибо подынтегральное выражение равно сопротивлению элемента длины проводника; в частности, для однородного проводника постоянного сечения R_{12} совпадает с (36.4). Стало быть, окончательно:

$$JR_{12} = \int_1^2 E_s\,ds + \int_1^2 E_s^{\text{стр}}\,ds, \tag{38.2}$$

что представляет собой наиболее общую интегральную форму *обобщенного закона Ома*.

Напряжение сторонних ЭДС между точками *1* и *2* [ср. (35.3)]

$$\mathscr{E}_{12}^{\text{стр}} = \int_1^2 E_s^{\text{стр}}\,ds \tag{38.3}$$

часто называется просто *электродвижущей силой*, приложенной между этими точками, и сокращенно обозначается через ЭДС. Внеся (35.3) и (38.3) в (38.2), получим

$$JR_{12} = \mathscr{E}_{12} + \mathscr{E}_{12}^{\text{стр}}. \tag{38.4}$$

Стало быть, произведение силы тока на сопротивление произвольного участка проводника равно сумме напряжения и сторонней ЭДС, приложенных к этому участку.

Если электрическое поле $\mathbf{E}$ обладает потенциалом φ, как это имеет место в стационарном поле постоянных токов, то, согласно (35.2), последнее уравнение может быть записано так:

$$JR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}^{\text{стр}}. \tag{38.2}$$

Частным случаем этого уравнения при отсутствии сторонних ЭДС является наше исходное выражение (35.1) необобщенного закона Ома.

5. Если замкнутый квазилинейный ток лишен разветвлений, то, выполняя в уравнении (38.2) интегрирование по всей длине этого тока, получим

$$JR = \oint E_s\, ds + \oint E_s^{\text{стр}}\, ds, \tag{38.6}$$

где R — полное сопротивление замкнутого проводника. Если $\mathbf{E}$ обладает потенциалом, то, согласно (7.3), первый интеграл обращается в нуль, так что для постоянного тока (38.6) принимает вид

$$JR = \oint E_s^{\text{стр}}\, ds = \mathscr{E}^{\text{стр}}, \tag{38.7}$$

где $\mathscr{E}^{\text{стр}}$ — полная ЭДС в цепи тока. Стало быть, сила неразветвленного постоянного тока равна частному от деления полной сторонней ЭДС в его цепи на сопротивление этой цепи. Таким образом, при отсутствии сторонних ЭДС сила постоянного тока должна равняться нулю, как это уже отмечалось в начале параграфа.

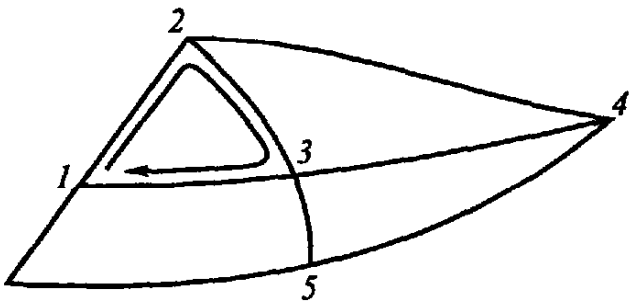

Рис. 38

Рассмотрим, наконец, произвольную цепь квазилинейных токов с произвольным числом разветвлений (рис. 38) и составим из отдельных участков этой цепи какой-либо произвольный замкнутый контур L, например контур *1 2 3 1*. Пусть J_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) есть ток в отрезке ik, причем величину J_{ik} мы будем считать положительной, если ток идет от точки i к точке k, и отрицательной в противоположном случае. Составляя для каждого участка цепи

уравнение типа (38.5) и суммируя, получим

$$\sum J_{ik}R_{ik} = \sum(\varphi_i - \varphi_k) + \sum \mathscr{E}_{ik}^{\text{стр}}.$$

Приняв во внимание, что

$$\sum(\varphi_i - \varphi_k) = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + (\varphi_3 - \varphi_1) = 0,$$

получим

$$\sum J_{ik}R_{ik} = \sum \mathscr{E}_{ik}^{\text{стр}}. \tag{38.8}$$

Итак, в любом замкнутом контуре токов алгебраическая сумма произведений типа $J_{ik}R_{ik}$ равна сумме сторонних ЭДС, приложенных к этому контуру. Это положение носит название *второго закона Кирхгофа*. Очевидно, что (38.7) есть частный случай применения этого закона к неразветвленной цепи тока.

6. Заметим в заключение, что существование сторонних ЭДС должно быть, конечно, учтено и в электростатике. Так, например, в химически или физически неоднородном проводнике условие электростатического равновесия сводится не к равенству нулю напряженности $\mathbf{E}$ электрического поля внутри проводника, а к равенству

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = -\mathbf{E}^{\text{стр}}, \tag{38.9}$$

ибо лишь при этом условии тока в проводнике не будет [ср. (38.1)].

З а д а ч а 24. A, B и C суть три последовательные станции на линии телеграфа (рис. 39). Телеграфист в A знает, что между A и B произошло нарушение изоляции линии (что равносильно

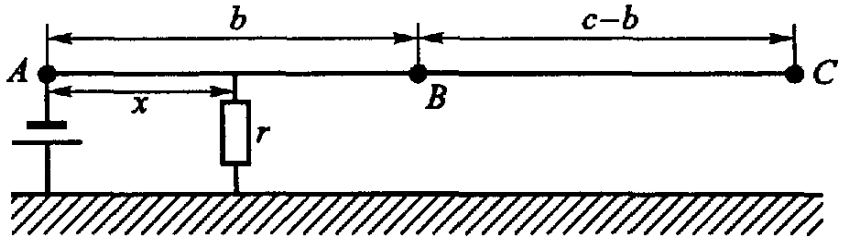

Рис. 39

ее заземлению). Включая батарею между землей и своим концом линии, он измеряет возникающую при этом в линии силу тока при трех различных условиях: 1) линия заземлена на станции C и изолирована в B (ток J); 2) линия заземлена в B и изолирована в C (ток J'); 3) линия изолирована и в B и в C (ток J''). Определить расстояние точки повреждения линии от A. Предполагается, что сопротивлением земли, а также сопротивлением заземления *на станциях* можно пренебречь.

§ 39. Превращения энергии в цепи тока. Контактные ЭДС

1. Умножая (38.2) на силу тока в цепи J и перегруппировав члены, получаем

$$J\int_1^2 E_s\,ds = J^2R_{12} - J\int_1^2 E_s^{\text{стр}}\,ds. \tag{39.1}$$

Левая часть этого уравнения, согласно (35.5), равна работе, совершаемой силами электрического поля в единицу времени в участке цепи *1*, *2*. Эта работа оказывается равной разности двух членов, причем первый из них

$$Q = J^2R_{12} \tag{39.2}$$

квадратичен относительно силы тока J, поэтому не зависит от направления тока и всегда положителен; второй же член

$$P = J\int_1^2 E_s^{\text{стр}}\,ds \tag{39.3}$$

линеен относительно J и меняет знак при изменении направления тока. Первый член Q совпадает с выражением (35.7) для джоулева тепла, полученным нами в § 35 в предположении об отсутствии в проводнике сторонних ЭДС.

И при наличии сторонних ЭДС квадратичная относительно J величина Q выражает выделяемое током тепло, а именно, так называемое джоулево тепло; линейный же относительно J член P представляет собой, очевидно, работу, совершаемую в единицу времени сторонними ЭДС. Таким образом, формула (39.1) означает, что джоулево тепло Q, выделяемое током в участке цепи *1*, *2*, равно сумме совершаемых в этом участке цепи работы сил электрического поля $J\int_1^2 E_s\,ds$ и работы сторонних ЭДС.

Однако общее количество теплоты, выделяемое током в данном участке цепи, отнюдь не всегда совпадает с соответственным джоулевым теплом Q. Так, например, в месте контакта двух различных проводников, помимо джоулева тепла, зависящего только от силы тока и сопротивления проводников, выделяется также так называемое *тепло Пельтье*, зависящее от сторонних ЭДС, определяемых в свою очередь химической природой проводников, их температурой и т. д. Подобно этому, при наличии в проводнике градиента температуры в нем выделяется, помимо джоулева тепла, и так называемая *теплота Томсона*. Однако в отличие от джоулева тепла теплоты Пельтье и Томсона являются *линейными* функциями тока J и изменяют знак при изме-

нении направления тока[1]). Поэтому теплоту Джоуля Q всегда можно выделить из общего количества выделяемой током теплоты: теплота Джоуля равна полусумме теплот, выделяемых током заданной силы J при двух взаимно противоположных направлениях тока.

Впрочем, в обычных условиях (при не очень малых силах токов) теплоты Пельтье и Томсона составляют лишь незначительную долю теплоты Джоуля, так что их можно вовсе не учитывать.

2. Итак, выражения (35.7) или (39.2) для теплоты Джоуля остаются справедливыми и при наличии сторонних ЭДС, формулы же (35.6) и (35.8) выражают работу, совершаемую при прохождении тока силами электрического поля, которая равна теплоте Джоуля лишь в отсутствие сторонних ЭДС. Так, например, из (38.2) и (35.2) следует, что при наличии сторонних ЭДС выражение (35.8) для теплоты Джоуля должно быть заменено следующим:

$$Q = J(\varphi_1 - \varphi_2) + J\mathscr{E}_{12}^{\text{стр}}. \tag{39.4}$$

Выражение (36.6) для *удельного* количества теплоты Джоуля (т. е. теплоты Джоуля, выделяющейся в единицу времени в единицу объема проводника)

$$q = \frac{1}{\lambda} j^2 \tag{39.5}$$

было получено нами из уравнения (35.7), совпадающего с (39.2); поэтому (39.5) остается справедливым и при наличии сторонних сил. Вместо (36.7) мы из (39.5) и (38.1) получаем

$$q = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}})^2 = \mathbf{j}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}), \tag{39.6}$$

что выражает собой тот факт, что джоулево тепло, выделяемое током в каждом элементе объема проводника, равно *сумме* работ сил электрического поля и сил, сторонних в этом элементе объема.

Как указывалось в начале § 38, общая работа кулоновых сил стационарного поля постоянных токов должна равняться нулю, ибо, в противном случае, энергия этого поля уменьшалась бы и оно не могло бы быть стационарным. Стало быть, *общее* количество джоулева тепла, выделяющегося во всей цепи тока, должно равняться работе сторонних ЭДС. И, действительно, применяя (39.1) ко всей длине неразветвленного замкнутого проводника и приняв во внимание, что в поле постоянных токов $\mathbf{E}$ обладает

[1]) Отрицательный знак, например, теплоты Пельтье означает, что соответствующее количество теплоты п о г л о щ а е т с я, а не выделяется при прохождении тока через контакт двух проводников

потенциалом, получим на основании (38.7):

$$Q = J\mathscr{E}^{\text{стр}}, \tag{39.7}$$

что *является математической* формулировкой высказанного только что положения.

3. Чтобы получить представление о превращениях энергии в цепи тока, предположим, что все сторонние ЭДС сосредоточены в одном из участков a этой цепи [1]. Стало быть, работа этих ЭДС будет совершаться лишь в этом участке a, тогда как выделение тепла будет происходить во всех участках цепи. Так как общее количество выделяемой теплоты [2] равно работе ЭДС, сосредоточенных по условию в участке a, то с энергетической точки зрения роль электрического тока сводится к переносу отдаваемой сторонними силами энергии в отдаленные участки цепи.

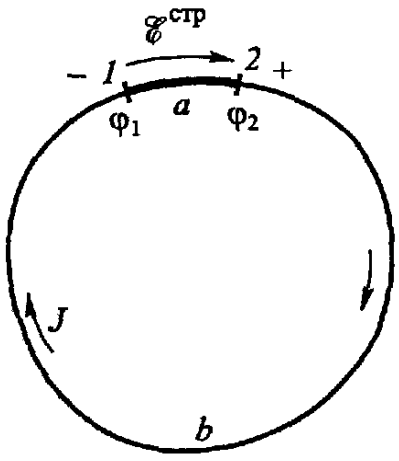

Рис. 40

Пусть, например, мы имеем дело с неразветвленным замкнутым квазилинейным проводником, *границами* участков a и b которого являются точки *1* и *2* (рис. 40), и пусть сосредоточенная в участке a ЭДС $\mathscr{E}^{\text{стр}}$ направлена от *1* к *2*:

$$\mathscr{E}^{\text{стр}} = \oint E_s^{\text{стр}}\, ds = \int_1^2 E_s^{\text{стр}}\, ds = \mathscr{E}_a^{\text{стр}} > 0,$$

так что, согласно (38.5),

$$JR_a = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_a^{\text{стр}} = \mathscr{E}_a^{\text{стр}} - (\varphi_2 - \varphi_1),$$

где R_a есть сопротивление участка a. Так как, с другой стороны, согласно (38.7),

$$JR = J(R_a + R_b) = \mathscr{E}^{\text{стр}} = \mathscr{E}_a^{\text{стр}},$$

то

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathscr{E}_a^{\text{стр}} - JR_a = JR_b = \frac{\mathscr{E}_a^{\text{стр}} R_b}{R_a + R_b} > 0\ ^{3}).$$

Во «внешнем» участке b действуют лишь кулоновы силы электрического поля, так что положительные заряды будут стекать

---

[1]) Можно представить себе, например, что в этот участок цепи включен аккумулятор или динамо постоянного тока.

[2]) Для простоты мы в дальнейшем будем говорить лишь о теплоте Джоуля, пренебрегая теплотами Пельтье и Томсона.

[3]) Таким образом, разность потенциалов на концах участка цепи, к которому приложена сторонняя ЭДС, вообще говоря, *меньше* этой силы и может считаться *равной ей лишь в том случае*, если сопротивление R_a этого участка исчезающе мало по сравнению с «внешним» сопротивлением R_b. Точное же равенство величин $\varphi_2 - \varphi_1$ и $\mathscr{E}_a^{\text{стр}}$ осуществляется в том случае, если цепь разомкнута ($R_b = \infty$).

по b от большего потенциала φ_2 к меньшему потенциалу φ_1. Это должно было бы повести к выравниванию потенциалов и прекращению тока, если бы на участке a не действовали сторонние ЭДС, которые гонят положительные заряды по участку a от *1* к *2*, т. е. от меньшего потенциала к большему, против действующих в этом участке кулоновых сил электростатического поля. Так как, согласно последнему уравнению, $\mathscr{E}_a^{\text{стр}} > \varphi_2 - \varphi_1$, то заряды эти действительно будут двигаться по a «против» разности потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ и по направлению ЭДС.

Итак, ЭДС непрерывно «нагнетает» заряды по a от *1* к *2*, откуда они опять стекают по b к *1* и т. д. Работа кулоновых сил электрического поля в участке a будет отрицательной, в участке b положительной, в сумме же равна нулю (как при всяком движении зарядов в потенциальном поле по замкнутому пути). Работа же сторонних ЭДС (положительная) будет совершаться лишь на участке a. При этом в участке a будет выделяться количество теплоты, эквивалентное алгебраической сумме положительной работы ЭДС и отрицательной работы сил поля; избыток же работы ЭДС над количеством этой теплоты будет выделяться током в участке b.

4. Рассмотрим, наконец, случай, когда в цепи тока имеется не один, а два участка a и a', в которых приложены сторонние ЭДС $\mathscr{E}_a^{\text{стр}}$ и $\mathscr{E}_{a'}^{\text{стр}}$, направленные противоположно друг другу. Если $\mathscr{E}_a^{\text{стр}} > \mathscr{E}_{a'}^{\text{стр}}$, то ток будет направлен так, как указано на рис. 41. В участке a направление тока будет совпадать с направлением ЭДС $\mathscr{E}_a^{\text{стр}}$, которая будет, следовательно, совершать *положительную работу* $J\mathscr{E}_a^{\text{стр}}$, тогда как ЭДС $\mathscr{E}_{a'}^{\text{стр}}$ будет совершать *отрицательную* работу $-J\mathscr{E}_{a'}^{\text{стр}}$; наконец, в цепи тока будет выделяться

$$Q = J^2R = J(\mathscr{E}_a^{\text{стр}} - \mathscr{E}_{a'}^{\text{стр}})$$

единиц теплоты в единицу времени. Таким образом, работа ЭДС в участке a будет идти, во-первых, на выделение теплоты и, во-вторых, на преодоление сопротивления, оказываемого току ЭДС $\mathscr{E}_{a'}^{\text{стр}}$, в участке a'; в нем, таким образом, ток будет совершать положительную работу $J\mathscr{E}_{a'}^{\text{стр}}$. Другими словами, в цепи будет происходить перенос энергии от a к a' с потерями Q на тепло. Так будет обстоять дело, например, в том случае, если в a будет включен динамо- или гальванический элемент, а в a' — электромотор (вращение которого сопровождается появлением ЭДС индукции, направленных против тока, — см. гл. VI) или заряжаемый током аккумулятор.

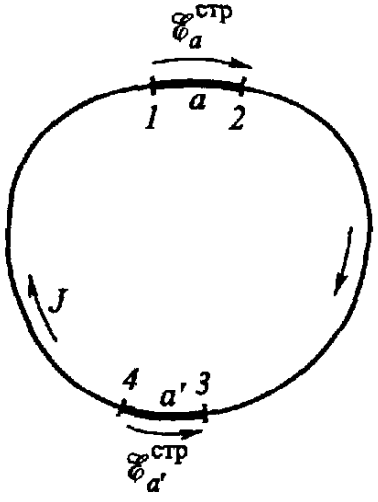

Рис. 41

5. Закончим несколькими замечаниями общего характера о так называемых *контактных* ЭДС. Эти «сторонние» ЭДС возникают в пограничном слое между соприкасающимися проводниками различного химического состава; величина их зависит от химической природы соприкасающихся проводников (а также и других физических условий, например температуры), но не от формы и размера проводников. Толщина слоя, в котором действуют эти контактные ЭДС, столь мала, что с достаточной степенью точности можно считать их сосредоточенными *на поверхности* соприкосновения проводников. Полагая, что сопротивление R_{12}, испытываемое током при прохождении через бесконечно тонкую поверхность соприкосновения проводников *1* и *2*, равно нулю, получим из (38.5) для двух смежных точек, лежащих по разным сторонам поверхности соприкосновения:

$$\mathscr{E}_{12}^{\text{стр}} = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Стало быть, контактная ЭДС поддерживает между проводниками *1* и *2* равную ей контактную разность (или скачок) потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ [1].

Если из нескольких последовательно соединенных проводников (*1*, *2*, *3* и т. д.) различной химической природы составить замкнутую цепь, то на каждой поверхности их соприкосновения (*1*, *2*), (*2*, *3*) и т. д. будут действовать контактные ЭДС $\mathscr{E}_{12}^{\text{стр}}$, $\mathscr{E}_{23}^{\text{стр}}$ и т. д. Сила тока в цепи, согласно второму закону Кирхгофа (38.8), будет определяться суммой этих ЭДС.

Как известно, все проводники могут быть подразделены на два класса. Проводники первого класса, к которым относятся все металлы, обладают тем свойством, что в любой цепи, составленной только из этих проводников, алгебраическая сумма контактных ЭДС всегда равна нулю, если только все участки цепи находятся при одинаковой температуре [2].

Стало быть, ток в подобной замкнутой цепи при отсутствии ЭДС иного происхождения (например, термоэлектрических) возникнуть не может. Из этого следует, в частности, что контактные ЭДС между любыми тремя проводниками первого класса связаны соотношением

$$\mathscr{E}_{13}^{\text{стр}} = \mathscr{E}_{12}^{\text{стр}} + \mathscr{E}_{23}^{\text{стр}},$$

[1] Как указал Гельмгольц, этот скачок потенциала обусловливается существованием на границе раздела проводников двойного электрического слоя (см. § 14). Однако само существование двойного слоя предполагает наличие сторонних сил, при отсутствии которых двойной слой существовать не может: противоположные заряды его должны соединиться и взаимно нейтрализоваться.

[2] В противном случае возникают термоэлектрические ЭДС, сумма которых, вообще говоря, отлична от нуля.

ибо, образовав из этих проводников замкнутую цепь, мы должны получить $\mathscr{E}_{12}^{\text{стр}} + \mathscr{E}_{23}^{\text{стр}} + \mathscr{E}_{31}^{\text{стр}} = 0$, а $\mathscr{E}_{13}^{\text{стр}}$, очевидно, равно $-\mathscr{E}_{31}^{\text{стр}}$.

Эти соотношения дают право при изучении токов в цепи металлических проводников не принимать во внимание контактные ЭДС между ними.

Если же, однако, в цепь входят проводники второго класса, к которым в первую очередь относятся электролиты, то сумма контактных ЭДС, вообще говоря, будет отлична от нуля, и в цепи возникнет ток. На этом свойстве проводника второго рода основано устройство *гальванических элементов* и аккумуляторов, которые представляют собою совокупность последовательно соединенных проводников первого и второго рода.

С энергетической точки зрения это различие проводников первого и второго рода сводится к тому, что при прохождении тока через цепь проводников первого рода общая работа контактных ЭДС равна нулю, тогда как при наличии в цепи проводников второго рода работа эта, вообще говоря, отлична от нуля. Эта работа контактных ЭДС совершается за счет *химической* энергии проводников второго рода, прохождение тока по которым *всегда* сопровождается химическими реакциями в них.

Так, например, обыкновенный свинцовый аккумулятор состоит из двух погруженных в раствор серной кислоты свинцовых пластин, одна из которых покрыта слоем перекиси свинца PbO_2. При замыкании цепи, в которую включен аккумулятор, контактные ЭДС вызывают электрический ток, при прохождении которого вещество пластин Pb и PbO_2 вступает в химическую реакцию с H_2SO_4, в результате чего на обеих пластинах появится $PbSO_4$. Эта реакция связана с выделением химической энергии, которая в обычных условиях опыта полностью выделяется в форме тепла, тогда как в аккумуляторе часть ее затрачивается на поддержание тока в цепи. Правда, в конечном счете и эта часть химической энергии переходит в джоулево тепло, которое, однако, выделяется не только в самом аккумуляторе, но и в других участках цепи тока. Обратно, при зарядке аккумулятора через него пропускается ток внешнего источника в направлении, *обратном* ЭДС аккумулятора. Таким образом, ток этот совершает в аккумуляторе положительную работу, которая, помимо нагревания, затрачивается частью на обратную химическую реакцию:

$$2PbSO_4 + 2H_2O \rightarrow PbO_2 + Pb + 2H_2SO_4,$$

сопровождающуюся *поглощением* энергии и приводящую аккумулятор в «заряженное» состояние.

Как уже упоминалось в начале этой главы, тот факт, что прохождение тока через электролиты сопровождается химическими реакциями, обусловливается тем, что перенос тока в них осуществляется движением ионов, т. е. заряженных атомов или групп атомов, тогда как носителями тока в металлах служат не ионы, а «свободные» электроны.

§ 40. Основные представления электронной теории металлов. Опыты Толмена

1. Как уже упоминалось в § 5, простейшее представление о переносе тока по металлу сводится к следующему.

Если металл находится в твердом (или жидком) состоянии, то его атомы пребывают в ионизованном состоянии, т. е. расщепляются на один или несколько электронов и на положительный ион. Эти ионы, располагаясь в узлах кристаллической решетки и совершая лишь небольшие колебания около своих положений равновесия, образуют твердый скелет металлического тела. Отщепленные же от ионов так называемые «свободные » электроны беспорядочно движутся в промежутках между ионами, образуя собой особого рода электронный «газ».

В отсутствие внешнего электрического поля электроны эти находятся в совершенно беспорядочном тепловом движении; возникновение же поля ведет к увлечению электронов в направлении действующих на них сил поля, т. е. к появлению электрического тока. Сталкиваясь в своем движении с ионами металла, электроны передают им избыток кинетической энергии, приобретенной ими под действием сил поля, что ведет к увеличению энергии теплового движения (колебания) ионов, т. е. к нагреванию металла (выделение джоулева тепла).

2. С точки зрения этого представления о механизме тока в металлах, ряд наблюдаемых в них явлений получает чрезвычайно простое истолкование и объяснение. К числу их относятся, например, упоминавшиеся в § 11 термоионные явления, состоящие в испускании раскаленными металлами в окружающее их пространство потока свободных (в подлинном смысле слова) электронов. При обычной температуре находящиеся в металле «свободные» электроны не могут выйти за поверхность металла ввиду того, что в поверхностном слое металла они подвергаются действию задерживающих сил, направленных внутрь металла [1]). Но при нагревании металла скорость теплового движения его электронов возрастает, так что при достаточно высокой температуре заметная часть этих электронов приобретает столь большой запас кинетической энергии, что им удается преодолеть тормозящие силы поверхностного слоя и выйти из металла наружу. Характер количественной зависимости интенсивности термоионного потока электронов от температуры металла хорошо согласуется с этим представлением о механизме термоионных явлений.

Все металлы являются, как известно, не только хорошими проводниками электричества, но и хорошими проводниками теп-

[1]) Необходимость введения в рассмотрение поверхностных сил подобного рода, вопроса о физической природе которых мы здесь касаться не будем, была выяснена нами в § 19.

ла. С точки зрения электронной теории, это совпадение объясняется не простой случайностью, а является следствием одной общей причины — присутствия в металлах свободных электронов. В металлах, в отличие от непроводников, передача тепла осуществляется не только столкновениями атомов, но также, и притом по преимуществу, свободными электронами. Приобретая в нагретом участке добавочную энергию движения, легкоподвижные электроны сравнительно быстро переносят ее в своем движении в смежные участки тела и тем самым значительно ускоряют процесс теплопроводности.

Однако наиболее прямое доказательство того факта, что носителями тока в металлах действительно являются электроны, принесли с собой опыты *Толмена* (см. ниже), измерившего силу электрических токов, возникающих в металле при сообщении ему ускорения и обусловленных отставанием «свободных» электронов от движения кристаллической решетки металла.

3. Пусть в единице объема металла находится n свободных электронов массы m и заряда e. Ввиду беспорядочности движения электронов в отсутствие внешнего электрического поля все направления скорости электронов равновероятны, электронный газ в целом покоится по отношению к положительным ионам решетки и средняя плотность тока равна нулю. Пусть, однако, по какой-либо причине возникло добавочное упорядоченное движение электронов относительно решетки со средней скоростью $\mathbf{u}$. При подсчете средней плотности тока $\mathbf{j}$ достаточно, очевидно, учесть лишь это упорядоченное движение и можно вовсе пренебречь движением беспорядочным.

Через единицу перпендикулярного вектору $\mathbf{u}$ сечения проводника за единицу времени пройдут все электроны, находившиеся от него на расстоянии, меньшем или равном $\mathbf{u}$, т. е. все электроны, расположенные в цилиндре сечения *1* и высоты u. Число их равно nu, несомый же ими заряд равен enu; стало быть [ср. (11.7)],

$$j = enu. \tag{40.1}$$

4. Чтобы уяснить сущность опытов Толмена [1], представим себе, что изготовленное из металлической проволоки кольцо приводится внешней силой в неравномерное вращательное движение вокруг своей оси, причем линейная скорость точек кольца равна w [2]. Если бы электроны в металле были накрепко связаны с атомами, то они двигались бы с той же скоростью w и в результате ток не возник бы (ибо движение электронов и положительных

[1]) Более подробно о трактовке экспериментов Стюарта–Толмена см.: *Цидильковский И.М.* // Соросовский образовательный ж. 2000. Т. 6. С. 87.

[2]) Если проволока достаточно тонка, то зависимостью скорости $\mathbf{w}$ от расстояния данной точки кольца до его оси можно пренебречь.

ионов с одинаковой скоростью создавало бы токи равные и противоположно направленные). Наоборот, если бы между электронами и решеткой не было никакого взаимодействия, то движение решетки не передавалось бы электронам, средняя скорость электронов при движении кольца оставалась бы равной нулю, а их средняя скорость u относительно решетки была бы равна $-w$. Плотность тока в этом случае была бы равна

$$j = -enw = enu,$$

т. е. по-прежнему определялась бы формулой (40.1), хотя обусловливалась бы движением не электронов, а положительных ионов заряда $-e$ ($e < 0$) со скоростью w.

В действительности будет иметь место промежуточный случай, электроны будут частично увлекаться неравномерным движением решетки, и в проводнике возникнет переменный ток. Уравнение движения электронов в металле будет:

$$m\frac{d}{dt}(\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{F}, \tag{40.2}$$

где $\mathbf{w} + \mathbf{u}$ есть полная скорость электрона, а $\mathbf{F}$ — действующая на него сила. Сила эта будет слагаться из «силы трения» между электронами и решеткой металла, характеризуемой сопротивлением металла R, и из ЭДС индукции, сопротивляющейся всякому изменению силы тока в проводнике и характеризуемой коэффициентом самоиндукции проводника L («инертность тока» [1]) — см. гл. VI). Существенно, что обе эти силы зависят *только от относительной* ($\mathbf{u}$), а не полной ($\mathbf{u} + \mathbf{w}$) скорости электронов, т. е. ввиду (40.1) только от плотности тока в проводнике.

Итак, сила $\mathbf{F}$ есть функция $\mathbf{u}$, и, стало быть, уравнение (40.2) можно записать так:

$$m\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) - m\frac{d\mathbf{w}}{dt}.$$

Отличие этого уравнения от уравнения движения электронов в покоящемся проводнике сводится к добавлению к силе $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ «силы инерции» $-m\frac{d\mathbf{w}}{dt}$, как это следует из общих положений механики относительного движения. Поэтому вместо того, чтобы разыскивать вид функции $\mathbf{F}(\mathbf{u})$, мы можем непосредственно воспользоваться общим уравнением переменных токов, с которым мы подробнее познакомимся в гл. VI:

$$\frac{1}{c^2}L\frac{dJ}{dt} + RJ = \oint E_s^{\text{стр}}\,ds,$$

[1]) Инертность токов обусловливается не только инерцией (массой) носителей тока — электронов, учитываемой первым членом формулы (40.2), но в значительно большей мере магнитным взаимодействием этих носителей тока между собой.

приравняв в этом уравнении действующую на электрон сторонюю силу $e\mathbf{E}^{\text{стр}}$ силе инерции $-m\frac{d\mathbf{w}}{dt}$.

Тангенциальная слагающая ускорения $\frac{dw}{dt}$ точек вращающегося кольца равна производной от числовой величины линейной скорости w; стало быть,

$$eE_s^{\text{стр}} = -m\frac{dw}{dt}$$

и

$$\frac{1}{c^2}L\frac{dJ}{dt} + RJ = -\frac{m}{e}\oint\frac{dw}{dt}\,ds = -\frac{ms}{e}\frac{dw}{dt},$$

где s — длина окружности кольца. Проинтегрировав это уравнение по времени от $t = t_1$ до $t = t_2$ и полагая, что в начальный и конечный моменты t_1 и t_2 рассматриваемого промежутка времени ток J обращается в нуль, получаем

$$R\int_{t_1}^{t_2} J\,dt = -\frac{ms}{e}\{w(t_2) - w(t_1)\}. \qquad (40.3)$$

5. Этим соотношением и воспользовался Толмен для определения отношения заряда к массе $\frac{e}{m}$ носителей тока в металле. Круглая проволочная катушка приводилась во вращение около вертикальной оси и затем внезапно (в момент t_1) тормозилась и приводилась к состоянию покоя $[w(t_2) = 0]$ в течение доли секунды. Протекавший в течение этого промежутка $t_2 - t_1$ по катушке ток J измерялся неподвижным гальванометром, соединенным с концами катушки двумя проволоками. Измерив $R\int_{t_1}^{t_2} J\,dt$, s и $w(t_1)$ и учтя все побочные эффекты, можно из (40.3) определить отношение $\frac{m}{e}$ для носителей тока в металле.

Знак этого отношения доказывал, что носителем тока являются отрицательные заряды, а числовое значение отношения $\frac{m}{e}$ в опытах Толмена (1926 г.) оказалось равным

$$\frac{m}{e} = 4{,}58\cdot 10^{-9}\ \frac{\text{г}}{\text{Кл}} = 1{,}53\cdot 10^{-18}\ \text{абс. ед. СГС},$$

что по порядку величины согласуется со значением, полученным при измерениях над свободными электронами в катодных лучах:

$$\frac{m}{e} = 5{,}66\cdot 10^{-9}\ \frac{\text{г}}{\text{Кл}} = 1{,}90\cdot 10^{-18}\ \text{абс. ед. СГС}.$$

§ 41. Электронная теория электропроводности. Трудности классической теории. Теория Зоммерфельда

1. Чтобы определить зависимость электропроводности металла от других физических величин, характеризующих его свойства, воспользуемся формулой (40.1)

$$j = enu.$$

При этом мы в первом приближении будем рассматривать «электронный газ» в металле как газ идеальный, т. е. будем считать, что в промежутках между столкновениями с другими электронами и ионами электроны движутся по законам движения материальных точек, подверженных действию одной лишь силы внешнего (макроскопического) поля $\mathbf{E}$.

В отсутствие внешнего поля $\mathbf{E}$ средняя скорость электронов относительно решетки равна, очевидно, нулю. Под воздействием поля $\mathbf{E}$ электроны приобретают некоторую добавочную скорость $\mathbf{u}$, параллельную действующей на них силе $e\mathbf{E}$. Это накопление скорости $\mathbf{u}$, параллельной силе $e\mathbf{E}$, происходит лишь во время свободного полета электрона между двумя последовательными столкновениями его с ионами решетки [1]). При каждом таком столкновении направление и величина скорости электрона изменяются по закону случая. Стало быть, непосредственно после столкновения среднее значение $\mathbf{u}$ равно нулю, а непосредственно перед столкновением

$$\mathbf{u} = \frac{e\mathbf{E}}{m}\tau,$$

где $e\mathbf{E}/m$ равно ускорению, сообщаемому электрону силой $e\mathbf{E}$, а τ обозначает среднюю продолжительность свободного полета электронов. Таким образом, среднее значение u равно

$$\overline{u} = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\tau.$$

С другой стороны, если l есть средняя длина свободного пробега электрона, то

$$\tau = \frac{l}{v},$$

где v — средняя скорость беспорядочного движения электронов в отсутствие внешнего поля, ибо во всех практически интересных случаях $v \gg u$, и поэтому при подсчете среднего *числового* (а не векторного) значения скорости электрона добавочной скоростью u можно пренебречь.

Внося полученные нами выражения в (40.1), найдем

$$j = \frac{e^2 nl}{2mv}E.$$

[1]) Столкновения между свободными электронами не влияют на их среднюю скорость, так как при соударении двух тел одинаковой массы векторная сумма их скоростей не изменяется (закон сохранения количества движения).

Таким образом, плотность тока оказывается пропорциональной напряженности поля $\mathbf{E}$, как того требует закон Ома (36.5) [1]; далее, коэффициент этой пропорциональности, т. е. электропроводность металла λ, оказывается равной

$$\lambda = \frac{e^2 n l}{2mv}. \tag{41.1}$$

2. Предположим, что к электронам в металле приложима классическая статистическая механика. Согласно основным положениям этой механики, средняя энергия поступательного теплового движения молекул любого газа зависит лишь от абсолютной температуры T, но не от химической природы и молекулярной массы газа и равна

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT, \tag{41.2}$$

где k — постоянная Больцмана. Применяя это соотношение к электронному газу в металле, получим из (41.1)

$$\lambda = \frac{e^2 n l}{2\sqrt{3kmT}}. \tag{41.3}$$

К сожалению, эта формула не может быть проверена непосредственно сравнением с данными опыта, ибо мы не знаем ни абсолютного значения величин n и l, ни характера зависимости их от температуры. Однако косвенная проверка уравнения все же может быть проведена, если наряду с (41.3) рассмотреть также и другие соотношения, устанавливаемые теорией между неизвестными величинами n и l, с одной стороны, и рядом измеряемых на опыте величин (теплоемкость металла, термоэлектрическая ЭДС и т. д.) — с другой.

3. Рассмотрим за недостатком места лишь вопрос о теплоемкости. Если средняя кинетическая энергия свободных электронов определяется классической формулой (41.2), то полная кинетическая энергия единицы объема электронного газа в металле равна

$$n \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} nkT.$$

Стало быть, теплоемкость C_v (при постоянном объеме) единицы

[1] Заметим, что справедливость закона Ома (и непосредственно вытекающего из него закона Джоуля) тесно связана с предположением, что $u \ll v$, т. е. что кинетическая энергия, приобретаемая электронами под воздействием поля $\mathbf{E}$, почти нацело передается при соударениях ионам металла, так что средняя скорость электронов при наличии поля лишь незначительно превышает скорость их в отсутствие поля. В случае электронного тока в вакууме эти условия не выполняются, и закон Ома оказывается благодаря этому (а так же благодаря наличию «пространственного заряда») вовсе неприложимым (см. § 11).

объема электронного газа, т е. энергия, необходимая для повышения его температуры на один градус, равна

$$c_v = \frac{3}{2} nk = \frac{3}{2} \frac{nR}{N_0}, \tag{41.4}$$

где мы воспользовались известным соотношением между постоянной Больцмана k, постоянной Авогадро N_0 и газовой постоянной Клапейрона R.

$$kN_0 = R.$$

Непосредственно измеряется, конечно, *полная* теплоемкость металла, т. е сумма теплоемкостей ионной решетки и свободных электронов, а не каждое из этих слагаемых порознь.

Теплоемкость решетки можно, однако, оценить как теоретически, так и на основании данных, относящихся к твердым диэлектрикам, теплоемкость которых полностью сводится к теплоемкости кристаллической решетки [1]. За вычетом теплоемкости решетки из экспериментально измеренной полной теплоемкости металлов на долю теплоемкости электронов остается относительно весьма малая величина, которая может быть согласована с формулой (41 4) только при столь малых значениях плотности свободных электронов n, при которых для электропроводности по формуле (41.3) получаются слишком малые значения Точнее, если приписать теплоемкости электронного газа в металлах наибольшее из согласующихся с данными опыта значений, то из выражения для C_v можно определить *верхний* предел величины n. Вставив его в (41.3) и зная из опыта величину λ, мы получаем возможность определить *нижний* предел длины свободного пробега электрона l, который, например, для серебра при нормальной температуре оказывается равным $l \geqslant 5 \cdot 10^{-5}$ см, а при $T = 14\text{K}$ $l \geqslant 2 \cdot 10^{-3}$ см. Эти значения свободного пути, проходимого электроном между двумя последовательными столкновениями, никак не могут быть согласованы в рамках классической теории электронов с тем фактом, что порядок расстояния между смежными атомами металлов, как и других твердых тел, равен всего лишь 10^{-8} см

Это противоречие являлось одним из существеннейших возражений против классической электронной теории металлов. Если же ввести в рассмотрение также и экспериментально измеренные величины контактных и термоэлектрических ЭДС, гальваномагнитных явлений и т. д., которые, согласно теории, являются функциями тех же неизвестных n и l, то для разных групп опытных данных получается ряд совершенно различных значений для n и l.

[1]) Теплоемкость единицы объема решетки при обычных температурах приближенно равна $C_v = 3n_a R/N_a$, где n_a есть число атомов (или ионов) в единице объема

Таким образом, классическая теория свободных электронов, весьма просто истолковывающая основные свойства металлов и происходящие в них явления, не в состоянии дать сколько-нибудь связного и непротиворечивого *количественного* описания этих явлений. пытаясь определить основные постоянные теории n и l из различных явлений, мы получаем ряд абсолютно несогласуемых между собой значений этих величин. Хотя представление о свободных электронах в металле и является, несомненно, лишь первым приближением к действительности, однако противоречия эти не могут быть отнесены лишь за счет упрощений, положенных в основу теоретических расчетов.

4. Развитие квантовой теории выяснило, что основные трудности электронной теории металлов обусловливались не столько упрощенностью основного допущения о существовании в металлах свободных электронов, сколько применением к этим электронам классической статистической механики, или, как ее принято кратко называть, *классической статистики* [формула (41 2)!].

Согласно квантовой теории, электронный газ подчиняется не классической статистике, а так называемой статистике Ферми–Дирака. При высоких температурах и малых плотностях газа выводы обеих статистик — квантовой и классической — совпадают, при низких же температурах и больших плотностях наступает так называемое «*вырождение*» газа, т. е. отступление от классических закономерностей. Вырождение газа наступает тогда, когда «параметр вырождения»

$$A = \frac{nh^3}{2(2\pi mkT)^{3/2}} \tag{41.5}$$

становится сравнимым с единицей; в этой формуле h означает квантовую постоянную Планка ($h = 6{,}626176(36) \cdot 10^{-34}$ Дж/Гц). Таким образом, классическая статистика применима к электронному газу лишь при условии $A \ll 1$. Между тем для электронного газа в металлах ввиду колоссальной его плотности и ввиду ничтожности массы электрона это условие вовсе не удовлетворяется Полагая, например, что в одновалентных металлах (Ag, Au, Cu, Na, K и т. д.) приходится по одному свободному электрону на каждый атом металла (т. е. что от каждого атома отщепляется в металле по одному электрону), мы получим для плотности электронов n в этих металлах числа порядка $6 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$ и, стало быть, для параметра A значение порядка $2{,}2 \cdot 10^3$ (полагая $m = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ г и $T = 300$ K)

Согласно статистике Ферми, при условии $A \gg 1$, выполняющемся для электронов в металлах при всех температурах вплоть до 10–20 тысяч градусов, т. е. при всех температурах, при которых вообще могут существовать твердые металлы, *средняя кинетическая энергия свободных электронов* не пропорциональна

абсолютной температуре T [как то следует из классической формулы (41.2)], а *практически от температуры не зависит* и однозначно *определяется плотностью электронного газа*. В частности, при температуре абсолютного нуля кинетическая энергия электрона остается весьма значительной, — абсолютный нуль соответствует не отсутствию движения или отсутствию кинетической энергии электронов, а лишь *минимуму* запаса этой энергии (так называемая Nullpunkts-energie), который уже не может быть отнят от металла никаким способом. Физически это станет совершенно понятным, если мы вспомним, что при охлаждении, например, изолированного атома или молекулы до абсолютного нуля входящие в состав атома электроны все же продолжают совершать свое движение вокруг ядра атома. Кристалл же представляет собой, в сущности, своего рода гигантскую молекулу.

5. Согласно статистике Ферми, средняя кинетическая энергия электронов в металле (т. е. средняя энергия их при условии $A \gg 1$) оказывается в первом, довольно точном, приближении равной

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3h^2}{40m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3} \tag{41.6}$$

[вместо (41.2)]. Внося отсюда значение v в (41.1), получаем вместо (41.3) [1]:

$$\lambda = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{e^2 n^{2/3}}{h} l. \tag{41.7}$$

Таким образом, изменение электропроводности λ с температурой определяется, в сущности, только температурной зависимостью длины свободного пробега электрона l (ибо плотность электронов n от T почти совсем не зависит). Эта зависимость l от T может быть вычислена на основе квантовой механики (причем определяющее значение на результат вычислений оказывает волновая природа электронов) и приводит к правильному температурному ходу кривой электропроводности: λ обратно пропорционально T при обыкновенных и высоких температурах и обратно пропорционально T^5 при очень низких температурах, причем в чистых (лишенных примесей) металлах λ стремится к бесконечности, когда T стремится к нулю. Заметим, что свободный пробег электронов, как оказывается, даже при обычных температурах в сотни раз превышает расстояние между атомами металла.

Незначительность изменения средней энергии электронов с температурой означает малую теплоемкость электронного газа, для которой, по статистике Ферми, получаются при обычных температурах значения, раз в 50–70 меньшие, чем по классиче-

[1]) Более точные вычисления приводят к выражению, отличающемуся от (41.7) заменой множителя $\sqrt{5/3} = 1{,}29$ множителем 2.

ской формуле (41.4) [1]. В этом лежит разрешение упомянутого выше противоречия между значениями λ и C_v, и этим объясняется тот факт, что против ожиданий классической теории наличие в металлах большого числа свободных электронов практически почти не сказывается на их теплоемкости. Все же некоторый, весьма незначительный, процент всех электронов приобретает при нагревании весьма значительную скорость, чем и объясняются (как и в классической теории) явления термоионного испускания в количественном согласии с опытом.

Подобным же образом разрешаются и другие трудности классической теории, так что в общем можно сказать, что основанная на статистике Ферми теория свободных электронов удовлетворительно объясняет основные свойства металлов.

6. Однако представление о свободном движении электронов в металлах является, конечно, лишь первым приближением к действительности. Это проявляется, во-первых, в тех трудностях, с которыми сталкивается теория свободных электронов даже при *качественном* объяснении целого ряда явлений, например термоэлектрических явлений, эффекта Холла и т. д. Во-вторых, во всех *количественных* выводах теории фигурирует свободный пробег электронов l, а значение этого пробега может быть определено только при учете взаимодействия электронов с ионной решеткой металла.

Еще более существенна *принципиальная* неудовлетворительность теории, исходящей из представлений о свободном или почти свободном движении электронов в металлах. Ведь каждый электрон, несомненно, испытывает в металле колоссальные силы со стороны окружающих его электронов и ионов. Поэтому последовательная теория должна прежде всего объяснить, как и почему, *несмотря на эти силы*, движение электронов в первом приближении происходит так, как если бы они были свободными, причем свободный пробег электронов достигает расстояний в сотни раз больших, чем расстояния между атомами металла.

Эта задача, перед которой классическая теория была совершенно бессильна, в значительной мере (хотя еще и не полностью) разрешена современной квантовой теорией металлов. Изложение этой теории выходит за рамки нашего курса.

7. Существует, однако, одно явление, механизм которого смогла полностью объяснить лишь квантовая теория. Это явление *сверхпроводимости*.

Сопротивление всех чистых (лишенных примесей) металлов при приближении к абсолютному нулю температуры стремится к нулю (примерно, как T^5), но в некоторых металлах изменение

[1] Формула (41.6) для средней энергии электронов является только первым приближением. Во втором приближении к правой части этой формулы прибавляется член, пропорциональный T^2, так что теплоемкость электронного газа оказывается отличной от нуля и пропорциональна T

это происходит не плавно: при некоторой вполне определенной температуре сопротивление внезапно (скачком) падает до нуля или, во всяком случае, до неизмеримо малой величины. Резкость этого скачка характеризуется тем, что в некоторых металлах он происходит при изменении T всего лишь на 0,001 °С.

Температура скачка называется критической температурой T_c, а состояние металла ниже этой температуры, характеризуемое отсутствием сопротивления постоянному току, называется сверхпроводящим состоянием.

Явления сверхпроводимости экспериментально установлены к настоящему времени примерно у 20 чистых металлов и у ряда сплавов. Из чистых металлов наивысшей критической температурой характеризуется Nb ($T_c \approx 9{,}2$ К), затем идут Pb (7,26 К), La, Hg, Sn и т. д.

Поскольку в сверхпроводящем состоянии металлов сопротивление их равно нулю, в них не должно иметь место выделение джоулева тепла, и токи, раз возникнув, должны сохраняться неопределенно долгое время в отсутствие всякой сторонней ЭДС. Действительно, еще Каммерлинг-Оннес возбуждал в сверхпроводниках индукционные токи, которые, раз возникнув, длились сутками, причем, как показали измерения, сила их, если, быть может, и убывала постепенно, то, во всяком случае, не больше, чем на 1/80 000 своего значения за час. Следует, однако, отметить, что в полях высокой частоты в сверхпроводниках происходит выделение джоулева тепла.

Сверхпроводящее состояние отличается от других состояний вещества еще одной особенностью: *магнитное поле в глубь сверхпроводников не проникает*, т. е. напряженность и индукция магнитного поля внутри сверхпроводников равны нулю[1]). Этот факт, в связи с выяснившейся обратимостью перехода металлов при критической температуре в сверхпроводящее состояние, лег в основу *термодинамической теории сверхпроводимости*, в которой переход металлов в сверхпроводящее состояние рассматривается как фазовый переход и которая позволила количественно связать между собой магнитные и тепловые характеристики сверхпроводников (см. также Дополнение 1).

---

[1]) Точнее говоря, магнитное поле весьма быстро экспоненциально спадает от поверхности в глубь сверхпроводников, в обычных экспериментальных условиях глубина проникновения поля в «хорошие» сверхпроводники измеряется 10^{-6}–10^{-5} см

Распространенное уподобление сверхпроводников идеальным диамагнетикам, т е. телам, магнитная проницаемость μ которых равна нулю, справедливо только в двух отношениях: во-первых, плотность $\mu H^2/8\pi$ энергии магнитного поля равна нулю как в сверхпроводниках (в которых $\mu \sim 1$, $H = 0$), так и в идеальных диамагнетиках (в которых $\mu = 0$, $H \neq 0$), во-вторых, внешнее магнитное поле одинаково искажается при внесении как сверхпроводника, так и идеального диамагнетика той же формы и объема

ГЛАВА IV

ПОНДЕРОМОТОРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ И ИХ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ (В ОТСУТСТВИЕ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ СРЕД)

§ 42. Магнитное поле токов

1. Известно, что между проводниками, по которым протекают электрические токи, возникают пондеромоторные (механические) силы взаимодействия, зависящие от силы этих токов и расположения проводников, эти силы взаимодействия могут быть непосредственно измерены обычными методами измерения механических сил. Для краткости мы будем называть силы взаимодействия обтекаемых током проводников просто силами взаимодействия токов. Техническое использование этих сил составляет одну из самых важных задач электротехники (электромоторы, разнообразные электроизмерительные приборы и т. д.).

В главах I и II мы убедились, что рассмотрение сил взаимодействия электрических зарядов чрезвычайно упрощается введением понятия электрического *поля* этих зарядов. Взаимодействие токов существенно сложнее взаимодействия покоящихся зарядов, и, соответственно этому, введение в рассмотрение понятия поля токов в еще большей мере облегчает стоящую перед нами задачу. Поэтому мы с самого начала воспользуемся понятием *поля токов* [1]), т. е. будем исходить из следующего представления.

Во всех точках пространства, окружающего произвольный ток, *всегда* существует обусловленное этим током *поле сил* вне зависимости от того, проявляется ли существование этих сил в воздействии их на какой-либо другой ток или же в отсутствие такового не проявляется ни в чем. По исторически сложившейся терминологии, это поле сил называется *магнитным полем* тока, ибо постоянные магниты создают такие же поля, как и электрические токи. Таким образом, задача определения взаимодействия токов разбивается на две более простые задачи: а) *определение магнитного поля* произвольного тока и б) *определение сил, действующих в заданном магнитном поле* на помещенный в него ток.

[1]) Конечно, законы взаимодействия постоянных токов можно формулировать и не прибегая к понятию поля (см § 43)

В пределах учения о постоянных токах понятие магнитного поля этих токов может рассматриваться как понятие чисто условное, введенное лишь для удобства описания явлений (то же относится к понятию электрического поля в пределах электростатики, ср. § 2). Однако, перейдя к изучению переменного электромагнитного поля, мы убедимся, что понятие поля имеет глубокий физический смысл и что электромагнитное поле есть объективная реальность.

2. Электрическое поле может быть измерено путем внесения в различные его точки произвольно малых пробных зарядов и определения испытываемых этими зарядами сил. Соответственно этому, для измерения магнитного поля следовало бы воспользоваться изолированными элементами постоянных токов, что, однако, невозможно, ибо постоянные токи по необходимости замкнуты (или уходят в бесконечность, см. § 37).

Чтобы обойти это затруднение, можно закрепить неподвижно все проводники, входящие в предназначенную для измерения поля цепь тока, оставив подвижным лишь небольшой участок цепи (*«элемент тока»*), и измерять силу, действующую на этот элемент [1]) (хотя бы по силе, которую необходимо приложить к нему, чтобы удержать его в равновесии). Конечно, перемещение такого элемента тока из одной точки пространства в другую связано с перемещением всей измерительной цепи; поэтому при этих измерениях необходимо заботиться о том, чтобы перемещения не искажали измеряемого поля токов. Наконец, для целей измерения пригодны, очевидно, лишь «элементы тока» столь малых размеров (сечения и длины), что на их протяжении измеряемое поле можно считать постоянным. В дальнейшем мы будем считать все эти условия выполненными.

3. Как показывает *опыт*, магнитное поле в каждой точке пространства может быть исчерпывающим образом охарактеризовано некоторым вектором $\mathbf{H}$, носящим название *напряженности магнитного поля*. Совокупность опытных фактов приводит к следующему выражению для силы $\mathbf{F}$, действующей в поле, характеризуемом вектором $\mathbf{H}$, на элемент тока длины $d\mathbf{s}$, по которому течет ток силы J:

$$\mathbf{F} = \frac{J}{c}[d\mathbf{s}\,\mathbf{H}]. \tag{42.1}$$

Здесь c означает некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий только от выбора единиц измерения. Этот коэффициент принято писать не в числителе, а в знаменателе.

Таким образом, сила $\mathbf{F}$, действующая на элемент $d\mathbf{s}$, существенно зависит от *ориентации* этого элемента $d\mathbf{s}$: величина ее

[1]) Роль такого подвижного элемента тока играет, например, струна струнного гальванометра, прогиб которой определяется силой магнитного поля, создаваемого током, протекающим по обмотке гальванометра.

пропорциональна синусу угла между направлением поля **H** и направлением элемента $d\mathbf{s}$; направление же силы перпендикулярно плоскости, проведенной через **H** и $d\mathbf{s}$, и сила направлена по ходу острия буравчика, ручка которого поворачивается от $d\mathbf{s}$ к **H** (рис 42).

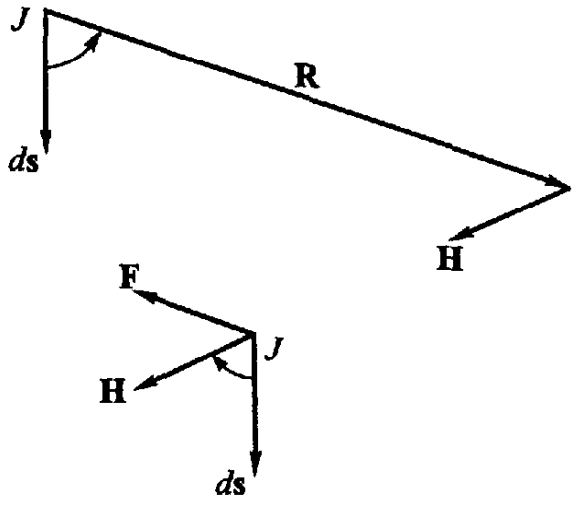

Рис 42

Формулу (42.1) можно рассматривать как *определение* понятия «напряженность магнитного поля». Основываясь на ней, можно следующим образом измерить напряженность магнитного поля в любой точке пространства Поместим в данную точку P элемент тока $d\mathbf{s}$ и будем вращать этот элемент $d\mathbf{s}$ до тех пор, пока он не займет положения, при котором действующая на него сила **F** обращается в нуль. Магнитное поле будет, очевидно, либо параллельно, либо антипараллельно направлению $d\mathbf{s}$ в этом положении. Повернув затем $d\mathbf{s}$ из этого положения на 90° и измерив действующую на него в этом новом положении силу **F**, легко определить вектор **H** по величине и направлению.

4. Нам остается еще выяснить вопрос о зависимости напряженности магнитного поля в произвольной точке пространства от характеристик тока, возбуждающего это поле (положение и форма контура тока, его сила и т. д.). Этот вопрос чрезвычайно упростился бы, если бы его можно было свести к вопросу о поле, возбуждаемом отдельным *элементом тока*, и рассматривать поле произвольной системы токов как наложение (суперпозицию) полей отдельных элементов этих токов. Опыт показывает, что напряженность поля, создаваемого двумя токами, действительно равна сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из этих токов в отдельности [1]). Тем не менее в рамках учения о *постоянных* токах вопрос о поле, возбуждаемом отдельным элементом тока, не может быть решен однозначно, ибо нельзя изолировать отдельный элемент постоянного тока, цепь которого не может не быть замкнутой. Поэтому мы всегда имеем дело с результирующим полем всех элементов замкнутого поля, а знания результирующей недостаточно для однозначного определения слагающих (см § 43).

Однако в дальнейшем мы перейдем к изучению переменных токов, могущих быть и незамкнутыми; наконец, электронная тео-

[1]) Этот *принцип суперпозиции* нарушается лишь при наличии в поле ферромагнетиков (см гл V).

рия, базируясь на обширном опытном материале, сводит силы взаимодействия токов к взаимодействию движущихся электронов, каждый из которых представляет элемент тока в точном смысле этого слова. Таким образом, математический прием разложения конечных токов на совокупность токов элементарных в известном отношении соответствует современным физическим представлениям о том, что все токи сводятся к движению отдельных электронов (или ионов).

Предвосхищая результаты исследования переменных токов, а также сил взаимодействия движущихся элементарных зарядов, мы в основу всех наших рассуждений положим определенный закон, определяющий магнитное поле элемента тока, рассматривая этот закон как данный *опытом*. Закон этот носит название *закона Био–Савара* и в векторной форме может быть записан так:

$$\mathbf{H} = \frac{J}{cR^3}\,[d\mathbf{s}\,\mathbf{R}]. \tag{42.2}$$

Здесь $\mathbf{R}$ есть расстояние от элемента тока $J\,d\mathbf{s}$, возбуждающего магнитное поле $\mathbf{H}$, до той «точки наблюдения», в которой определяется напряженность $\mathbf{H}$ этого поля. Далее, c есть некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий только от выбора единиц измерения. Во всех общепринятых системах единиц измерения единицы эти выбираются так, чтобы коэффициенты c в формулах (42.1) и (42.2) оказались одинаковыми.

Таким образом, при удалении от элемента $J\,d\mathbf{s}$ вдоль определенной полупрямой, проведенной из этого элемента, напряженность его поля убывает обратно пропорционально квадрату расстояния R от $d\mathbf{s}$; при перемещениях же по сфере определенного радиуса R с центром в $d\mathbf{s}$ поле изменяется как синус угла между $\mathbf{R}$ и $d\mathbf{s}$. Направление поля перпендикулярно к плоскости, проведенной через $\mathbf{R}$ и $d\mathbf{s}$ (см. рис. 42). Если представить себе сферическую систему координат с центром в $d\mathbf{s}$ и с осью, направленной вдоль $d\mathbf{s}$, то направление поля в каждой точке пространства P будет касательно к полярному кругу, проходящему через эту точку P. Иными словами, линии вектора $\mathbf{H}$, носящие название *магнитных силовых линий*, являются окружностями, нанизанными, как на ось, на прямую, проходящую через элемент $d\mathbf{s}$. Направление этих магнитных силовых линий образует с направлением тока в элементе $d\mathbf{s}$ правовинтовую систему.

5. Формулы (42.1) и (42.2) являются основными для всего учения о магнитном поле и о взаимодействии постоянных токов; почти все дальнейшее содержание этой главы сводится к рассмотрению выводов, вытекающих из этих формул.

В частности, сила, испытываемая замкнутым током J в магнитном поле $\mathbf{H}$, равна, очевидно, сумме сил, испытываемых

каждым из его элементов, т. е. равна

$$\mathbf{F} = \frac{J}{c}\oint [d\mathbf{s}\,\mathbf{H}]; \tag{42.3}$$

напряженность же поля $\mathbf{H}$ замкнутого тока J в произвольной точке P равна сумме полей, возбуждаемых каждым из его элементов, т. е. равна

$$\mathbf{H} = \frac{J}{c}\oint \frac{[d\mathbf{s}\,\mathbf{R}]}{R^3}, \tag{42.4}$$

где $\mathbf{R}$ есть радиус-вектор, проведенный из элемента $d\mathbf{s}$ до «точки наблюдения» P.

Задача 25. Показать, что напряженность магнитного поля бесконечного прямолинейного тока на расстоянии r от его оси равна

$$H = \frac{2J}{cr} \tag{42.5}$$

и что силовые линии этого поля представляют собою концентрические окружности, плоскость которых перпендикулярна току, причем направление силовых линий составляет с направлением тока правовинтовую систему.

Примечание. Цепь постоянного тока всегда замкнута. Рассматривать бесконечный прямолинейный ток — значит рассматривать замкнутую цепь тока, включающую в себя очень длинный прямой цилиндрический участок, и ограничиваться при этом изучением поля тока вблизи средней части этого участка, пренебрегая действием отдаленных участков цепи тока.

Задача 26. Линейный ток протекает по окружности радиуса R_0. Показать, что напряженность поля в любой точке оси этой окружности направлена по этой оси, составляет с направлением тока правовинтовую систему и равна

$$H = \frac{2\pi J}{c}\,\frac{R_0^2}{(R_0^2 + d^2)^{3/2}},$$

где d есть расстояние рассматриваемой точки оси от центра кругового тока.

§ 43. Взаимодействие элементов тока. Электродинамическая постоянная

1. Рассмотрим два элемента тока $J_1\,d\mathbf{s}_1$ и $J_2\,d\mathbf{s}_2$, находящихся на расстоянии $\mathbf{R}_{12}$ друг от друга ($\mathbf{R}_{12}$ считаем направленным от $d\mathbf{s}_1$ к $d\mathbf{s}_2$). Поле, создаваемое первым элементом в месте нахождения второго, согласно (42.2), равно

$$\mathbf{H}_{12} = \frac{J_1}{c}\,\frac{[d\mathbf{s}_1\,\mathbf{R}_{12}]}{R_{12}^3}$$

и, стало быть, сила $\mathbf{F}_{12}$, испытываемая вторым элементом со стороны первого, согласно (42.1), равна (см. рис. 43):

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{J_1 J_2}{c^2 R_{12}^3} [d\mathbf{s}_2 [d\mathbf{s}_1 \mathbf{R}_{12}]]. \tag{43.1}$$

Аналогичным образом выражается и сила $\mathbf{F}_{21}$, испытываемая первым элементом со стороны второго:

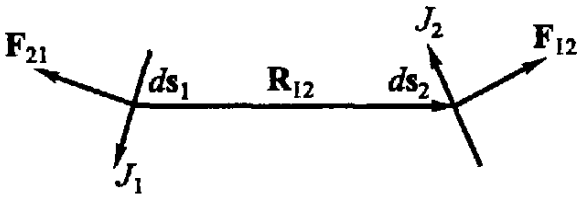

Рис 43

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{J_2 J_1}{c^2 R_{21}^3} [d\mathbf{s}_1 [d\mathbf{s}_2 \mathbf{R}_{21}]], \tag{43.2}$$

причем $\mathbf{R}_{21} = -\mathbf{R}_{12}$. Можно в основу всех рассуждений положить не формулы (42 1) и (42.2), а этот закон взаимодействия элементов тока, и потом уже, вводя понятие магнитного поля токов, получить формулы предшествующего параграфа из (43.1) и (43.2).

2. Мы оставили открытым вопрос о размерности коэффициента пропорциональности c в формулах (42.1) и (42.2), носящего название *электродинамической постоянной*. Если принять определенные единицы измерения для длины, механической силы F и силы тока J, то тем самым однозначно фиксируется и размерность электродинамической постоянной c, ибо из (43.1) вытекает, что

$$[c^2] = \frac{[J^2]}{[F]}. \tag{43.3}$$

Мы будем преимущественно пользоваться так называемой *гауссовой абсолютной системой единиц*. В этой системе единиц механические величины (длина, сила F и т. д.) измеряют в единицах СГС, а силу тока измеряют в абсолютных *электростатических* единицах, в которых, согласно § 35, $[J] = \mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{T}^{-2}$. Стало быть, (43.3) принимает вид

$$[c^2] = \frac{\mathrm{ML}^3\mathrm{T}^{-4}}{\mathrm{MLT}^{-2}} = \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right)^2, \tag{43.4}$$

т. е. c обладает *размерностью скорости*.

Как показали экспериментальные исследования (см. § 59), числовое значение электродинамической постоянной c в этих единицах равно $3 \cdot 10^{10}$ см/с. В гл. VII будет показано, что совпадение этой величины со скоростью света в вакууме отнюдь не случайно.

3. Чтобы уяснить содержание уравнений (43.1) и (43.2), рассмотрим ряд частных случаев. Если $d\mathbf{s}_1$ *параллельно* $d\mathbf{s}_2$, то силы взаимодействия стремятся сблизить $d\mathbf{s}_1$ и $d\mathbf{s}_2$ (*притяжение*), если же $d\mathbf{s}_1$ и $d\mathbf{s}_2$ *антипараллельны*, то эти силы стремятся

удалить их друг от друга (*отталкивание*) (рис. 44) При этом $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Однако силы эти даже в этом случае не удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия, ибо направления их лежат, вообще говоря, не на одной прямой. Особенно же резко проявляется *нарушение принципа равенства действия и противодействия* в том случае, если, например, $d\mathbf{s}_1$ параллельно $\mathbf{R}_{12}$, а $d\mathbf{s}_2$ перпендикулярно $\mathbf{R}_{12}$ (рис. 45). В этом случае $[d\mathbf{s}_1\mathbf{R}_{12}] = 0$, и поэтому $\mathbf{F}_{12} = 0$, тогда как $[d\mathbf{s}_2\mathbf{R}_{21}] \neq 0$ и $\mathbf{F}_{21} \neq 0$; элемент $d\mathbf{s}_1$ испытывает силу со стороны элемента $d\mathbf{s}_2$, но сам на него не действует

Впрочем, в случае *постоянных* токов, по необходимости являющихся замкнутыми, это нарушение третьей аксиомы Ньютона связано лишь с представлением сил взаимодействия токов как сил попарного взаимодействия их элементов Действительно, как мы покажем в § 51, силы взаимодействия двух *замкнутых* токов удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия (см. также задачи 27 и 28 в конце параграфа). В общем же случае переменного электромагнитного поля можно и должно обобщить понятие количества движения так, чтобы справедливость этого принципа оказалась обеспеченной во всех электромагнитных явлениях [1]).

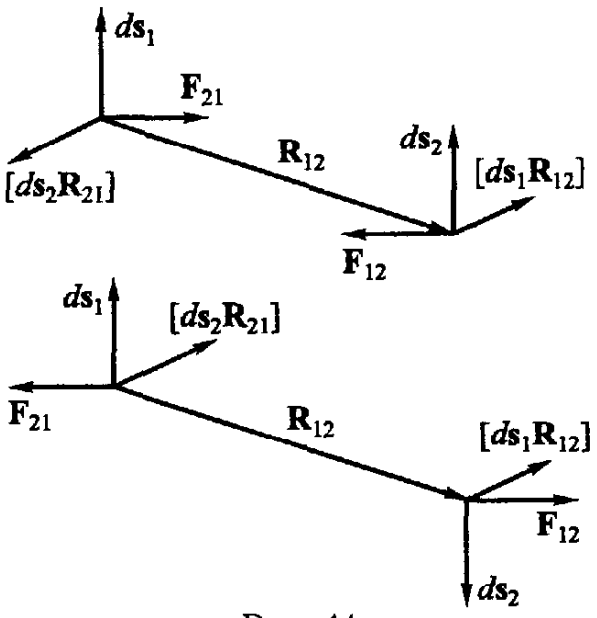

Рис 44

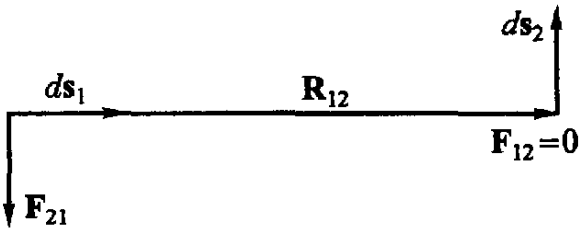

Рис. 45

4. Выше уже упоминалось, что в пределах изучения замкнутых постоянных токов сила взаимодействия элементов токов не может быть определена однозначно. Математически это обстоятельство выражается в том, что если видоизменить закон взаимодействия токов добавлением ряда членов, интеграл которых по всякому замкнутому контуру обращается в нуль, то общая сила, испытываемая элементом со стороны *замкнутого* тока, остается неизменной.

[1]) В § 105 будет доказан обобщенный закон сохранения полного (механического и электромагнитного) количества движения (уравнение (105 10)] Так как закон сохранения количества движения эквивалентен закону равенства действия и противодействия, то тем самым будет доказана и справедливость этого последнего закона в его обобщенной форме

В частности, легко убедиться, что выражение силы $\mathbf{F}_{12}$ может быть видоизменено следующим образом:

$$\mathbf{F}'_{12} = \mathbf{F}_{12} + \frac{J_1 J_2}{c^2} \{\Phi(R_{12})(d\mathbf{s}_1\, \mathbf{R}_{12})\, d\mathbf{s}_2 + d\,[\mathbf{R}_{12}(d\mathbf{s}_2\, \mathbf{R}_{12}) f(R_{12}]\}, \qquad (43.5)$$

где $\Phi(R_{12})$ и $f(R_{12})$ суть произвольные скалярные функции от R_{12}, а $d\,[\mathbf{R}_{12}(d\mathbf{s}_2 \mathbf{R}_{12}) f(R_{12})]$ означает приращение (дифференциал) выражения в скобках при перемещении начальной точки радиуса-вектора $\mathbf{R}_{12}$ на отрезок $d\mathbf{s}_1$ (так что $d\mathbf{R}_{12} = -d\mathbf{s}_1$). Действительно, при интегрировании по контуру тока J_1 последний член обращается в нуль как интеграл полного дифференциала по замкнутому пути. Далее, $\Phi(R_{12})\mathbf{R}_{12}$ всегда может быть представлено в виде градиента некоторой функции $\varphi(R_{12})$ от R_{12} [см. уравнения (7*) и (8*)]:

$$\Phi(R_{12})\mathbf{R}_{12} = \operatorname{grad} \varphi(R_{12}).$$

Следовательно,

$$\Phi(R_{12})(d\mathbf{s}_1\, \mathbf{R}_{12}) = (d\mathbf{s}_1 \cdot \operatorname{grad} \varphi(R_{12})) = \frac{\partial \varphi(R_{12})}{\partial s_1}\, ds_1.$$

Интеграл же этого полного дифференциала по замкнутому контуру тока J_1 [а стало быть, и интеграл второго члена формулы (43.5)] также обращается в нуль.

З а д а ч а 27. Исходя из уравнений (43.1) и (43.2), показать непосредственным интегрированием, что равнодействующая сил, испытываемая одним из *замкнутых* токов со стороны другого замкнутого тока, удовлетворяет принципу равенства действия и противодействия.

З а д а ч а 28. Закон пондеромоторного взаимодействия элементов тока был впервые сформулирован Ампером, исходившим из предположения, что взаимодействие элементов тока должно удовлетворять третьему принципу Ньютона и должно быть направлено по линии их соединения. Найденный Ампером закон в наших обозначениях гласит:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{J_1 J_2}{c^2} \left\{ \frac{3}{R_{12}^5} (d\mathbf{s}_1\, \mathbf{R}_{12})(d\mathbf{s}_2\, \mathbf{R}_{12}) - \frac{2}{R_{12}^3} (d\mathbf{s}_1\, d\mathbf{s}_2) \right\} \mathbf{R}_{12}.$$

Показать, что применение формулы Ампера к вычислению результирующей силы, действующей на элемент $d\mathbf{s}_2$ со стороны всех элементов замкнутого тока J_1, дает тот же результат, что и применение формулы (43.1).

§ 44. Переход от линейных токов к токам конечного сечения

1. В предыдущих параграфах мы рассматривали элементы линейных токов. Очевидно, что при определении возбуждаемого током *поля* можно считать *линейными* те токи, размеры любого сечения которых достаточно малы по сравнению с расстоянием от этого сечения до рассматриваемых точек поля P. Разумеется,

ток может удовлетворять этому условию линейности лишь в том случае, если мы ограничиваемся рассмотрением достаточно удаленных от него точек поля. При определении же *пондеромоторных сил*, испытываемых током во внешнем магнитном поле $\mathbf{H}$, ток этот можно считать линейным в том случае, если поле $\mathbf{H}$ не изменяется сколько-нибудь значительно на протяжении любого сечения тока.

Таким образом, формулы § 42, 43 применимы лишь в случае выполнения перечисленных условий. Так, например, при $R \to 0$ определяемая формулой (42.2) напряженность поля $\mathbf{H}$ стремится к бесконечности, т. е. теряет смысл.

Однако достаточно незначительных преобразований формул § 42, 43, чтобы сделать их применимыми при произвольном R и при произвольно быстро изменяющейся от точки к точке напряженности внешнего поля $\mathbf{H}$. Для этого достаточно воспользоваться тем, что, согласно § 37, ток конечного сечения может быть разложен на совокупность бесконечно тонких *нитей тока*, и применить формулы § 42 к элементам этих нитей.

Сила тока dJ, протекающего по нити тока, согласно уравнению (36.2), равна

$$dJ = j\,dS,$$

где j — плотность тока, а dS — *перпендикулярное* к оси сечение нити. Стало быть,

$$dJ\,ds = j\,dS\,ds = j\,dV,$$

где ds — длина, а dV — объем бесконечно малого отрезка нити. Так как, наконец, ось нити тока, по определению, совпадает с линиями тока, то $d\mathbf{s}$ параллельно $\mathbf{j}$ и

$$dJ\,d\mathbf{s} = \mathbf{j}\,dV. \tag{44.1}$$

Таким образом, *элемент длины* каждой *нити тока*, совокупность которых образует ток конечного сечения J, эквивалентен *элементу объема* $\mathbf{j}\,dV$ этого тока J.

Поэтому напряженность $d\mathbf{H}$ поля элемента объема $\mathbf{j}\,dV$ тока J на основании (42.2) и (44.1) равна

$$d\mathbf{H} = \frac{dJ}{cR^3}\,[d\mathbf{s}\,\mathbf{R}] = \frac{[\mathbf{jR}]}{cR^3}\,dV. \tag{44.2}$$

Общая же напряженность магнитного поля всего замкнутого тока J будет равняться сумме напряженностей полей, создаваемых его отдельными элементами:

$$\mathbf{H} = \int d\mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \frac{[\mathbf{jR}]}{R^3}\,dV, \tag{44.3}$$

где интегрирование должно быть распространено на весь объем тока (т. е. на объем обтекаемых током проводников), а $\mathbf{R}$ есть расстояние рассматриваемой точки поля P от элемента тока dV.

Конечно, в случае линейных токов эта последняя формула совпадает с формулой (42.4).

Совершенно аналогичным путем, применив уравнение (42.1) к элементу нити тока объема dV и воспользовавшись уравнением (44.1), получим, что пондеромоторная сила, испытываемая элементом объема проводника dV, по которому протекает ток плотности $\mathbf{j}$, равна

$$\mathbf{F} = \frac{dJ}{c}[d\mathbf{s}\,\mathbf{H}] = \frac{1}{c}[\mathbf{j}\mathbf{H}]\,dV, \tag{44.4}$$

где $\mathbf{H}$ есть напряженность магнитного поля в элементе dV. Иными словами, объемная *плотность пондеромоторных сил* равна

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}[\mathbf{j}\mathbf{H}]. \tag{44.5}$$

2. В дальнейшем нам неоднократно придется переходить от рассмотрения линейных токов к токам конечного сечения и обратно. Как явствует из изложенного, в частности, из сравнения (42.4) с (44.3), переход этот всегда эквивалентен замене интегрирования по длине линейного тока интегрированием по объему тока конечного сечения:

$$J\oint \Phi\, d\mathbf{s} \rightleftarrows \oint \Phi\mathbf{j}\, dV, \tag{44.6}$$

где Φ может быть любой скалярной или векторной функцией точки. Если ток удовлетворяет условиям линейности, перечисленным в начале этого параграфа, то оба выражения в формуле (44.6) равносильны друг другу; в противном же случае они различны по своему содержанию, причем физический смысл имеет только *объемный* интеграл.

Заметим также, что в случае разветвленного контура тока только правая часть (44.6) сохраняет свой вид, тогда как в левой части необходимо учесть, что сила тока в различных участках его цепи может быть различной.

Соотношение (44.6) можно условно записать в форме, соответствующей уравнению (44.1), заменив в последнем dJ на J:

$$J\,d\mathbf{s} \rightleftarrows \mathbf{j}\,dV. \tag{44.7}$$

Однако соотношение (44.7), в сущности, приобретает смысл лишь по выполнении слева интегрирования по $d\mathbf{s}$, а справа по dV, как это явно указывается в (44.6).

3. Формулы (44.3) и (44.4) применимы, очевидно, во всех точках поля постоянных токов. В частности, определяемая ими напряженность поля $\mathbf{H}$ в отличие от уравнений (42.2) и (42.4) всюду сохраняет конечное значение (если, разумеется, плотность тока $\mathbf{j}$

всюду конечна, как это следует из элементарных физических соображений) [1].

Для точек поля, лежащих вне токов ($R \neq 0$), это очевидно Чтобы убедиться в конечности поля $\mathbf{H}$ внутри токов, рассмотрим произвольную точку P', лежащую внутри несущего ток проводника, и опишем вокруг нее сферу V малого, но все же конечного радиуса R_0. Поле, создаваемое в P точками, находящимися вне сферы V', конечно, ибо эти токи находятся от P на конечном расстоянии, большем R_0. Стало быть, нам достаточно убедиться в конечности поля $\mathbf{H}'$, создаваемого токами, находящимися внутри сферы V'. Из уравнения (44.3) следует:

$$|\mathbf{H}'| \leqslant \frac{1}{c}\int\limits_{V'} \frac{|[\mathbf{jR}]|}{R^3}\, dV,$$

где $|\mathbf{H}'|$ и $|[\mathbf{jR}]|$ суть абсолютные величины соответствующих векторов, а интегрирование распространено по объему сферы V'. Но

$$|[\mathbf{jR}]| \leqslant j_m R,$$

где j_m обозначает максимальное значение плотности тока внутри сферы V'. Стало быть,

$$|\mathbf{H}'| \leqslant \frac{j_m}{c}\int\limits_{V'} \frac{dV}{R^2}.$$

Введя сферические координаты R, ϑ и α с центром в P, получим

$$dV = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\alpha\, dR$$

и

$$|\mathbf{H}'| \leqslant \frac{j_m}{c}\int\limits_{V'} \frac{dV}{R^2} = \frac{j_m}{c}\int\limits_0^{R_0} dR \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_0^{2\pi} d\alpha = \frac{4\pi R_0 j_m}{c}.$$

Таким образом, H' есть величина конечная, стремящаяся к нулю при уменьшении радиуса сферы R_0, что и требовалось доказать.

Нетрудно также доказать *непрерывность* вектора $\mathbf{H}$, т. е. доказать, что разность значений вектора $\mathbf{H}$ в смежных точках поля P и P' стремится к нулю, если расстояние PP' стремится к нулю.

Пусть обе точки P и P' лежат внутри сферы V'. При переходе из P в P' поле токов, лежащих вне V', изменяется непрерывно, ибо токи эти находятся на конечном расстоянии от P и P'. Что же касается поля $\mathbf{H}'$ токов, лежащих внутри V', то напряженность этого поля, по доказанному, меньше $(4\pi j_m/c)\, R_0$; стало быть, и изменение $\mathbf{H}'$ при переходе от P к P' не может быть больше этого значения. Если PP' стремится к нулю, то R_0 может быть выбрано сколь угодно малым, откуда и следует непрерывность вектора $\mathbf{H}$.

З а д а ч а 29. По бесконечному прямому полому круговому цилиндру протекает параллельно оси цилиндра постоянный ток, равномерно распределенный по его поверхности. Показать, что поле тока внутри цилиндра равно нулю.

---

[1] Впрочем, иногда удобно пользоваться представлением о *поверхностных токах*, объемная плотность которых j бесконечна (ср. поверхностные заряды в электростатике). О поверхностных токах см § 49; магнитное поле этих токов обладает поверхностями разрыва.

§ 45. Лоренцева сила

1. Элемент объема dV проводника, по которому протекает ток плотности $\mathbf{j}$, испытывает в магнитном поле $\mathbf{H}$ пондеромоторную силу $\mathbf{F}$, равную [см. уравнение (44.4)]:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c}[\mathbf{jH}]\,dV. \tag{44.4}$$

Сила эта отлична от нуля лишь в том случае, если $\mathbf{j} \neq 0$, т. е. если в проводнике происходит движение электрических зарядов. С точки зрения электронной теории, все пондеромоторные силы, испытываемые в электромагнитном поле какими бы то ни было телами, должны в конечном счете сводиться к силам, приложенным к электрическим зарядам, входящим в состав этих тел. Соответственно этому и в рассматриваемом случае мы должны попытаться свести силу $\mathbf{F}$, испытываемую несущим ток проводником, к силам, испытываемым движущимися в нем зарядами.

С этой целью выразим плотность тока $\mathbf{j}$ через число n находящихся в единице объема «свободных» электронов (т. е. электронов, движением своим создающих ток) и через *среднюю* скорость этих электронов $\mathbf{u}$; согласно уравнению (40.1),

$$j = neu.$$

Направление тока j условно считается совпадающим с тем направлением, по которому двигались бы *положительные* заряды, если бы этот ток создавался их движением. Стало быть, вектор $\mathbf{j}$ направлен противоположно средней скорости $\mathbf{u}$ движения *отрицательных* электронов, так что если под e понимать *алгебраическую* величину заряда (для электронов $e < 0$), то можно написать

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{u}. \tag{45.1}$$

Внося это в уравнение (44.4), получим

$$\mathbf{F} = \frac{ne}{c}[\mathbf{uH}]\,dV. \tag{45.2}$$

Такова результирующая сила, действующая на $n\,dV$ свободных электронов, заключенных в элементе объема проводника и обладающих средней скоростью $\mathbf{u}$. Естественно предположить, что на каждый из этих $n\,dV$ электронов действует сила

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}], \tag{45.3}$$

где $\mathbf{v}$ есть *истинная* скорость электрона. Если тока нет, то электроны движутся беспорядочно, $u = 0$ и равнодействующая приложенных к ним сил равна нулю. Если же ток отличен от нуля, то равнодействующая (45.2) этих сил сообщает электронам соответствующее приращение количества движения, которое при

столкновении электронов с атомами (или ионами) проводника передается этому проводнику и вызывает его движение в магнитном поле (или стремится вызвать, если проводник закреплен). С точки зрения макроскопической теории, не вдающейся в рассмотрение внутреннего механизма явлений, это значит, что на проводник действует пондеромоторная сила (44.4).

2. Результаты изучения движения свободных электронов (в точном смысле этого слова, например, электронов, образующих катодные лучи) подтверждают правильность формулы (45.3), которая оказывается применимой к (точечным) электрическим зарядам, движущимся со скоростью $\mathbf{v}$ в произвольном (постоянном или переменном) магнитном поле $\mathbf{H}$. Если мы учтем еще силу $e\mathbf{E}$, испытываемую (точечным) зарядом в электрическом поле $\mathbf{E}$, то общая сила, испытываемая зарядом e в произвольном электромагнитном поле, выразится формулой

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right). \tag{45.4}$$

Эта формула была впервые дана Лоренцем, и поэтому силу $\mathbf{F}$ называют *лоренцевой силой.*

Допустив справедливость формулы (45.4), мы можем, очевидно, лишь в том случае сохранить данное в § 2 *определение напряженности электрического поля* $\mathbf{E}$, согласно которому $\mathbf{E}$ равно силе, испытываемой помещенным в это поле единичным положительным пробным зарядом, если мы присовокупим к этому определению оговорку, что пробный заряд должен быть *неподвижным* ($\mathbf{v} = 0$); в этом случае формула (45.4) совпадает с формулой (2.2).

3. Весьма существенно, что сила, испытываемая движущимся зарядом в магнитном поле, *перпендикулярна как к направлению его движения* $\mathbf{v}$, *так и к направлению поля* $\mathbf{H}$. Таким образом, сила эта лишь искривляет путь заряда, не изменяя числового значения его скорости, т. е. не совершая никакой механической работы. Это обстоятельство может показаться противоречащим тому факту, что работа, совершаемая при движении несущего ток проводника в магнитном поле, вообще говоря, отлична от нуля (электромотор!). Кажущееся противоречие это разрешится, если принять во внимание, что движение проводника в магнитном поле неизбежно сопровождается явлениями электромагнитной индукции. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в § 76.

4. Заметим в заключение, что искривление пути электрических зарядов под действием силы (45.3) должно сказываться в перераспределении тока по сечению проводника при внесении этого проводника в магнитное поле. Это перераспределение тока, действительно, проявляется в так называемых гальваномагнитных, термомагнитных и родственных им явлениях. Мы рассмот-

рим в виде примера только одно из этих явлений, так называемое явление Холла.

Пусть по однородной металлической пластинке или ленте шириной a *протекает электрический ток плотности* $\mathbf{j}$ *в направлении* оси y (рис. 46). Если поместить пластинку в однородное магнитное поле $\mathbf{H}$, направленное по оси z, то электрические заряды, движением которых обусловливается ток, будут, согласно уравнению (45.2), испытывать добавочную силу

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c}[\mathbf{uH}],$$

где $\mathbf{u}$ — средняя скорость носителей тока. Эта добавочная сила будет отклонять ток по направлению оси x; струя электронов будет «бить» в передний край пластинки и вызывать там накопление отрицательных электрических зарядов. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, *пока результирующая сила поля* накопившихся у правого края отрицательных зарядов и поля избытка положительных зарядов, собравшихся у левого края, не уравновесит силы $\mathbf{F}$. Обозначая это уравновешивающее поле через $\mathbf{E}'$, получаем

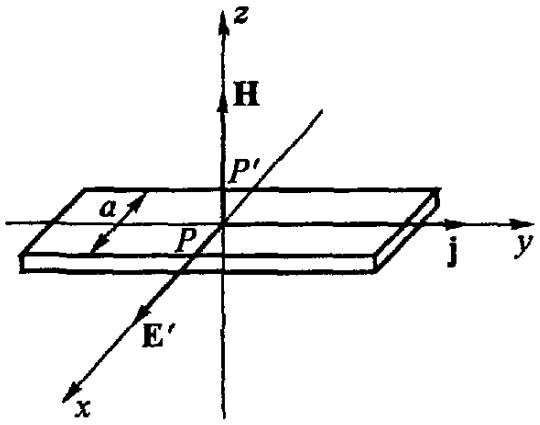

Рис. 46

$$e\mathbf{E}' = -\mathbf{F} = -\frac{e}{c}[\mathbf{uH}].$$

Из рассмотрения рис. 46 следует, что $\mathbf{E}'$ должно быть направлено по оси x; стало быть, разность потенциалов между точками P и P', лежащими на одном перпендикуляре к оси ленты, будет равна φ_P

$$\varphi_{P'} - \varphi_P = E'_x a = \frac{1}{c} uaH,$$

или, выражая среднюю скорость электронов u через плотность тока j с помощью уравнения (45.1),

$$\varphi_{P'} - \varphi_P = \frac{jaH}{cen} = RjaH, \tag{45.5}$$

где коэффициент

$$R = \frac{1}{cen} \tag{45.6}$$

носит название *коэффициента Холла* [1]).

Поперечная разность потенциалов $\varphi_{P'} - \varphi_P$, возникающая в несущем ток проводнике при включении магнитного поля, может быть непосредственно измерена на опыте. Она оказывается, действительно, пропорциональной величинам j, H и a, как того требует формула (45.5). Числовое значение этой разности потенциалов весьма мало. Так, например, при пропускании тока в 10 А через золотую ленту шириной 1 см и толщиной 0,1 мм в магнитном

[1]) Более точные вычисления, учитывающие отличие скоростей отдельных электронов от их средней скорости, приводят лишь к незначительному изменению числового множителя в формуле (45.6): $R = 3\pi/(8cen)$, если применять к электронам классическую статистику. Если же применять к электронам статистику Ферми–Дирака (§ 41), то результат этих вычислений совпадает с (45.6).

поле напряженности 10 000 Гс эта разность потенциалов оказывается равной всего лишь 7 мкВ. Наиболее замечательно, однако, что знак коэффициента Холла R, который, согласно уравнению (45.6), должен быть отрицательным, ибо носителями тока в металлах являются отрицательные электроны ($e < 0$), в действительности оказывается различным для различных металлов. Так, $R < 0$ для Au, Cu, Pt, Ag, Ni и $R > 0$ для Fe, Co, Zn, Cd, Sb и т. д. Таким образом, дело обстоит так, как если бы носителями тока во второй из этих групп металлов были не отрицательные, а положительные заряды. Это заключение противоречит, однако, всей совокупности наших сведений о природе металлов и долгое время являлось одной из главнейших трудностей, противостоявших электронной теории металлов. Противоречие это вполне удовлетворительно разрешается квантовой теорией металлов.

Пример. *Движение электронов в постоянном магнитном поле* ($\mathbf{H} = \text{const}$). Уравнение движения электрона в магнитном поле, согласно (45.3), гласит:

$$\mathbf{m}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}].$$

Так как проекция силы $\mathbf{F}$ на направление вектора $\mathbf{H}$ неизменно равна нулю, то слагающая $\mathbf{v}_H$ скорости электрона по этому направлению будет постоянна. Так как, с другой стороны, *абсолютная* величина всей скорости $\mathbf{v}$ тоже постоянна (ибо ускорение перпендикулярно скорости), то должна быть постоянной и перпендикулярная к вектору $\mathbf{H}$ слагающая скорости $v_\perp$. Наконец, постоянной должна быть и абсолютная величина силы $\mathbf{F}$, ибо

$$F = \frac{e}{c}|[\mathbf{vH}]| = \frac{e}{c}v_\perp H = \text{const}.$$

Таким образом, движение электрона может быть разложено на два составляющих движения: равномерное движение по направлению поля $\mathbf{H}$ со скоростью v_H и движение в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{H}$, совершающееся с постоянным по величине ускорением

$$a = \frac{e}{cm}v_\perp H,$$

направленным перпендикулярно его скорости $v_\perp$. Но, как известно, движение с постоянным нормальным ускорением a представляет собой равномерное движение по кругу, радиус которого R может быть определен из соотношения

$$\frac{v_\perp^2}{R} = a = \frac{e}{cm}v_\perp H;$$

следовательно,

$$R = \frac{cmv_\perp}{eH} = \frac{cmv}{eH}\sin(\mathbf{v}, \mathbf{H}). \qquad (45.7)$$

Совокупность равномерного поступательного движения со скоростью v_H и равномерного кругового движения со скоростью $v_\perp$

в плоскости, перпендикулярной **H**, представляет собой движение с постоянной по абсолютной величине скоростью по винтовой линии, навитой на прямой круговой цилиндр радиуса R, ось которого параллельна **H**. Угол между осью цилиндра и касательной к винтовой траектории электрона, конечно, постоянен и определяется начальными условиями движения. В частности, если начальная скорость электрона направлена перпендикулярно **H**, то винтовая траектория электрона вырождается в окружность, плоскость которой перпендикулярна **H**.

Итак, в постоянном однородном магнитном поле электрон описывает, вообще говоря, винтовую линию, ось которой совпадает с направлением поля. Заметим, что формула (45.7) дает возможность путем измерения R, v, H и $\sin(\mathbf{v}, \mathbf{H})$ определить отношение e/m заряда электрона к его массе. Возможность эта широко используется в экспериментальной физике для определения отношения e/m как для электронов, так и для других заряженных частиц (α-лучи, каналовые лучи и т. д.).

§ 46. Вектор-потенциал магнитного поля

1. Одно из основных уравнений магнитного поля — уравнение (44.3) — можно преобразовать к более удобному для вычисления виду. Подынтегральное выражение правой части этой формулы может быть, согласно уравнению (10*), записано следующим образом:

$$\frac{[\mathbf{jR}]}{R^3} = -\left[\mathbf{j}\cdot \operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{R}\right)\right] = \left[\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{R}\right)\cdot \mathbf{j}\right].$$

Напоминаем при этом, что в уравнении (44.3) **R** означает радиус-вектор, проведенный из элемента тока $\mathbf{j}\,dV$ («точка истока») в ту «точку наблюдения» P, в которой определяется напряженность магнитного поля, и индекс a у знака градиента означает, что при определении градиента мы считаем неподвижной точку истока и переменной точку наблюдения.

С другой стороны, полагая в формуле (43_3^*)

$$\varphi = \frac{1}{R} \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \mathbf{j},$$

получим

$$\operatorname{rot}_a\left(\frac{1}{R}\right) = \left[\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{R}\right)\cdot \mathbf{j}\right] + \frac{1}{R}\operatorname{rot}_a \mathbf{j},$$

где индекс a по-прежнему означает, что при образовании пространственных производных переменной считается лишь точка наблюдения P. Так как значение вектора $\mathbf{j}$ в элементе dV (точка истока), очевидно, не зависит от перемещения точки

наблюдения P, то, стало быть [1]),

$$\operatorname{rot}_a \mathbf{j} = 0$$

и

$$\operatorname{rot}_a\left(\frac{\mathbf{j}}{R}\right) = \left[\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\mathbf{j}\right] = \frac{[\mathbf{jR}]}{R^3}.$$

Внося это в уравнение (44.3), получим

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \operatorname{rot}_a\left(\frac{1}{R}\right) dV.$$

Так как в этом выражении дифференцирование (образование ротора) производится по координатам точки наблюдения, а интегрирование — по объему проводников, обтекаемых током, то изменение порядка этих операций не может повлиять на результат вычислений. Стало быть, можно написать

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}_a\left(\frac{1}{c}\int \frac{1}{R}\, dV\right).$$

Если ввести обозначение

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{1}{R}\, dV, \tag{46.1}$$

то уравнение это примет вид

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{46.2}$$

где индекс a при знаке ротора опущен как излишний, ибо при заданном распределении токов вектор $\mathbf{A}$ является функцией положения одной лишь точки наблюдения. Таким образом, напряженность магнитного поля может быть представлена в виде ротора некоторого вектора $\mathbf{A}$, который носит название *векторного потенциала* или вектор-потенциала токов.

2. Заметим, что для *линейных* токов (т. е. на расстояниях от токов, больших по сравнению с размерами их сечения) выражение векторного потенциала $\mathbf{A}$ может быть преобразовано с помощью формулы (44.6) и принимает следующий вид:

$$\mathbf{A} = \frac{J}{c}\int_L \frac{d\mathbf{s}}{R}. \tag{46.3}$$

[1]) Поясним это переходом к декартовым координатам. Пусть x_a, y_a, z_a суть координаты точки наблюдения P, а x_q, y_q, z_q — координаты элемента тока $\mathbf{j}\,dV$, так что $dV = dx_q\, dy_q\, dz_q$ Вектор $\mathbf{j}$ есть функция только от x_q, y_q, z_q $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x_q, y_q, z_q)$, тогда как $R = \sqrt{(x_a - x_q)^2 + (y_a - y_q)^2 + (z_a - z_q)^2}$ При определении div_a и rot_a дифференцировать нужно по координатам точки наблюдения, так что, например,

$$\operatorname{rot}_{ax} \mathbf{j} = \frac{\partial j_x(x_q, y_q, z_q)}{\partial y_a} - \frac{\partial j_y(x_q, y_q, z_q)}{\partial z_a} = 0.$$

3. Введением векторного потенциала $\mathbf{A}$ значительно облегчается изучение магнитного поля постоянных токов, подобно тому, как введением скалярного потенциала φ облегчается изучение электрического поля стационарной системы электрических зарядов [1]. Аналогия между ролью векторного и скалярного потенциалов особенно отчетливо выявляется при сопоставлении формул для электростатического и магнитного полей:

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho \mathbf{R}}{R^3}\, dV, \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \frac{[\mathbf{jR}]}{R^3}\, dV,$$

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dV}{R}, \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}\, dV}{R},$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

Из этого сопоставления явствует также, что вектор плотности тока играет для магнитного поля такую же роль, как скаляр плотности зарядов для поля электрического.

4. Перейдем теперь от интегральных соотношений к дифференциальным уравнениям для вектор-потенциала.

Если ввести произвольную систему декартовых координат x, y, z, то уравнение (46.1) можно записать в следующей форме:

$$A_x = \frac{1}{c}\int \frac{j_x\, dV}{R}, \quad A_y = \frac{1}{c}\int \frac{j_y\, dV}{R}, \quad A_z = \frac{1}{c}\int \frac{j_z\, dV}{R}. \tag{46.4}$$

Каждое из этих выражений для каждой из слагающих вектора $\mathbf{A}$ совершенно аналогично выражению скалярного потенциала электростатического поля:

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dV}{R}.$$

В § 12 было показано, что это последнее выражение является решением (интегралом) дифференциального уравнения Пуассона (11.3):

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho.$$

Следовательно, и выражения (46.4) для слагающих вектор-потенциала являются решениями следующих дифференциальных уравнений Пуассона:

$$\nabla^2 A_x = -\frac{4\pi}{c} j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\frac{4\pi}{c} j_y, \quad \nabla^2 A_z = -\frac{4\pi}{c} j_z.$$

Эти три уравнения для слагающих вектора $\mathbf{A}$, согласно (41*), равнозначны одному векторному уравнению

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{46.5}$$

[1] Как мы убедимся в дальнейшем, магнитное поле токов, как и всякое вихревое поле, однозначным скалярным потенциалом не обладает.

которое и является искомым дифференциальным уравнением для векторного потенциала.

Нам остается только рассмотреть вопрос о том, при каких условиях интегральное выражение (46.1) для векторного потенциала *однозначно* вытекает из дифференциального уравнения (46.5). В § 12 были исследованы условия, при которых приведенное выше интегральное выражение для φ однозначно вытекает из уравнения Пуассона. Повторяя все рассуждения § 12 с заменой φ на A_x, A_y, A_z и ρ на j_x/c, j_y/c, j_z/c и полагая, кроме того, $\sigma = 0$, мы придем к тому результату, что интегральное выражение (46.1) для $\mathbf{A}$ является *единственным* решением дифференциального уравнения (46.5), удовлетворяющим следующим условиям:

1) как сам вектор $\mathbf{A}$, так и его пространственные производные конечны и непрерывны во всем пространстве;

2) в бесконечности каждая из слагающих A_k вектора $\mathbf{A}$ удовлетворяет условиям типа (12.10):

$$RA_k \quad \text{и} \quad R^2\nabla A_k \quad \text{остаются конечными при} \quad R \to \infty. \tag{46.6}$$

При этом, разумеется, предполагается, что плотность $\mathbf{j}$ возбуждающих поле токов конечна во всем пространстве и настолько быстро убывает с R, что интеграл (46 1) сходится. Если же ввести в рассмотрение поверхностные токи, объемная плотность $\mathbf{j}$ которых бесконечна, то выражение (46.1) нужно дополнить еще одним членом (см. § 49).

5. Заметим в заключение, что первые производные вектора $\mathbf{A}$ по координатам связаны между собою соотношением

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{46.7}$$

Действительно, из уравнения (46.1) следует:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{c}\operatorname{div}_a \int \frac{\mathbf{j}\,dV}{R},$$

где индекс a у знака дивергенции означает, что пространственное дифференцирование производится по координатам точки наблюдения P. Но, как указывалось в начале этого параграфа, порядок операций интегрирования по объему токов и дифференцирования по точке наблюдения может быть изменен на обратный. Стало быть,

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \operatorname{div}_a\left(\frac{\mathbf{j}}{R}\right) dV.$$

Применяя уравнение (43^*_2), можем написать

$$\operatorname{div}_a\left(\frac{\mathbf{j}}{R}\right) = \frac{1}{R}\operatorname{div}_a\mathbf{j} + \mathbf{j}\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{R}\right) = \mathbf{j}\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{R}\right),$$

ибо значение вектора $\mathbf{j}$ от координат точки наблюдения P не зависит, ввиду чего $\operatorname{div}_a\mathbf{j} = 0$. С другой стороны, воспользовавшись формулой (10*) и применив затем вторично формулу (43*),

получим

$$\mathbf{j}\,\mathrm{grad}_a\left(\frac{1}{R}\right) = -\mathbf{j}\,\mathrm{grad}_q\left(\frac{1}{R}\right) = -\,\mathrm{div}_q\left(\frac{\mathbf{j}}{r}\right) + \frac{1}{R}\,\mathrm{div}_q\,\mathbf{j}.$$

Последний член снова равен нулю, ибо дивергенция вектора $\mathbf{j}$ равна нулю [уравнение (37.4)]. Стало быть, окончательно:

$$\mathrm{div}_a\left(\frac{\mathbf{j}}{R}\right) = -\,\mathrm{div}_q\left(\frac{\mathbf{j}}{R}\right), \quad \mathrm{div}\,\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\int \mathrm{div}_q\left(\frac{\mathbf{j}}{R}\right) dV.$$

Последний интеграл можно преобразовать по теореме Гаусса, ибо пространственное дифференцирование под знаком интеграла производится по тем же координатам точек истока, как и интегрирование (в отличие от предшествующего выражения для $\mathrm{div}\,\mathbf{A}$, в котором дифференцирование под знаком интеграла производилось по координатам точки наблюдения). Следовательно,

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\oint \frac{j_n}{R}\,dS,$$

причем интегрирование должно быть распространено по поверхности всех обтекаемых током проводников. Но на поверхности проводников, согласно уравнению (37.6),

$$j_n = 0;$$

следовательно,

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 47. Дифференциальные уравнения магнитного поля. Циркуляция напряженности магнитного поля

1. Так как дивергенция всякого ротора всегда равна нулю [уравнение (42_2^*)], то из уравнения (46.2) непосредственно вытекает весьма важное уравнение:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0. \tag{47.1}$$

С другой стороны, образовывая ротор от обеих сторон того же уравнения (46.2), получаем на основании уравнения (42_3^*):

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A},$$

или, ввиду уравнения (46.7),

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = -\nabla^2\mathbf{A}. \tag{47.2}$$

Внося сюда выражение (46.5) для $\nabla^2\mathbf{A}$, получаем окончательно:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{47.3}$$

Уравнения (47.1) и (47.3) представляют собой полную систему основных дифференциальных уравнений магнитного поля постоянных токов (см. § 49).

2. Рассмотрим циркуляцию магнитного вектора **H** по произвольной замкнутой линии L. На основании теоремы Стокса (27*) и уравнения (47.3) мы можем написать

$$\oint_L H_s\,ds = \int_S \mathrm{rot}_n\,\mathbf{H}\,dS = \frac{4\pi}{c}\int_S j_n\,dS, \tag{47.4}$$

причем поверхностные интегралы могут быть распространены по *любой* из поверхностей, опирающихся на контур L (см. приложение, с. 593). Впрочем, нетрудно и непосредственно убедиться, что благодаря *замкнутости* постоянных токов значение этих поверхностных интегралов зависит лишь от контура L поверхности интегрирования S. Действительно, согласно уравнению (36.3), $j_n\,dS$ равно силе тока dJ, проходящего через элемент поверхности dS в направлении ее положительной нормали. Следовательно,

$$\oint_L H_s\,dS = \frac{4\pi}{c}\int_S j_n\,dS = \frac{4\pi}{c}\sum J, \tag{47.5}$$

где $\sum J$ есть алгебраическая сумма сил токов, пронизывающих контур L; токи эти должны считаться положительными или отрицательными, в зависимости от того, составляют ли их направления с направлением положительного обхода контура L право- или левовинтовую систему (рис. 47).

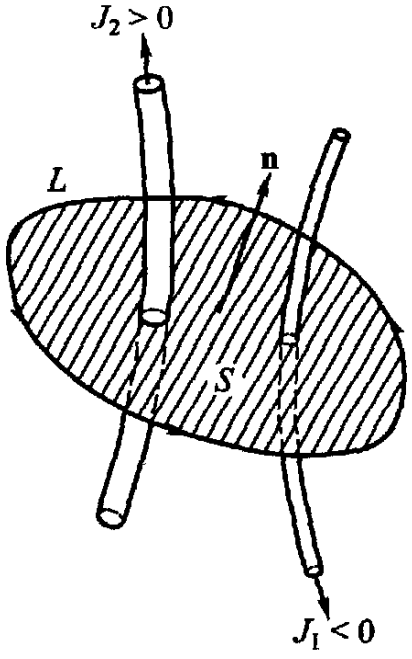

Рис 47

Если же две поверхности S и S' опираются *на один и тот же контур* L, то *совокупность этих поверхностей* образует одну замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объем V. Благодаря замкнутости постоянных токов количество электричества $\sum J$, втекающего через S в единицу времени в объем V, должно равняться количеству электричества $\sum J$, вытекающего из этого объема через поверхность S'. Таким образом, величина $\sum J$ действительно будет одинакова для обеих поверхностей S и S'.

Итак, согласно уравнению (47.5), циркуляция вектора напряженности магнитного поля по кривой, не охватывающей токов, равна нулю, циркуляция же по кривой, охватывающей токи, равна помноженной на $4\pi/c$ сумме сил этих токов (взятых с надлежащими знаками). Эта теорема является одной из важнейших в теории магнитного поля.

З а д а ч а 30. Показать, исходя из уравнения (47.4), что напряженность поля тока силы J, протекающего по бесконечному прямолинейному круговому цилиндру радиуса r_0, равна

$$H_e = \frac{2J}{cr} \quad (\text{при } r \geqslant r_0) \quad \text{и} \quad H_i = \frac{2J_r}{cr_0^2} \quad (\text{при } r \leqslant r_0),$$

где r есть расстояние точки поля от оси тока, причем силовые линии поля представляют собой концентрические току окружности. (См. также для сравнения задачу 25.)

§ 48. Поля потенциальные и поля соленоидальные. Сопоставление дифференциальных уравнений электрического и магнитного полей

1 В § 7 и 8 мы доказали, что необходимым и достаточным условием того, чтобы поле произвольного вектора $\mathbf{a}$ было полем *потенциальным*, является равенство нулю циркуляции вектора по любому замкнутому контуру [уравнение (7.3)]:

$$\oint a_s\, ds = 0. \tag{48.1}$$

В этом и только в этом случае можно ввести однозначный скалярный потенциал ψ вектора $\mathbf{a}$, определяемый соотношением

$$\psi_1 - \psi_2 = \int_1^2 a_s\, ds, \tag{48.2}$$

причем вектор $\mathbf{a}$, согласно результатам § 10, оказывается равным градиенту этого потенциала, взятому с обратным знаком [1]):

$$\mathbf{a} = -\operatorname{grad}\psi. \tag{48.3}$$

Далее, в § 7 мы показали, что вектор, удовлетворяющий интегральному условию (48.1), удовлетворяет также дифференциальному уравнению

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0 \tag{48.4}$$

во всех точках пространства [2]). Обратно, из уравнения (48.4) следует уравнение (48.1). Таким образом, условия (48.1) и (48.4)

[1]) Хотя рассуждения § 7, 8 и 10 относятся непосредственно к вектору напряженности электрического поля, однако, как уже указывалось там же, все эти рассуждения применимы ко всякому вектору $\mathbf{a}$, циркуляция которого по *произвольному* контуру тождественно равна нулю. Конечно, при этом встречающаяся в этих параграфах величина A уже не будет, вообще говоря, представлять собой работу сил поля; физический смысл ее будет зависеть от смысла вектора $\mathbf{a}$.

[2]) Уравнение (48.4) может быть также непосредственно получено из (48.3) на основании известной формулы векторного анализа (42_1^*), согласно которой ротор градиента тождественно равен нулю.

эквивалентны друг другу, и следовательно, необходимым и достаточным условием того, чтобы поле вектора $\mathbf{a}$ обладало однозначным скалярным потенциалом, является равенство нулю $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ во всех точках пространства. Поэтому поле потенциальное называется также полем *безвихревым*.

В частности, напряженность постоянного электрического поля $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (48.1) [см. уравнение (7.3)] и поэтому обладает скалярным потенциалом φ, а также удовлетворяет дифференциальному уравнению типа (48.4):

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \tag{48.5}$$

[см. уравнение (7.6)].

2. Сопоставим систему уравнений для напряженностей магнитного и электростатического полей:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Магнитное поле, в отличие от поля электростатического, есть поле вихревое, и притом чисто вихревое в том смысле, что дивергенция его всюду равна нулю. Такие поля называются также *соленоидальными*. Поэтому скалярным потенциалом (по крайней мере, однозначным скалярным потенциалом, — см. дальше) магнитное поле не обладает. Подобно тому, как потенциальное электростатическое поле полностью определяется заданием силы его истоков (т. е. заданием его дивергенции как функции координат), так вихревое магнитное поле полностью определяется заданием *мощности его вихрей*, т. е. заданием ротора поля как функции координат. Согласно уравнению (47.3) вихри магнитного поля расположены в участках поля, обтекаемых токами, и только в них, причем мощность этих вихрей (т. е. ротор) пропорциональна плотности тока $\mathbf{j}$. Иными словами, обтекаемые токами участки поля могут быть названы *вихревым пространством* магнитного поля.

§ 49. Пограничные условия в магнитном поле токов. Поверхностные токи. Поверхностный ротор. Поле бесконечного соленоида

1. С целью установления пограничных условий, которым должен удовлетворять вектор магнитного поля на поверхностях разрыва, предположим сначала, что во всех проводниках и, в частности, в проводящих ток тонких слоях, если такие существуют, объемная плотность токов $\mathbf{j}$ всюду остается конечной. Будем затем стремить толщину dl этих обтекаемых током слоев к нулю и потребуем, чтобы уравнения поля (47.1) и (47.3) оставались справедливыми в этих слоях и в предельном случае при $dl = 0$.

Этим требованием искомые пограничные условия определяются однозначно.

Действительно, на основании этого требования из уравнения (47.1) получим, согласно уравнению (6.7), пограничные условия для нормальной слагающей вектора **H**:

$$\operatorname{Div}\mathbf{H} = H_{2n} - H_{1n} = 0. \tag{49.1}$$

Интегрируя же уравнение (47.3) по поверхности S, получим на основании теоремы Стокса (27*) уравнение (47.4)

$$\oint_L H_s\, ds = \frac{4\pi}{c}\int j_n\, dS.$$

Возьмем произвольный слой толщины dl, отделяющий среду *1* от среды *2*, и рассмотрим элемент нормального сечения этого слоя $dS = dl\,dt$, заштрихованный на рис. 48. Применим интегральное уравнение (47.4) к этому элементу. Направление положительного обхода этого участка выберем, например, так, как указано на рисунке.

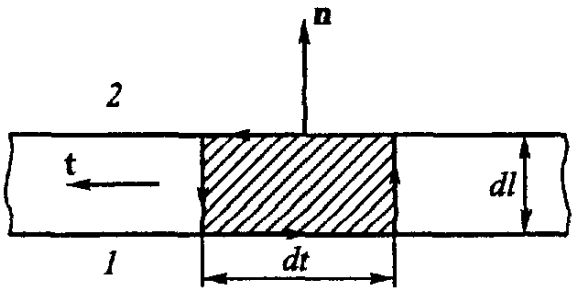

Рис. 48

Если мы станем стремить к нулю толщину слоя dl, оставляя длину рассматриваемого участка dt неизменной, то площадь этого участка будет также стремиться к нулю. Левая же часть уравнения (47.4) при $dl \to 0$ сведется (вплоть до величин второго порядка малости) к

$$\oint H_s\, ds = (H_{2t} - H_{1t})\, dt,$$

где H_1 и H_2 суть значения вектора **H** в первой и второй средах, а **t** — единичный вектор, касательный к поверхности раздела и лежащий в плоскости сечения слоя.

Что же касается правой части уравнения (47.4), то она пропорциональна силе тока, протекающего через площадку $dl\,dt$, и поэтому сведется к нулю при $dl = 0$, если объемная плотность тока **j** конечна, как мы всегда до сих пор предполагали. Однако в ряде случаев, если токи сосредоточены в слое весьма малой толщины, удобно рассматривать предельный случай токов, протекающих по бесконечно тонким поверхностям, т. е. *токов поверхностных* (ср. объемные и поверхностные электрические заряды).

2. Под *плотностью* **i** *поверхностных токов*, в отличие от плотности **j** токов объемных, мы будем понимать количество электричества, протекающего в единицу времени через *единицу длины отрезка*, расположенного на поверхности, по которой

течет ток, и перпендикулярного направлению тока. Если $\mathbf{i}$ отлично от нуля, то сила тока, протекающего через заштрихованную площадку $dt\,dl$ (см. рис. 48), в пределе при $dl \to 0$ окажется, очевидно, равной

$$\lim j_n\,dS = \lim j_n\,dt\,dl = i_N\,dt, \tag{49.2}$$

где i_N есть перпендикулярная к $\mathbf{t}$ слагающая плотности поверхностного тока. Мы ввели здесь индекс N вместо n, чтобы сохранить за $\mathbf{n}$ значение нормали к поверхности раздела ($\mathbf{n}$ направлено из среды *1* в среду *2*). Под $\mathbf{N}$ нужно понимать единичный вектор, касательный к поверхности и перпендикулярный к касательному же вектору $\mathbf{t}$.

Внося полученные выражения в (47.4), найдем после сокращения на dt искомое пограничное условие:

$$\frac{4\pi i_N}{c} = H_{2t} - H_{1t}.$$

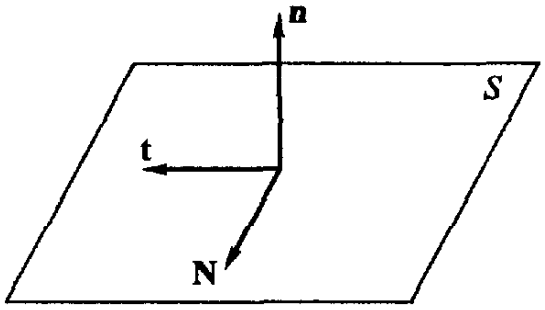

Рис. 49

Из рассмотрения рис. 48, в котором, соответственно избранному нами направлению обхода заштрихованной площадки $dt\,dl$, вектор $\mathbf{N}$ должен быть направлен на читателя, можно убедиться, что взаимно перпендикулярные единичные векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{n}$ составляют правовинтовую систему (рис. 49), так что

$$\mathbf{t} = [\mathbf{Nn}].$$

Стало быть,

$$H_t = \mathbf{Ht} = \mathbf{H}[\mathbf{Nn}] = \mathbf{N}[\mathbf{nH}], \quad i_N = \mathbf{Ni}.$$

Внося это в предшествующее уравнение, получим

$$\frac{4\pi\mathbf{Ni}}{c} = \mathbf{N}[\mathbf{n}(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)].$$

Так как $\mathbf{N}$ может иметь произвольное направление в плоскости раздела, то

$$\frac{4\pi\mathbf{i}}{c} = [\mathbf{nH}_2] - [\mathbf{nH}_1]. \tag{49.3}$$

Это уравнение и представляет собой то пограничное условие, которому при наличии поверхностных токов на поверхности раздела должны удовлетворять *касательные* слагающие вектора $\mathbf{H}$ (ибо лишь эти слагающие и входят в выражение $[\mathbf{nH}]$).

При отсутствии поверхностных токов это пограничное условие принимает вид

$$[\mathbf{n}(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = 0. \tag{49.4}$$

Это уравнение означает, что слагающие напряженности поля $\mathbf{H}$, касательные к произвольной поверхности, непрерывны,

т. е. что при отсутствии поверхностных токов для любого касательного направления $\mathbf{t}$

$$H_{2t} = H_{1t}. \tag{49.5}$$

Очевидно, что уравнения (49.4) и (49.5) эквивалентны друг другу.

3. Из предшествующего явствует, что, вообще говоря, *если* два *произвольных* вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{j}$ связаны соотношением

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 4\pi \mathbf{j},$$

то на поверхностях разрыва этих векторов связывающее их соотношение принимает вид

$$[\mathbf{n}(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)] = 4\pi \mathbf{i},$$

где $\mathbf{i}$ получается из $\mathbf{j}$ предельным переходом типа (49.2). Поэтому левую часть последнего уравнения принято называть *поверхностным ротором* вектора $\mathbf{a}$ и, в отличие от обыкновенного ротора, обозначать через Rot с *прописной* буквы R:

$$\operatorname{Rot} \mathbf{a} = [\mathbf{n}(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)] \tag{49.6}$$

(ср. определение поверхностной дивергенции в § 6). По аналогии с уравнением (6.8) мы, таким образом, можем выразить только что сформулированное положение в следующем символическом виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 4\pi \mathbf{j} \to \operatorname{Rot} \mathbf{a} = 4\pi \mathbf{i}. \tag{49.7}$$

4. Итак, пограничные условия (49.1) и (49.3) для магнитного поля постоянных токов могут быть записаны следующим образом:

$$\operatorname{Div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{Rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}. \tag{49.8}$$

Пограничные условия (4.3) и (7.7) для стационарного электрического поля в вакууме на основании эквивалентности уравнений типа (49.4) и (49.5) могут быть записаны так:

$$\operatorname{Div} \mathbf{E} = 4\pi\sigma, \quad \operatorname{Rot} \mathbf{E} = 0. \tag{49.9}$$

Уравнения

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{Rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, \\ &\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{Div} \mathbf{H} = 0 \end{aligned} \tag{B}$$

представляют собой *полную систему* дифференциальных уравнений магнитного поля постоянных токов. Другими словами, системой (B) магнитное поле определяется *однозначно*, если известно распределение токов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{i}$ и если на бесконечности удовлетворено условие

$$HR^2 \text{ при } R \to \infty \text{ остается конечным}, \tag{49.10}$$

означающее, что все возбуждающие поле токи расположены в конечной области пространства [ср. (12.10) и (46.6)]; обратно, если задана напряженность поля $\mathbf{H}$ в каждой точке пространства, то системой (B) однозначно определяется распределение токов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$.

Второе утверждение очевидно; для доказательства же первого предположим, что существуют два решения $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}'$ системы (B) при заданных $\mathbf{j}$ и $\mathbf{i}$. Внося оба решения в (B) и вычитая затем соответственные уравнения одно из другого, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H}'' &= 0, \quad \operatorname{Rot}\mathbf{H}'' = 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{H}'' &= 0, \quad \operatorname{Div}\mathbf{H}'' = 0, \end{aligned} \tag{B'}$$

где $\mathbf{H}'' = \mathbf{H} - \mathbf{H}'$. Далее, полагая $\mathbf{H}'' = \operatorname{rot}\mathbf{A}''$, что всегда возможно, ввиду $\operatorname{div}\mathbf{H}'' = 0$, получаем на основании (44*) и (B') следующую цепь равенств:

$$H''^2 = \mathbf{H}''\operatorname{rot}\mathbf{A}'' = \operatorname{div}[\mathbf{A}''\mathbf{H}''] + \mathbf{A}''\operatorname{rot}\mathbf{H}'' = \operatorname{div}[\mathbf{A}''\mathbf{H}''].$$

Стало быть, интеграл от H''^2 по произвольному объему, ограниченному поверхностью S, будет на основании (17*) равен

$$\int H''^2\,dV = \int \operatorname{div}[\mathbf{A}''\mathbf{H}'']\,dV = \oint [\mathbf{A}''\mathbf{H}'']_n\,dS, \tag{49.11}$$

причем поверхностный интеграл должен быть взят лишь по пограничной поверхности S, ибо во всем поле, согласно (B'), вектор $\mathbf{H}''$, а стало быть, и вектор A'' остаются непрерывными.

Если теперь распространить интегрирование на объем *полного поля* (с. 84), то на основании (49.10) интеграл по пограничной поверхности S обратится в нуль [1]). Стало быть, $\int H''^2\,dV = 0$, откуда следует, что $\mathbf{H}'' = \mathbf{H} - \mathbf{H}'$ во всех точках поля обращается в нуль. Этим и доказывается однозначность решения системы (B).

5. Заметим, что при наличии поверхностных токов выражения (44.3) и (46.1) для напряженности поля $\mathbf{H}$ и для вектор-потенциала $\mathbf{A}$ принимают вид

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \frac{[\mathbf{jR}]}{R^3}\,dV + \frac{1}{c}\int \frac{[\mathbf{iR}]}{R^3}\,dS, \tag{49.12}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}}{R}\,dV + \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{i}}{R}\,dS, \tag{49.13}$$

где поверхностные интегралы должны быть распространены по всем поверхностям, обтекаемым поверхностными токами. В справедливости этих обобщенных выражений легко убедиться путем предельного перехода от токов объемных к токам поверхностным.

---

[1]) Так как $\mathbf{H}$ выражается через производные вектор-потенциала $\mathbf{A}$, то при условии (49.10) этот вспомогательный вектор всегда может быть выбран так, чтобы на бесконечности удовлетворялось условие:

AR при $R \to \infty$ остается конечным [см. также уравнение (46.6)].

В дальнейшем мы повсюду, если только явно не будет оговорено противное, будем считать поверхностные электрические токи отсутствующими ($i = 0$).

Пример. *Магнитное поле бесконечного цилиндрического соленоида.* Предположим, что ток J циркулирует по проводнику, намотанному по винтовой линии на поверхность цилиндра сечения S. Такой обтекаемый током цилиндр называется цилиндрическим *соленоидом.*

Пусть на единицу длины цилиндра приходится n витков проводника. Если ход винтовой линии достаточно мал, то каждый виток соленоида можно приближенно заменить замкнутым кольцеобразным током той же силы. Если к тому же сечение проводника мало по сравнению с сечением цилиндра, то можно приближенно считать, что по бесконечно тонкой поверхности цилиндра циркулирует равномерно распределенный *поверхностный* ток плотности

$$i = nJ. \tag{49.14}$$

Линии этого тока представляют собой окружности, образованные сечением поверхности цилиндра плоскостями, перпендикулярными его оси.

Предположим, что наш соленоид представляет собою цилиндр бесконечной длины. В этом случае поле вне соленоида H_e равно нулю, а поле внутри соленоида H_i однородно и равно

$$H_i = \frac{4\pi}{c} i = \frac{4\pi}{c} nJ, \quad H_e = 0, \tag{49.15}$$

причем $\mathbf{H}_i$ направлено по оси соленоида и составляет с направлением тока в соленоиде правовинтовую систему. Действительно, выражения (49.15), очевидно, удовлетворяют уравнениям $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$, соответствующим отсутствию объемных токов. Далее, $\mathbf{H}$ всюду параллельно поверхности соленоида, т. е. поверхности разрыва поля, и поэтому $\operatorname{Div}\mathbf{H} = 0$. Наконец, как легко убедиться, при указанном направлении $\mathbf{H}_i$ выражения (49.15) удовлетворяют на поверхности соленоида также и уравнению $\operatorname{Rot}\mathbf{H} = (4\pi/c)\,\mathbf{i}$. Таким образом, выражения (49.15) удовлетворяют всем уравнениям системы (B) и, ввиду полноты этой системы, представляют собою единственное решение задачи [1]).

[1]) Собственно говоря, приведенное выше доказательство однозначности системы (B) неприменимо непосредственно к полю *бесконечного* соленоида, ибо в этом случае токи не сосредоточены в конечном участке пространства, $\mathbf{H}$ не исчезает в бесконечности, и нельзя утверждать, что входящие в (49.11) величины $\mathbf{H}''$ и $\mathbf{A}''$ будут исчезать в бесконечности. Если, однако, рассматривать поле бесконечного соленоида как предельный случай поля очень длинного конечного соленоида (а только такое рассмотрение и имеет физический смысл), то из доказанной однозначности поля сколь угодно длинного, но конечного соленоида вытекает однозначность поля и в предельном случае бесконечного соленоида

Очевидно, что формулы (49.15) приближенно применимы и к полю *конечного* соленоида в тех его участках, расстояние которых от концов соленоида велико как по сравнению с расстоянием до ближайших участков соленоида, так и по сравнению с поперечником соленоида. В сущности, только этот случай и имеют в виду, когда говорят о поле «бесконечного» соленоида.

З а д а ч а 31. Решить задачу 29, исходя из дифференциальных уравнений поля (B), и, кроме того, показать, что поле вне полого цилиндра совпадает с полем линейного тока той же силы, протекающего по оси цилиндра.

§ 50. Пондеромоторные силы, испытываемые в магнитном поле замкнутым током. Потенциальная функция тока во внешнем магнитном поле

1. При определении механических сил, испытываемых замкнутым током J во внешнем магнитном поле, ограничимся сначала тем случаем, когда это поле не изменяется сколько-нибудь существенно на протяжении любого сечения тока J, так что ток этот можно считать *линейным* (с. 206).

Поставим себе прежде всего задачу определить работу, совершаемую пондеромоторными силами магнитного поля $\mathbf{H}$ при произвольном перемещении контура тока J. Перемещение это, вообще говоря, может быть связано с деформацией контура тока.

Пусть каждый элемент $d\mathbf{s}$ контура L тока J испытывает некоторое произвольное бесконечно малое перемещение $\mathbf{q}$, конечно, не нарушающее связности контура (рис. 50), причем *сила тока J остается при этом перемещении постоянной* (виртуальное перемещение). Работа, совершаемая силами магнитного поля при этом перемещении элемента $d\mathbf{s}$, будет, согласно уравнению (44.4), равна

$$\mathbf{qF} = \frac{J}{c}\,\mathbf{q}\,[d\mathbf{s}\,\mathbf{H}];$$

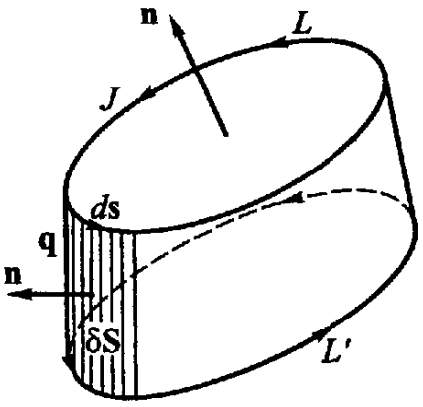

Рис. 50

общая же работа δA, связанная с перемещением всех элементов контура тока, будет равна

$$\delta A = \oint \mathbf{Fq} = \frac{J}{c}\oint_L \mathbf{q}\,[d\mathbf{s}\,\mathbf{H}] = \frac{J}{c}\oint \mathbf{H}\,[\mathbf{q}\,d\mathbf{s}],$$

но

$$[\mathbf{q}\,d\mathbf{s}] = \delta\mathbf{S},$$

где $\delta\mathbf{S}$ есть элемент площади, описанный элементом контура $d\mathbf{s}$ при его перемещении $\mathbf{q}$ (рис. 50), причем порядок сомножителей $d\mathbf{s}$ и $\mathbf{q}$ в выражении для $\delta\mathbf{S}$ выбран так, что направление вектора $\delta\mathbf{S}$ (т. е. направление *положительной* нормали $\mathbf{n}$ к элемен-

ту $\delta\mathbf{S}$) образует с направлением тока в контуре L' правовинтовую систему. Стало быть,

$$\delta A = \frac{J}{c}\int\limits_{\Delta} \mathbf{H}\,\delta\mathbf{S} = \frac{J}{c}\int\limits_{\Delta} H_n\,\delta S,$$

где интегрирование должно быть распространено по всем элементам δS поверхности Δ, описанной контуром тока L при перемещении его точек на расстояние $\mathbf{q}$ в положение L'.

Обозначим через Φ поток магнитного вектора, или, выражаясь короче, *магнитный поток* через контур тока L (т е. через произвольную поверхность S, опирающуюся на этот контур):

$$\Phi = \int\limits_{S} H_n\,dS, \tag{50.1}$$

где $\mathbf{n}$ есть *положительная* нормаль к S, образующая с направлением тока правовинтовую систему. Этот поток зависит лишь от расположения контура L, но не от формы поверхности S, ибо, согласно уравнениям (46.2) и (27*),

$$\Phi = \int\limits_{S} H_n\,dS = \int\limits_{S} \mathrm{rot}_n\,\mathbf{A}\,dS = \oint\limits_{L} A_s\,dS. \tag{50.2}$$

Таким образом, магнитный поток Φ через контур L равен циркуляции вектор-потенциала $\mathbf{A}$ по этому контуру.

Пользуясь обозначением (50.1), можем написать

$$\int\limits_{\Delta} H_n\,dS = \delta\Phi,$$

ибо изменение магнитного потока через контур тока равно, очевидно, магнитному потоку через поверхность Δ, описанную контуром при его перемещении. Стало быть,

$$\delta A = \frac{J}{c}\,\delta\Phi. \tag{50.3}$$

Таким образом, мы приходим к следующему весьма простому результату: работа пондеромоторных сил магнитного поля при произвольном перемещении тока равна умноженному на J/c изменению магнитного потока через контур этого тока. Значит, в частности, такие перемещения тока, при которых магнитный поток через его контур не испытывает изменения, не связаны с работой магнитного поля.

2. Если ввести обозначение:

$$U = -\frac{J}{c}\,\Phi, \tag{50.4}$$

то уравнение (50.3) примет вид

$$\delta A = -(\delta U)_J, \tag{50.5}$$

где индекс J при δU означает, что при определении приращения функции U силу токов J нужно считать постоянной.

Следовательно, работа пондеромоторных сил магнитного поля равна убыли функции U, которая, таким образом, играет роль *потенциальной или силовой функции* тока в магнитном поле. В частности, путем обычных в аналитической механике способов рассуждения легко убедиться, исходя из уравнения (50.5), что если функция U выражена в зависимости от каких-либо «обобщенных» координат q_i, характеризующих положение контура тока, то «обобщенная» (в смысле аналитической механики) пондеромоторная сила θ_i, действующая на ток по направлению какой-либо из этих координат q_i, будет равна

$$\theta_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{50.6}$$

Эти свойства потенциальной или силовой функции U могут побудить отождествить ее с *потенциальной энергией* магнитного поля. Однако такое заключение было бы *неосновательным*, ибо, как мы убедимся в следующей главе, перемещения проводника в магнитном поле сопровождаются не только работой пондеромоторных сил этого поля, но также и работой сил электродвижущих, индуцируемых полем в движущемся проводнике; ввиду этого изменение энергии магнитного поля при перемещении проводников нельзя определить по работе одних только пондеромоторных сил поля.

Поэтому, если мы иногда и будем для краткости называть U потенциальной «энергией», то лишь в том смысле, что пондеромоторные силы магнитного поля связаны с U той же зависимостью, с какой силы *консервативного* поля сил связаны с потенциальной энергией этого поля.

Хотя потенциальная силовая функция U и не равна энергии магнитного поля, тем не менее введением в рассмотрение этой функции значительно облегчается изучение пондеромоторных сил, действующих в магнитном поле на замкнутые токи, ибо устраняется необходимость в каждом отдельном случае производить сложное суммирование сил, действующих на отдельные элементы тока.

В частности, исходя из уравнений (50.5) и (50.6), путем обычных, хорошо известных рассуждений легко убедиться, что устойчивое равновесие контура постоянного тока соответствует *минимуму потенциальной функции* U, т. е , согласно уравнению (50.4), *максимуму магнитного потока* Φ.

3. Формулы, полученные нами для токов линейных, легко обобщить на случай токов объемных, т. е. на тот случай, когда

нельзя пренебречь изменением напряженности магнитного поля на протяжении сечения тока. С этой целью внесем сначала (50.2) в уравнение (50.4):

$$U = -\frac{J}{c}\oint \mathbf{A}\, d\mathbf{s}, \tag{50.7}$$

а затем выполним в полученном уравнении переход к объемным токам, согласно формуле (44.6):

$$U = -\frac{1}{c}\int \mathbf{A}\mathbf{j}\, dV. \tag{50.8}$$

Это и является искомым представлением формулы (50.4).

Два последних уравнения можно истолковать в том смысле (со всеми только что сделанными оговорками), что каждый элемент тока $J\,d\mathbf{s}$ (или $\mathbf{j}\,dV$) обладает в магнитном поле потенциальной «энергией» $-\frac{J}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{s}$ $\left(\text{или } -\frac{1}{c}\mathbf{A}\mathbf{j}\,dV\right)$ и что потенциальная функция U замкнутого тока равна сумме «энергий» отдельных его элементов.

Пример. *Рамка в однородном магнитном поле.* Рассмотрим произвольный плоский контур (рамку) площади S, обтекаемый током силы J. Пусть эта рамка помещена в однородное магнитное поле $\mathbf{H}$ и закреплена так, что может вращаться около оси, перпендикулярной полю $\mathbf{H}$ (рис. 51).

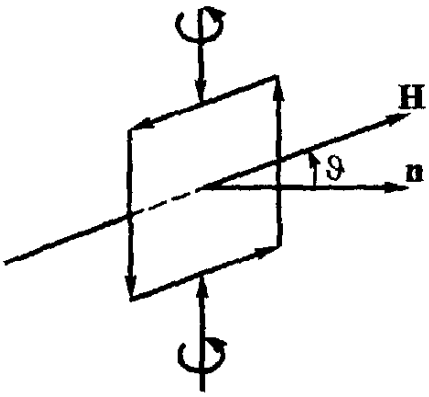

Рис 51

Пусть ϑ есть угол между $\mathbf{H}$ и положительной нормалью к рамке $\mathbf{n}$, т. е. нормалью, образующей с направлением тока в рамке правовинтовую систему. Тогда магнитный поток через рамку будет равен $\Phi = HS\cos\vartheta$, а потенциальная функция рамки будет равна

$$U = -\frac{1}{c}JSH\cos\vartheta. \tag{50.9}$$

Обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате ϑ, как известно (см. пример в § 18), есть не что иное, как момент N приложенных к рамке сил, стремящийся повернуть рамку около оси вращения:

$$N = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{c}JSH\sin\vartheta.$$

Положения равновесия рамки соответствуют $N = 0$, т. е. $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$. Первое из этих положений соответствует минимуму, второе — максимуму потенциальной функции U, и, стало быть, лишь первое положение равновесия является устойчивым. Отсюда следует, что пондеромоторные силы магнитного поля стремятся повернуть плоскость тока так, чтобы положительная нормаль

к ней совпала с направлением магнитного поля $\mathbf{H}$. В частности, два взаимодействующих контура тока будут стремиться установиться так, чтобы плоскости их были параллельны друг другу, а направление обоих токов было одинаково.

§ 51. Пондеромоторное взаимодействие токов. Коэффициент взаимной индукции

1. Рассмотрим теперь взаимодействие двух замкнутых линейных токов J_1 и J_2, обтекающих контуры L_1 и L_2. Пусть $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{A}_1$ суть значения напряженности и векторного потенциала поля первого тока, а $\mathbf{H}_2$ и $\mathbf{A}_2$ — соответственные величины для второго тока. Далее, обозначим через Φ_{12} магнитный поток поля первого тока через контур второго тока:

$$\Phi_{12} = \int\limits_{S_2} H_{1n}\, dS_2 = \oint\limits_{L_2} A_{1s}\, ds_2 = \oint\limits_{L_2} \mathbf{A}_1\, d\mathbf{s}_2, \tag{51.1}$$

где S_2 есть поверхность, опирающаяся на контур L_2, а $d\mathbf{s}_2$ — элемент длины этого контура [ср. уравнение (50.2)]. Магнитный поток, посылаемый вторым током через контур первого тока, мы обозначим соответственно через Φ_{21}:

$$\Phi_{21} = \int\limits_{S_1} H_{2n}\, dS_1 = \oint\limits_{L_1} \mathbf{A}_2\, d\mathbf{s}_1. \tag{51.2}$$

Внося в уравнение (51.1) значение (46.3) вектор-потенциала линейного тока J_1:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{J_1}{c} \oint\limits_{L_1} \frac{d\mathbf{s}_1}{R},$$

получим

$$\Phi_{12} = \frac{J_1}{c} \oint\limits_{L_1} \oint\limits_{L_2} \frac{d\mathbf{s}_1\, d\mathbf{s}_2}{R},$$

где интегрирование должно быть произведено по обоим контурам L_1 и L_2, причем каждый элемент длины $d\mathbf{s}_1$ контура L_1 должен быть скалярно помножен на каждый элемент $d\mathbf{s}_2$, и полученное произведение разделено на расстояние R элементов $d\mathbf{s}_1$ и $d\mathbf{s}_2$ друг от друга. Совершенно аналогичным путем найдем

$$\Phi_{21} = \frac{J_2}{c} \oint\limits_{L_2} \oint\limits_{L_1} \frac{d\mathbf{s}_2\, d\mathbf{s}_1}{R}.$$

2. Двойной интеграл, входящий в выражения для Φ_{12} и Φ_{21}, обозначается обыкновенно через L_{12} и L_{21}:

$$L_{12} = L_{21} = \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{s}_1\, d\mathbf{s}_2}{R}, \tag{51.3}$$

и носит название *коэффициента взаимной индукции* контуров L_1 и L_2 (смысл этого названия выяснится в гл. V, когда будет установлена связь между коэффициентом L_{12} и индукционным взаимодействием токов). Внося это обозначение в выражения для Φ_{12} и Φ_{21}, получим

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} J_1 L_{12}, \quad \Phi_{21} = \frac{1}{c} J_2 L_{21}. \tag{51.4}$$

Коэффициент взаимной индукции есть, конечно, *чисто геометрическая величина*, зависящая лишь от конфигурации и взаимного расположения контуров L_1 и L_2 и от выбора направления положительного обхода каждого из этих контуров [1]).

Однако на основании равенства (51.4) можно сказать, что коэффициент взаимной индукции контуров L_1 и L_2 численно равен магнитному потоку, посылаемому через один из этих контуров (например L_2) током силы c, циркулирующим по другому контуру L_1:

$$\Phi_{12} = L_{12} \quad (\text{при } J_1 = c). \tag{51.5}$$

3. Согласно уравнениям (50.4) и (51.4) потенциальная функция U_{12} тока J_2 в поле тока J_1 равна

$$U_{12} = -\frac{J_2}{c} \Phi_{12} = -\frac{1}{c^2} L_{12} J_1 J_2. \tag{51.6}$$

Точно таким же образом выразится и потенциальная функция U_{21} тока J_1 в поле тока J_2:

$$U_{21} = -\frac{J_1}{c} \Phi_{21} = -\frac{1}{c^2} L_{21} J_2 J_1. \tag{51.7}$$

Величина U_{12} (или равная ей величина U_{21}) играет роль *взаимной* потенциальной энергии токов J_1 и J_2 в том смысле, что работа *пондеромоторных* сил взаимодействия этих токов при перемещении любого из них или обоих одновременно равна убыли функции U_{12}. В частности, обобщенные пондеромоторные силы взаимодействия этих токов θ_i, согласно уравнению (50.6), равны взятым с обратным знаком производным от U_{12} по соответствующим обобщенным координатам q_i. Так как, согласно (50.5), при определении работы этих сил по изменению величины U_{12}, *силу*

[1]) При перемене направления одного из токов (например J_1) и при сохранении неизменным направления другого тока знак коэффициента L_{12} изменяется на обратный, ибо изменяется направление вектора $d\mathbf{s}_1$.

токов J_1 и J_2 *нужно считать постоянной*, то [ср. уравнения (50.5) и (50.4)]

$$\delta A = -(\delta U_{12})_J = \frac{1}{c^2} J_1 J_2 \delta L_{12} \tag{51.8}$$

и

$$\theta = -\frac{(\partial U_{12})_J}{\partial q_i} = \frac{1}{c^2} J_1 J_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial q_i}. \tag{51.9}$$

4. Из приведенных формул явствует, между прочим, что механическое взаимодействие *замкнутых токов* (в отличие от взаимодействия элементов тока, — см. § 43) удовлетворяет принципу *равенства действия и противодействия*, ибо силы, испытываемые каждым из взаимодействующих токов, определяются производными *от одной и той же* функции $U_{12} = U_{21}$, зависящей лишь от *относительного* расположения обоих контуров.

Поясним это утверждение на простейшем примере. Пусть $q = l$ — расстояние между центрами двух параллельных круговых токов L_1 и L_2. Силы F_1 и F_2, действующие соответственно на контуры L_1 и L_2 по направлению возрастания расстояния l, равны

$$F_1 = -\frac{\partial U_{21}}{\partial l},$$

$$F_2 = -\frac{\partial U_{12}}{\partial l} = F_1.$$

Если $-\frac{\partial U_{21}}{\partial l} > 0$, то силы F_1 и F_2 стремятся увеличить расстояние l, т. е. сводятся к взаимному отталкиванию контуров L_1 и L_2; в противном же случае они сводятся к притяжению этих контуров. Существенно, однако, что в обоих случаях силы F_1 и F_2 численно равны и противоположны по направлению, т. е. удовлетворяют третьему закону Ньютона.

Подобно этому если $q = \alpha$ равно углу между плоскостями двух контуров L_1 и L_2, то обобщенная сила $N = -\partial U/\partial\alpha$ представляет собой момент пары сил, стремящейся увеличить угол α. Как и в предшествующем случае, легко убедиться, что моменты пар N_1 и N_2, приложенных к L_1 и L_2, численно равны и противоположны по направлению.

5. Если токи J_1 и J_2 нельзя считать линейными, т. е. если поле одного из этих токов заметно изменяется на протяжении сечения другого тока, то взаимную потенциальную «энергию» токов U можно определить, исходя из уравнения (50.8). Если $\mathbf{j}_1$ есть плотность тока в первом токе объема V_1, а $\mathbf{j}_2$ — плотность тока во втором токе объема V_2, то, согласно (50.8), потенциальная функция U_{12} тока J_2 в поле тока J_1 будет равна

$$U_{12} = -\frac{1}{c}\int_{V_2} \mathbf{A}_1 \mathbf{j}_2 \, dV, \tag{51.10}$$

а потенциальная функция U_{21} тока J_1 в поле тока J_2 будет равна

$$U_{21} = -\frac{1}{c}\int\limits_{V_1} \mathbf{A}_2\mathbf{j}_1\, dV. \tag{51.11}$$

Внося в эти уравнения выражения (46.1) вектор-потенциалов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ токов $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{j}_2$:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{c}\int\limits_{V_1} \frac{\mathbf{j}_1\, dV}{R} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}_2 = \frac{1}{c}\int\limits_{V_2} \frac{\mathbf{j}_2\, dV}{R},$$

получаем

$$U_{12} = -\frac{1}{c^2}\int\limits_{V_1}\int\limits_{V_2} \frac{\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\, dV_1\, dV_2}{R} = U_{21}, \tag{51.12}$$

где R есть расстояние между элементом dV_1 объема V_1, плотность тока в котором равна $\mathbf{j}_1$, и элементом dV_2 объема V_2, плотность тока в котором равна $\mathbf{j}_2$.

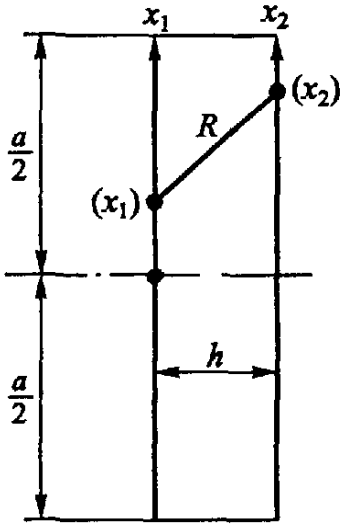

Рис. 52

Пример. Два одинаковых контура L_1 и L_2 имеют форму квадратов со стороной a Стороны обоих квадратов параллельны друг другу, а центры квадратов лежат на расстоянии d друг от друга на прямой, перпендикулярной их плоскостям. Определить коэффициент взаимной индукции L_{12} этих квадратов и силу $\mathbf{F}$, с которой притягиваются контуры, если по ним текут одинаково направленные токи J_1 и J_2.

В двойном интеграле формулы (51 3)

$$L_{12} = \oint\limits_{L_1}\oint\limits_{L_2} \frac{d\mathbf{s}_1\, d\mathbf{s}_2}{R},$$

все члены, относящиеся к взаимно перпендикулярным парам элементов $d\mathbf{s}_1$ и $d\mathbf{s}_2$, равны нулю Поэтому в рассматриваемом случае выражение для L_{12} сводится к сумме интегралов, относящихся к парам параллельных сторон квадратов L_1 и L_2.

Для двух параллельных прямых длиной a, находящихся на расстоянии h друг от друга (рис. 52), имеем

$$L(a, h) = \iint \frac{d\mathbf{s}_1\, d\mathbf{s}_2}{R} = \int\limits_{-a/2}^{+a/2}\int\limits_{-a/2}^{+a/2} \frac{dx_1\, dx_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + h^2}} =$$

$$= \int\limits_{-a/2}^{+a/2} \left[\lg\left\{x_1 - x_2 + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + h^2}\right\}\right]_{x_1=-a/2}^{x_1=a/2} dx_2,$$

где x_1 и x_2 суть текущие координаты точек обоих отрезков, отсчитываемые от их центров Интегрирование по частям каждого из членов разности,

получаемой после подстановки вместо x_1 его значений $\pm a/2$, дает

$$\int_{-a/2}^{+a/2} \lg\left\{\pm\frac{a}{2} - x_2 + \sqrt{\left(\pm\frac{a}{2} - x_2\right)^2 + h^2}\right\} dx_2 =$$

$$= \left[x_2 \lg\left\{\pm\frac{a}{2} - x_2 + \sqrt{\left(\pm\frac{a}{2} - x_2\right)^2 + h^2}\right\}\right]_{x_2=-a/2}^{x_2=a/2} +$$

$$+ \left[\sqrt{\left(\pm\frac{a}{2} - x_2\right)^2 + h^2}\right]_{x_1=-a/2}^{x_1=a/2} \pm$$

$$\pm \frac{a}{2}\left[\lg\left\{x_2 \pm \frac{a}{2} + \sqrt{\left(x_2 \mp \frac{a}{2}\right)^2 + h^2}\right\}\right]_{x_2=-a/2}^{x_2=a/2}$$

Подставляя для x_2 значения $\pm a/2$, получим для $L(a, h)$ всего 3 4 = 12 членов, которые после сокращения и приведения сведутся к трем:

$$L(a, h) = 2h - 2\sqrt{a^2 + h^2} + a \lg \frac{\sqrt{a^2 + h^2} + a}{\sqrt{a^2 + h^2} - a} =$$

$$= 2h - 2\sqrt{a^2 + h^2} + 2a \lg \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}.$$

Комбинируя попарно параллельные стороны квадратов L_1 и L_2, получим четыре пары отрезков, расстояние h между которыми равно d, и другие четыре пары, для которых $h = \sqrt{a^2 + d^2}$; первые четыре пары обтекаются параллельными, а вторые четыре противоположно направленными токами Таким образом, коэффициент взаимной индукции этих квадратов равен

$$L_{12} = 4L(a, d) - 4l(a, \sqrt{a^2 + d^2})$$

или

$$L_{12} = 8\left(d - 2\sqrt{a^2 + d^2} + \sqrt{2a^2 + d^2} + \right.$$

$$\left. + a \lg \frac{a + \sqrt{a^2 + d^2}}{d} - a \lg \frac{a + \sqrt{2a^2 + d^2}}{\sqrt{a^2 + d^2}}\right)$$

Чтобы определить силу F притяжения между квадратами, достаточно воспользоваться формулой (51.9), положив в ней обобщенную координату q, равной $-d$, ибо сила F действует в направлении, обратном координате d, т. е. стремится уменьшить расстояние между квадратами d. Стало быть,

$$F = -\frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial d} = -\frac{1}{c^2} J_1 J_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial d}.$$

Выполнив дифференцирование, мы после некоторых алгебраических преобразований получим

$$F = \frac{8}{c^2} J_1 J_2 \left(\frac{a^2 + 2d^2}{d\sqrt{a^2 + d^2}} - \frac{d\sqrt{2a^2 + d^2}}{a^2 + d^2} - 1\right). \qquad (51\ 13)$$

Дальнейшие примеры на вычисление взаимной индукции, а также коэффициента самоиндукции будут приведены в § 81.

§ 52. Коэффициент самоиндукции. Полная потенциальная функция системы токов

1. Перейдем теперь к рассмотрению пондеромоторных сил взаимодействия элементов одного и того же тока (например тока J_1) и постараемся определить потенциальную функцию U_{11} этих сил, которую с соответствующими оговорками можно назвать собственной потенциальной «энергией» J_1.

Конечно, рассматривая взаимодействие смежных элементов тока, мы уже не можем считать этот ток линейным и должны исходить не из формулы (50.7), а из формулы (50.8). Снабдив для определенности в этой формуле $\mathbf{A}$ и $\mathbf{j}$ индексом 1, получим

$$U_{11} = -\frac{1}{2c}\int_{V_1} \mathbf{A}_1\mathbf{j}_1\, dV, \tag{52.1}$$

где перед интегралом, в отличие как от (50.8), так и от формул § 51, стоит фактор $c/2$, а не $1/c$. Появление фактора $1/2$ объясняется тем, что взаимодействие каждой пары элементов тока $\mathbf{j}_1\, dV$ и $\mathbf{j}'_1\, dV'$ дважды учитывается в интеграле (52.1): оно входит составной частью как в $\mathbf{A}_1\mathbf{j}_1\, dV$, так и в $\mathbf{A}'_1\mathbf{j}'_1\, dV'$, ибо значение $\mathbf{A}_1$ в элементе объема dV включает в себя поле элемента $\mathbf{j}'_1\, dV'$. Это обстоятельство непосредственно выявляется, если внести в (52.1) выражение (46 1) вектор-потенциала $\mathbf{A}_1$:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{c}\int_{V_1} \frac{\mathbf{j}'_1\, dV'}{R};$$

тогда уравнение (52.1) принимает вид

$$U_{11} = -\frac{1}{2c^2}\int\int_{V_1 V_1} \frac{\mathbf{j}_1\mathbf{j}'_1\, dV\, dV'}{R}, \tag{52.2}$$

где интегрирование как по dV, так и по dV' должно быть распространено на весь объем V_1 тока J_1, т. е., другими словами, должна быть взята сумма подынтегральных выражений для всех возможных попарных комбинаций элементов объема V_1. При этом, очевидно, две комбинации элементов dV и dV', отличающиеся только порядком сомножителей, все же должны считаться различными. R есть, конечно, расстояние между элементами dV и dV'.

2. Так как распределение тока по сечению проводника зависит только от геометрических и физических свойств этого проводника, а не от силы тока в нем, то плотность тока в каждом из элементов объема проводника пропорциональна J_1, т. е.

$$U_{11} = -\frac{1}{2c^2}\int\int_{V_1 V_1} \frac{\mathbf{j}_1\mathbf{j}'_1\, dV\, dV'}{R} = -\frac{1}{2c^2} L_{11} J_1^2, \tag{52.3}$$

где L_{11} есть так называемый *коэффициент самоиндукции* проводника, зависящий только от геометрической *конфигурации* проводника (если он однороден, в противном случае L_{11} зависит также от соотношения электропроводностей отдельных элементов объема проводника), *но не от силы тока в нем.*

Из этого уравнения вытекает следующее выражение для коэффициента самоиндукции проводника [1]):

$$L_{11} = \frac{1}{J_1^2} \int\int_{V_1 V_1} \frac{\mathbf{j}_1 \mathbf{j}_1' \, dV \, dV'}{R}. \tag{52.4}$$

Заметим, что совершенно аналогичным образом из (51.6) и (51.12) вытекает следующее выражение для коэффициента взаимной индукции двух объемных токов L_1 и J_2:

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1}{J_1 J_2} \int\int_{V_1 V_2} \frac{\mathbf{j}_1 \mathbf{j}_2 \, dV_1 \, dV_2}{R}, \tag{52.5}$$

которое переходит в (51.3), если эти токи можно считать линейными.

3. Собственную потенциальную «энергию» тока U_{11} можно было бы также определить, разбивая ток J_1 на совокупность бесконечно тонких нитей тока dJ_1, выражая потенциальную функцию каждой нити с помощью уравнения (50.4):

$$dU = -\frac{dJ_1}{c} \Phi,$$

где Φ означает магнитный поток, посылаемый всем током J_1 через контур данной нити, и, наконец, суммируя dU по всем нитям:

$$U_{11} = -\frac{1}{2c} \sum dJ_1 \Phi.$$

Перед знаком суммы нужно ввести множитель $1/2$ потому, что взаимодействие каждой пары нитей тока учитывается в сумме дважды.

Если через Φ_{11} обозначить *среднее* значение магнитного потока через отдельные нити тока, то последнее уравнение можно записать в форме, аналогичной уравнению (51.6):

$$U_{11} = -\frac{1}{2c} \Phi_{11} \sum dJ_1 = -\frac{J_1}{2c} \Phi_{11}. \tag{52.6}$$

[1]) Совершенно неправильно указание, встречающееся в некоторых курсах физики, что для определения коэффициента самоиндукции L_{11} контура L_1 достаточно в формуле (51.3) отождествить контур L_2 с контуром L_1, т. е что

$$L_{11} = \oint_{L_1} \oint_{L_1} \frac{d\mathbf{s}_1 \, d\mathbf{s}_2}{R}$$

Легко убедиться, что это выражение обращается в бесконечность, т е не имеет смысла

Величину Φ_{11} можно назвать (средним) магнитным потоком, посылаемым током J_1 через свой собственный контур; в сущности, правильнее сказать, что величина Φ_{11} *по определению* должна удовлетворять уравнению (52.6) и может быть определена из сравнения этого уравнения с (52.3):

$$\Phi_{11} = \frac{1}{c} J_1 L_{11}. \tag{52.7}$$

Это последнее соотношение вполне соответствует уравнению (51.4). Стало быть, можно сказать, что коэффициент L_{11} самоиндукции произвольного замкнутого проводника L_1 численно равен магнитному потоку Φ_{11}, посылаемому через контур этого проводника циркулирующим по нему током силы c:

$$\Phi_{11} = L_{11} \quad \text{при} \quad J_1 = c. \tag{52.8}$$

Однако при этом нужно помнить, что Φ_{11} есть *среднее* значение магнитного потока через контуры отдельных нитей, на которые может быть разложен ток J_1, и что как Φ_{11}, так и L_{11} существенно зависят от формы и *размеров сечения* проводника L_1. Для бесконечно же тонкого линейного контура величины Φ_{11} и L_{11} обращаются в бесконечность, т. е. теряют смысл.

4. Возвращаясь к случаю системы двух токов, заметим, что общая потенциальная «энергия» U этой системы равна, очевидно, сумме их взаимной «энергии» U_{12} $(= U_{21})$ и собственных потенциальных «энергий» U_{11} и U_{22} каждого из них:

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22} = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2\right). \tag{52.9}$$

Ввиду того, что $L_{12} = L_{21}$, можно также написать

$$U = -\frac{1}{2c^2}\left(L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + L_{21} J_2 J_1 + L_{22} J_2^2\right) = -\frac{1}{2c^2} \sum_{i,k} L_{ik} J_i J_k. \tag{52.10}$$

Последнее выражение останется применимым и к системе произвольного числа (например n) токов, если только распространить в нем суммирование на все возможные пары индексов i и k $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

5. Полную потенциальную функцию системы токов можно непосредственно выразить через плотность токов и вектор-потенциал поля токов. С этой целью предварительно представим выражения (51.10) и (51.11) в симметричной форме: ввиду равенства U_{12} и U_{21} [см. уравнение (51.12)] можно написать

$$U_{12} = \frac{1}{2}(U_{12} + U_{21}) = -\frac{1}{2c}\int_{V_2} \mathbf{A}_1 \mathbf{j}_2\, dV - \frac{1}{2c}\int_{V_1} \mathbf{A}_2 \mathbf{j}_1\, dV.$$

Приняв, далее, во внимание (52.1), получим

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22} = -\frac{1}{2c}\int\limits_{V_1} \mathbf{A}_1\mathbf{j}_1\,dV - \frac{1}{2c}\int\limits_{V_1} \mathbf{A}_2\mathbf{j}_1\,dV - \\ - \frac{1}{2c}\int\limits_{V_2} \mathbf{A}_1\mathbf{j}_2\,dV - \frac{1}{2c}\int\limits_{V_2} \mathbf{A}_2\mathbf{j}_2\,dV,$$

или, так как $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ есть вектор-потенциал результирующего поля обоих токов,

$$U = -\frac{1}{2c}\int\limits_{V_1} \mathbf{A}\mathbf{j}_1\,dV - \frac{1}{2c}\int\limits_{V_2} \mathbf{A}\mathbf{j}_2\,dV = -\frac{1}{2c}\int \mathbf{A}\mathbf{j}\,dV. \qquad (52.11)$$

Последний интеграл должен быть, очевидно, распространен по объему обоих токов J_1 и J_2. Если других токов в поле нет, то мы можем распространить интегрирование на объем всего поля, ибо вне токов $j = 0$ и соответствующие члены интеграла обращаются в нуль.

Как уже указывалось в связи с формулой (50.8), выражение потенциальной функции U можно при желании истолковать в том смысле, что каждый элемент объема тока обладает в магнитном поле потенциальной «энергией» $-\frac{1}{c}\mathbf{A}\mathbf{j}\,dV$.

§ 53. Магнитные силовые линии

1. Описание свойств магнитного поля, как и поля электрического, часто весьма облегчается введением в рассмотрение так называемых *силовых линий* этого поля. По определению, магнитными силовыми линиями называются линии, направление касательных к которым в каждой точке поля совпадает с направлением напряженности поля $\mathbf{H}$ в той же точке [1]. Дифференциальное уравнение этих линий, очевидно, будет иметь вид [ср. уравнение (10.3)]

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z}. \qquad (53.1)$$

Магнитные силовые линии, как и линии электрические, проводятся обычно с таким расчетом, чтобы в любом участке поля число линий, пересекающих перпендикулярную к ним площадку единичной поверхности, было по возможности пропорционально напряженности поля на этой площадке; однако, как увидим ниже, требование это далеко не всегда выполнимо.

[1]) Так как магнитное поле не обладает потенциалом, то магнитные силовые линии в отличие от линий электростатического поля не могут быть определены как ортогональные траектории поверхностей уровня.

2 Основываясь на уравнении (3.6)

$$\oint_S E_n\,dS = 4\pi \sum_i e_i,$$

мы пришли в § 10 к следующему выводу: электрические силовые линии могут начинаться или кончаться только в тех точках поля, в которых расположены электрические заряды [1]). Применяя же теорему Гаусса (17*) к потоку магнитного вектора, мы на основании уравнения (47.1) получим

$$\oint_S H_n\,dS = \int_V \operatorname{div}\mathbf{H}\,dV = 0. \tag{53.2}$$

Таким образом, в отличие от потока электрического вектора $\mathbf{E}$ поток магнитного вектора $\mathbf{H}$ через *произвольную* замкнутую поверхность всегда равен нулю. Это положение является математическим выражением того факта, что *магнитных зарядов*, подобных зарядам электрическим, *не существует*: *магнитное поле возбуждается не магнитными зарядами, а движением зарядов электрических* (т. е. токами). Основываясь на этом положении и на сравнении уравнения (53.2) с уравнением (3.6), нетрудно убедиться путем приведенных в § 10 рассуждений, что *магнитные силовые линии* ни в каких точках поля *не могут ни начинаться, ни кончаться*

3. Из этого обстоятельства обычно делается вывод, что магнитные силовые линии в отличие от линий электрических должны быть линиями замкнутыми либо идти из бесконечности в бесконечность.

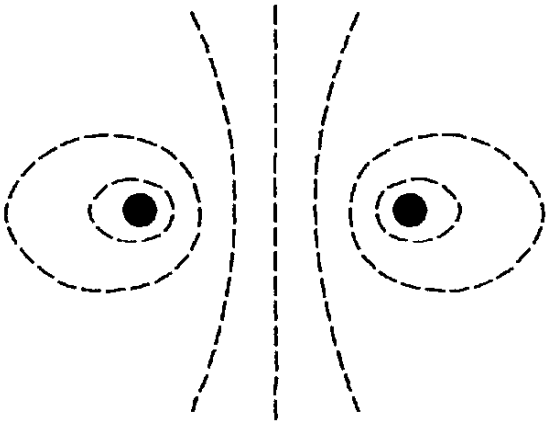

Рис. 53

Действительно, оба эти случая возможны. Согласно результатам решения задачи 25 в § 42 силовые линии в поле бесконечного прямолинейного тока представляют собой перпендикулярные току окружности с центром на оси тока. С другой стороны (см. задачу 26), направление магнитного вектора $\mathbf{H}$ в поле кругового тока во всех точках, лежащих на оси тока, совпадает с направлением этой оси. Таким образом, ось кругового тока совпадает с силовой линией, идущей из бесконечности в бесконечность; чертеж, приведенный на рис. 53, представляет собой разрез кругового тока меридиональной плоскостью (т. е. плоскостью, перпендикуляр-

[1]) См , впрочем, оговорку о точках неопределенности в примечании к с. 55

ной плоскости тока и проходящей через его центр), на котором штриховыми линиями изображены силовые линии этого тока

Возможен, однако, и третий случай, на который не всегда обращается внимание, а именно: силовая линия может не иметь ни начала, ни конца и вместе с тем не быть замкнутой и не идти из бесконечности в бесконечность. Этот случай имеет место, если силовая линия заполняет собой некоторую поверхность и притом, пользуясь математическим термином, заполняет ее всюду плотно. Проще всего пояснить это на конкретном примере.

4. Рассмотрим поле двух токов — кругового плоского тока J_1 и бесконечного прямолинейного тока J_2, идущего по оси тока J_1 (рис. 54). Если бы существовал один лишь ток J_1, то силовые линии поля $\mathbf{H}_1$ этого тока лежали бы в меридиональных плоскостях и имели бы вид, изображенный на предыдущем рисунке. Рассмотрим одну из этих линий, изображенную на рис. 54 штриховой линией. Совокупность всех подобных ей линий, которые могут быть получены вращением меридиональной плоскости вокруг оси J_2, образует собой поверхность S некоторого кольца

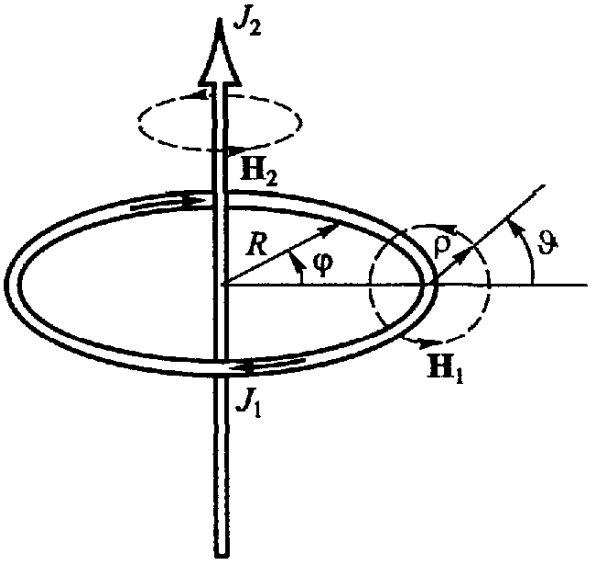

Рис 54

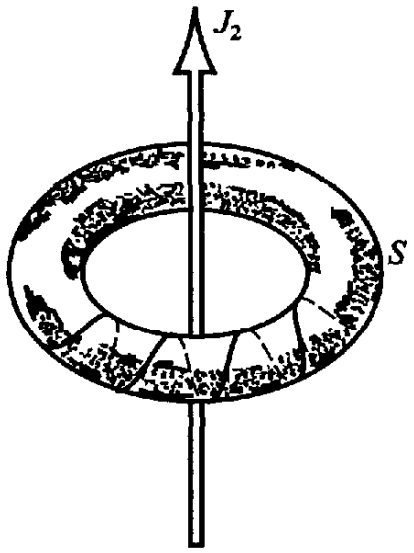

Рис 55

или тора (рис. 55) [1]. Силовые же линии поля $\mathbf{H}_2$ прямолинейного тока J_2 представляют собой концентрические окружности. Стало быть, в каждой точке поверхности S как $\mathbf{H}_1$, так и $\mathbf{H}_2$ касательны к этой поверхности; следовательно, и вектор напряженности результирующего поля $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ тоже касателен к ней. Это значит, что каждая силовая линия поля $\mathbf{H}$, проходящая через одну какую-нибудь точку поверхности S, должна лежать на этой поверхности *всеми* своими точками. Линия эта, очевидно, будет представлять собой *винтовую* линию на поверх-

[1]) Сечение этого тора плоскостью, проходящей через ток J_2, не является круговым

ности тора S (рис. 55). Ход этой винтовой линии будет зависеть от соотношения сил токов J_1 и J_2 и от положения и формы поверхности S. Очевидно, что лишь при некотором определенном подборе этих условий винтовая линия эта будет замыкаться; вообще же говоря, при продолжении линии новые витки ее будут ложиться *между* прежними витками. При неограниченном продолжении линии она подойдет как угодно близко к любой раз пройденной точке, но никогда вторично в нее не вернется. А это и значит, что, оставаясь незамкнутой, линия эта всюду плотно заполнит поверхность тора S [1]).

5. Чтобы строго доказать возможность существования незамкнутых силовых линий, введем на поверхности тора S ортогональные криволинейные координаты φ (азимут меридиональной плоскости) и ϑ (полярный угол в меридиональной плоскости с вершиной, расположенной на пересечении этой плоскости с осью кольца, — рис. 54).

Напряженность полей $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ на поверхности тора является функцией одного лишь угла ϑ, причем вектор $\mathbf{H}_1$ направлен по направлению возрастания (или убывания) этого угла, а вектор $\mathbf{H}_2$ — по направлению возрастания (или убывания) угла φ. Пусть $\rho(\vartheta)$ есть расстояние данной точки поверхности S от центральной линии тора, а $R(\vartheta)$ — расстояние ее от вертикальной оси тока J_2. Как нетрудно убедиться, элемент длины линии, лежащей на S, выразится формулой

$$ds^2 = r^2(\vartheta)\,d\vartheta^2 + R^2(\vartheta)\,d\varphi^2, \quad \text{где} \quad r^2(\vartheta) = \rho^2(\vartheta) + \left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2.$$

Соответственно этому дифференциальное уравнение линий сил [ср. уравнение (53.1)] на поверхности S примет вид

$$\frac{r(\vartheta)\,d\vartheta}{H_1(\vartheta)} = \frac{R(\vartheta)\,d\varphi}{H_2(\vartheta)}.$$

Приняв во внимание, что H_1 и H_2 пропорциональны силам токов J_1 и J_2, и интегрируя, получим

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{H_2(\vartheta)}{H_1(\vartheta)}\,\frac{r(\vartheta)}{R(\vartheta)}\,d\vartheta = \frac{J_2}{J_1}\{F(\vartheta) - F(\vartheta_0)\},$$

где $F(\vartheta)$ есть некоторая функция угла ϑ, не зависящая от J_1 и J_2.

Чтобы линия была замкнутой, т. е. чтобы она возвращалась в начальную точку, необходимо, чтобы некоторому *целому* числу n оборотов линии вокруг тора соответствовало *целое* же число m оборотов ее вокруг вертикальной оси. Иными словами, необходимо, чтобы можно было найти два таких целых числа n и m, чтобы возрастанию угла ϑ на $2\pi n$ соответствовало возрастание угла φ на $2\pi m$:

$$\varphi - \varphi_0 = 2\pi m = \frac{J_2}{J_1}\{F(2\pi n + \vartheta_0) - F(\vartheta_0)\}.$$

Примем теперь во внимание, что $F(\vartheta)$ представляет собой интеграл периодической функции угла ϑ с периодом 2π. Как известно, интеграл перио-

[1]) Указанное свойство поверхностей магнитных линий положено в основу системы удержания и нагрева термоядерной плазмы ТОКАМАК (ТОроидальная КАмера с МАгнитными Катушками). См. *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. — М . Наука, 1976.

дической функции в общем случае является суммой функции периодической и функции линейной [1]). Значит,

$$F(\vartheta) = K\vartheta + \Phi(\vartheta),$$

где K есть некоторая постоянная, $\Phi(\vartheta)$ есть функция с периодом 2π. Стало быть,

$$F(2\pi n + \vartheta) = K \cdot 2\pi n + K\vartheta + \Phi(\vartheta).$$

Внося это в предыдущее уравнение, получим условие замкнутости силовых линий на поверхности тора S:

$$m = \frac{J_2}{J_1} Kn.$$

Здесь K есть величина, от J_1 и J_2 не зависящая. Очевидно, что два *целых* числа n и m, удовлетворяющих этому условию, могут быть найдены лишь в том случае, если величина $\frac{J_2}{J_1} K$ является числом *рациональным* (целым или дробным); это будет иметь место лишь при определенном соотношении между силами токов J_1 и J_2. Вообще говоря, $\frac{J_2}{J_1} K$ будет величиной иррациональной и, стало быть, силовые линии на рассматриваемой поверхности тора S будут незамкнутыми. Однако и в этом случае всегда можно подобрать целое число n так, чтобы $\frac{J_2}{J_1} Kn$ как угодно мало отличалось от некоторого целого числа m. Это значит, что незамкнутая силовая линия после достаточного числа оборотов как угодно близко подойдет к любой, раз пройденной точке поля. Аналогичным путем можно показать, что линия эта после достаточного числа оборотов как угодно близко подойдет к любой наперед заданной точке поверхности S, а это значит по определению, что она всюду плотно заполняет эту поверхность.

6. Существование незамкнутых магнитных силовых линий, всюду плотно заполняющих некоторую поверхность S, делает, очевидно, не возможным точное графическое изображение поля с помощью этих линий. В частности, далеко не всегда можно удовлетворить требованию, чтобы число линий, пересекающих перпендикулярную им единичную площадку, было пропорционально напряженности поля на этой площадке. Так, например, в только что рассмотренном случае одна и та же незамкнутая линия бесконечное число раз пересечет любую конечную площадку, пересекающую поверхность кольца S [2]).

---

[1]) Ибо в периодическую функцию может входить постоянный член, интеграл которого представляет собой линейную функцию независимого переменного.

[2]) Из этого явствует также условность понятия силовых *трубок*, т. е. нитей малого, но все же *конечного* сечения, поверхность которых образована силовыми линиями. В случае незамкнутости этих линий силовая трубка при достаточном продолжении должна бесконечное число раз *пересечь самое себя* (ибо сечение ее конечно, а силовые линии, образующие поверхность трубки, при достаточном продолжении сколько угодно раз как угодно близко подойдут к раз пройденным ими точкам).

Впрочем, при надлежащей осмотрительности пользование понятием силовых линий является хотя и приближенным, но все же удобным и наглядным способом описания магнитного поля.

7. Согласно уравнению (47.5), циркуляция вектора напряженности магнитного поля по кривой, не охватывающей токов, равна нулю, циркуляция же по кривой, охватывающей токи, равна умноженной на $4\pi/c$ сумме сил охватываемых токов (взятых с надлежащими знаками). Циркуляция вектора $\mathbf{H}$ по силовой линии не может равняться нулю (ввиду параллельности элемента длины силовой линии $d\mathbf{s}$ и вектора $\mathbf{H}$ величина $H_s\,ds$ существенно положительна). Следовательно, каждая *замкнутая магнитная силовая линия должна охватывать* хотя бы один из несущих ток проводников. Больше того, незамкнутые силовые линии, плотно заполняющие некоторую поверхность S (если только они не идут из бесконечности в бесконечность), также должны *обвиваться вокруг токов* Действительно, интеграл вектора $\mathbf{H}$ по почти замкнутому витку такой линии существенно положителен. Стало быть, циркуляция $\mathbf{H}$ по замкнутому контуру, получаемому из этого витка добавлением замыкающего его произвольно малого отрезка, отлична от нуля. Следовательно, контур этот должен пронизываться током.

§ 54. Топология [1]) вихревого (магнитного) поля. Условные перегородки

1. Чтобы разобраться в геометрических, или, вернее, топологических, свойствах магнитного поля, рассмотрим сначала тот случай, когда в поле имеется лишь один замкнутый проводник, обтекаемый током J. Вихрь магнитного поля $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ отличен от нуля лишь внутри обтекаемого током проводника. Поэтому пространство, занятое током, можно назвать вихревым пространством или ввиду замкнутости тока *вихревым кольцом.*

С чисто топологической точки зрения, все замкнутые линии или контуры (как совпадающие с магнитными силовыми линиями, так и не совпадающие с ними), если только они расположены *вне* вихревого пространства, делятся на два класса в зависимости от того, не охватывают или охватывают они вихревое кольцо. Если мы мысленно *выделим из поля вихревое пространство* или условимся считать его непроницаемым, то контуры разных классов не могут быть приведены в совпадение друг с другом путем непрерывной деформации без нарушения их целости. Любые же

[1]) Топология (analysis situs) — отрасль математики, изучающая свойства фигур и геометрических образов, остающиеся неизменными при непрерывной деформации этих фигур.

два контура, принадлежащие к одному и тому же классу, всегда могут быть путем *непрерывной* деформации приведены в совпадение.

Далее контуры первого класса путем непрерывной деформации могут быть стянуты к точке (т. е. бесконечно малой длине). Контуры же второго класса без пересечения вихревого пространства стянуты к точке быть не могут.

Пространство, в котором существуют замкнутые линии или контуры, не могущие быть стянутыми к точке, называется пространством *многосвязным*. Число существенно различных классов контуров определяет порядок связности пространства. Так, например, пространство, оставшееся после выделения из него вихревого кольца, есть пространство двусвязное (два существенно различных класса контуров); если же из пространства выделить два кольца (два замкнутых тока), которые, в частности, могут соприкасаться между собой (рис. 56), то оставшееся пространство будет трехсвязным, ибо в нем существуют три класса контуров, не сводимых друг к другу (abc, $ab'c'$, $ab'b''c''$ на рис. 56; контур же типа $b''c''c'$ может быть разложен на два контура типа $ab'c'$ и $ab'b''c''$) [1].

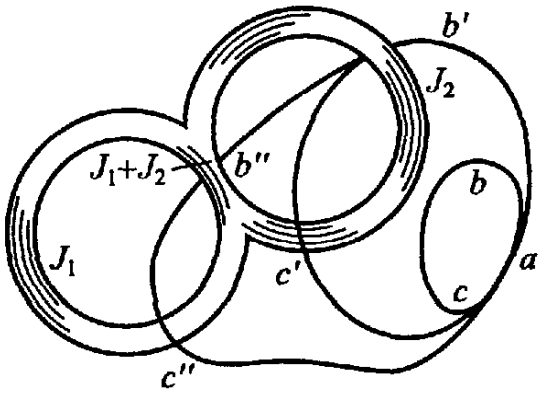

Рис. 56

Эти топологические свойства многосвязных пространств тесно связаны с физическими свойствами магнитного поля постоянных токов, ибо и с физической точки зрения контуры, проведенные в поле токов, тоже распадаются на классы в зависимости от значения циркуляции вектора **H** по этим контурам. Так, например, в случае одного замкнутого тока циркуляция **H** по контурам первого класса, могущим быть стянутыми к точке, равна нулю, циркуляция же по линиям второго класса, охватывающим ток, равна $\pm 4\pi J/c$ (знак зависит от выбора направления обхода контура); промежуточных же значений циркуляции нет. Точно так же в случае двух или нескольких токов легко убедиться, что подразделение линий на классы по физическому признаку (величина циркуляции) совпадает с подразделением их по признаку топо-

Рис. 57

[1]) Если контур сложен, например петлеобразен (рис 57), то его предварительно нужно разбить на два или несколько простых контуров, каждому из которых непрерывной деформацией можно сообщить форму окружности. Точно так же, если контур второго класса охватывает вихревое пространство не один, а несколько раз, то его можно разложить на ряд контуров, каждый из которых охватывает это пространство по одному разу.

логическому. В частности, все силовые линии магнитного поля (как замкнутые, так и незамкнутые) должны охватывать ток, т. е. вихревое пространство.

2. Однако связь между топологическими и физическими свойствами поля не ограничивается указанными соотношениями и может быть прослежена гораздо дальше.

Известно, что всякое многосвязное пространство путем внесения в него надлежащих перегородок может быть сделано односвязным. Так, например, если затянуть отверстия вихревого кольца непроницаемой перегородкой, то проведение контура второго класса, охватывающего это кольцо, станет невозможным и пространство станет односвязным. Точно так же трехсвязное пространство (рис. 56) станет односвязным, если затянуть непроницаемыми перегородками отверстия каждого из расположенных в нем колец.

Заметим, что форма и положение этих перегородок остаются при этом в значительной мере произвольными; существенно лишь, чтобы контур каждой перегородки опирался на поверхность соответствующего вихревого кольца.

Рассмотрим теперь физические свойства магнитного поля, ставшего односвязным благодаря мысленному внесению в него такого рода условных перегородок. Ротор вектора $\mathbf{H}$ во всех точках этого поля равен нулю (вихревое пространство по-прежнему считаем выделением из поля). Циркуляция вектора $\mathbf{H}$ по любому возможному в нем (т. е. не пересекающему условную перегородку) контуру равна нулю. Стало быть (см. § 48), в этом односвязном поле можно *однозначно* определить *скалярный* потенциал ψ магнитного поля, положив по аналогии с потенциалом φ поля электрического

$$\psi_1 - \psi_2 = \int_1^2 H_s\, ds \quad [\text{ср. } (8.2)], \tag{54.1}$$

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\psi \quad [\text{ср. } (10.2)]. \tag{54.2}$$

При этом, согласно уравнению (47.1), для всех точек рассматриваемого пространства

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = \nabla^2\psi = 0, \tag{54.3}$$

так что магнитное поле, ставшее потенциальным благодаря выделению вихревого пространства и внесению условных перегородок, оказывается лишенным объемных истоков.

Ввиду непрерывности вектора $\mathbf{H}$ потенциал ψ и его пространственные производные будут также непрерывны во всем поле, за исключением точек, прилегающих к условным перегородкам. Действительно, рассмотрим две бесконечно близкие точки P и P',

разделенные условной перегородкой S (рис. 58). Разность потенциалов этих точек, согласно уравнению (54.1), будет равна

$$\psi - \psi' = \int_P^{P'} H_s\, ds,$$

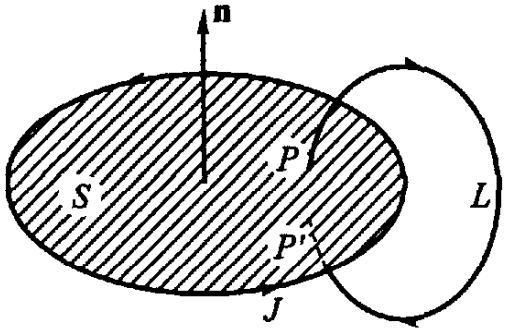

Рис. 58

причем путь интегрирования L не должен, конечно, пересекать перегородки. Так как точки P и P' бесконечно близки друг к другу, то путь $L\,(PP')$ лишь бесконечно мало отличается от замкнутой линии $PP'P$ и, стало быть, согласно уравнению (47.5),

$$\psi - \psi' = \oint_{PP'P} H_s\, ds = \frac{4\pi J}{c}. \qquad (54.4)$$

Таким образом, *условные перегородки являются поверхностями разрыва* сплошности магнитного потенциала, испытывающего на них скачок $4\pi J/c$. Этот скачок будет положительным ($\psi > \psi'$), если циркуляция по контуру $PP'P$ положительна, т. е., как явствует из рисунка, если бесконечно малый вектор $P'P$ образует с направлением тока J *правовинтовую* систему.

3. При изучении потенциального электростатического поля мы познакомились с поверхностями разрыва потенциала в кулоновом поле электрических зарядов и убедились, что физически эти поверхности разрыва соответствуют двойным слоям зарядов. По аналогии с полем электростатическим можно и магнитное поле токов, ставшее потенциальным благодаря выделению из него вихревого пространства и внесению условных перегородок, рассматривать как поле двойных слоев *фиктивных магнитных зарядов* m, взаимодействующих по закону Кулона:

$$F = k\frac{mm'}{R^2} \quad \text{[ср. уравнение (1.1)]}. \qquad (54.5)$$

Здесь F есть пондеромоторная сила взаимодействия магнитных зарядов m и m', находящихся на расстоянии R друг от друга, причем заряды одинакового знака отталкиваются, а противоположных знаков притягиваются, а k есть фактор пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения. Если мы приравняем этот фактор единице, положив

$$F = \frac{mm'}{R^2}, \qquad (54.6)$$

то тем самым мы введем *абсолютную единицу количества магнетизма*: единица магнетизма есть такое количество магнетизма, которое равное ей количество магнетизма, находящееся на

расстоянии 1 см, отталкивает с силой в одну дину. Далее, можно ввести в рассмотрение напряженность поля фиктивного магнитного заряда:

$$H = \frac{m}{R^2}, \tag{54.7}$$

как силу, действующую на пробный положительный магнитный заряд, равный единице, и т. д., в полной аналогии с полем электростатическим.

4. Однако существенное отличие поля фиктивных магнитных зарядов от электростатического заключается в том, что, согласно уравнению (54.3), поле это лишено объемных (а вместе с тем и точечных) источников и что все магнитные заряды располагаются *двойными слоями* на поверхностях разрыва магнитного потенциала ψ, совпадающих с введенными выше условными перегородками. Таким образом, магнитные заряды противоположных знаков оказываются *неотделимыми друг от друга*, и можно считать, что элементарные магнитные заряды попарно связаны в твердые *магнитные диполи* (элементарные магниты).

§ 55. Магнитные листки. Эквивалентность их токам

1. Итак, рассмотрение магнитного поля токов можно заменить рассмотрением эквивалентного поля фиктивных магнитных диполей, образующих двойные магнитные слои, или, как их принято называть, *магнитные листки*. Поверхность этих листков должна совпадать с введенными нами в § 54 условными перегородками; следовательно, контуры листков должны совпадать с контурами токов. Чтобы поле этих листков вне занимаемого токами вихревого пространства и вне точек, лежащих на самом листке (где напряженность поля листка становится бесконечной, ср. § 14), было тождественно с полем токов, достаточно [1], чтобы скачок магнитного потенциала на поверхности листка равнялся $4\pi J/c$ [уравнение (54.4)]. Скачок потенциала $\psi - \psi'$ на поверхности двойного слоя (листка), согласно уравнениям (14.1) и (14.5), равен

$$\psi - \psi' = 4\pi\sigma l = 4\pi\tau,$$

где τ — мощность листка (двойного слоя), l — его толщина, а σ — поверхностная плотность заряда каждого из его слоев. Следовательно, мощность эквивалентного току магнитного листка

[1]) Ибо потенциал поля двойного слоя однозначно (вплоть до несущественной аддитивной постоянной) определяется заданием положения слоя и скачка потенциала в каждой его точке [ср. (14.4) и (14.5)].

должна быть положена равной

$$\tau = \sigma_m l = \frac{J}{c}, \tag{55.1}$$

где под σ_m нужно понимать плотность фиктивных магнитных зарядов на поверхности листка. Таким образом, эквивалентный току листок должен быть *однородным*, т. е. мощность его τ должна быть постоянной по всему его протяжению. Легко, наконец, убедиться, что магнитные диполи, составляющие листок, должны быть расположены так, чтобы положительное направление всех этих диполей (от $-m$ к $+m$) составляло с направлением тока п р а в о в и н т о в у ю систему (рис. 59).

2. Потенциал ψ однородного двойного слоя, согласно уравнению (14.4), может быть представлен в следующей форме:

$$\psi = \tau\Omega, \tag{55.2}$$

где Ω есть телесный угол, под которым контур двойного слоя виден из точки наблюдения, обладающей потенциалом ψ, причем знак Ω считается совпадающим со знаком зарядов той стороны слоя, которая видна из точки наблюдения.

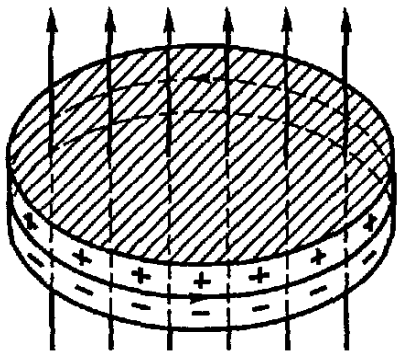

Рис. 59

Таким образом, как и при проведении условных перегородок, мы вновь убеждаемся, что существенное значение имеет лишь положение контура листка, который должен совпадать с контуром тока; во всех же остальных отношениях форма и положение листка остаются произвольными. В этой произвольности формы магнитного листка с особенной отчетливостью проявляется условность замены тока эквивалентным листком: меняя форму листка, мы по нашему произволу можем заставить его проходить через любую точку пространства и тем «создать» в этой точке скачок магнитного потенциала. Возможно это, конечно, лишь потому, что само понятие потенциала магнитного поля не имеет, в сущности, реального физического смысла и может быть однозначно определено лишь *после* внесения в поле токов условных перегородок (листков). Если же мы, не внося этих перегородок (листков), тем не менее захотим определить магнитный потенциал с помощью соотношения (54.1), то потенциал этот окажется *многозначной* функцией точки.

Действительно, припишем некоторой точке P потенциал ψ_0. Будем затем удаляться от P по некоторой линии L, определяя потенциал точек этой линии с помощью соотношения (54.1). Пусть линия L будет замкнутой, так что, двигаясь по ней все время в одном и том же направлении, мы вновь вернемся к исходной точке P. Приращение потенциала при полном обходе контура L, согласно уравнению (54.1), будет равно циркуляции вектора $\mathbf{H}$

по L, т. е., согласно уравнению (47.5), будет равно $\pm 4\pi J/c$, если контур L один раз охватывает ток J, и $\pm(4\pi J/c)\,n$, если он охватывает его n раз. Таким образом, вернувшись в исходную точку P, мы «найдем» в ней (т. е. должны будем приписать ей) потенциал

$$\psi = \psi_0 \pm \frac{4\pi J}{c}\, n, \tag{55.3}$$

вообще говоря (при $n \neq 0$), отличный от прежнего потенциала ψ_0 и зависящий от значения n, т. е. от положения и формы контура L. А это и значит, что магнитный потенциал есть *многозначная* функция точки и что сделать эту функцию однозначной можно лишь искусственно, путем внесения в многосвязное поле токов условных перегородок (магнитных листков).

3. Эквивалентность магнитного поля листков и линейных токов в отличие от избранного нами способа доказательства может быть установлена также путем непосредственного вычисления.

Сравним поле замкнутого тока силы J с контуром L и поле магнитного листка мощности $\tau = J/c$ с поверхностью S, опирающейся на контур L. Составляющая напряженности поля этого листка по какому-либо направлению $\mathbf{m}$, согласно уравнениям (54.2) и (55.2), будет равна

$$H_m = -\operatorname{grad}_m \psi = -\tau \frac{\partial \Omega}{\partial m} = -\frac{J}{c}\frac{\partial \Omega}{\partial m}.$$

Здесь $\dfrac{\partial \Omega}{\partial m}$ есть отношение изменения $d\Omega$, испытываемого телесным углом Ω при перемещении точки наблюдения P на отрезок $d\mathbf{m}$, к длине этого отрезка dm. Это изменение $d\Omega$ равно, очевидно, тому изменению, которое испытывает угол Ω, если P остается неподвижной, а контур L перемещается в *противоположную сторону на отрезок* $-d\mathbf{m}$. *При этом перемещении каждый* элемент длины $d\mathbf{s}$ контура L описывает площадку $d\mathbf{S} = [-d\mathbf{m}\, d\mathbf{s}]$, которая будет видна из точки P под углом [ср. уравнение (3.2)]:

$$d\omega = \frac{\mathbf{R}\, d\mathbf{S}}{R^3} = \frac{[-d\mathbf{m}\, d\mathbf{s}]\mathbf{R}}{R^3}.$$

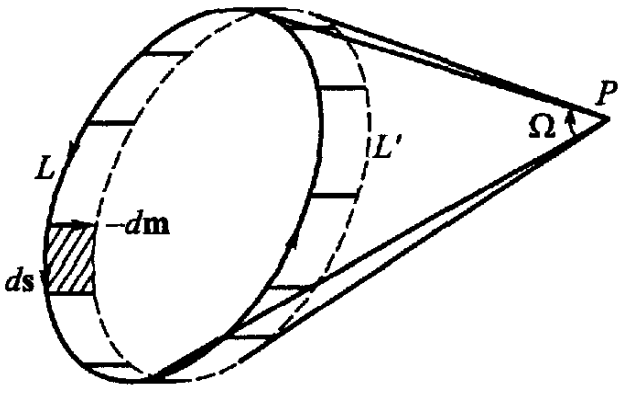

Рис. 60

Из рассмотрения рис. 60 можно убедиться, что выбор порядка сомножителей $-d\mathbf{m}$ и $d\mathbf{s}$ в выражении для $d\mathbf{S}$ сделан правильно, т е. что угол $d\omega$ будет положительным, если из P видна положительная сторона элемента dS магнитного листка, заключенного между исходным и смещенным контурами L и L', и отрицательным в обратном случае (напомним, что $\mathbf{R}$ совпадает с направлением от dS к P).

Применив известные правила преобразования векторной алгебры, получим

$$d\omega = \frac{-\,d\mathbf{m}\,[d\mathbf{s}\mathbf{R}]}{R^3} = \frac{-\,dm\,[d\mathbf{s}\mathbf{R}]_m}{R^3}.$$

Полное изменение телесного угла, под которым виден весь контур L, равно

$$d\Omega = \int d\omega = -dm \oint_L \frac{[d\mathbf{s}\mathbf{R}]_m}{R^3};$$

стало быть,

$$H_m = -\frac{J}{c}\frac{d\Omega}{dm} = \frac{J}{c}\oint \frac{[d\mathbf{s}\mathbf{R}]_m}{R^3}.$$

Так как это уравнение справедливо при любом выборе направления $\mathbf{m}$, то вектор напряженности поля магнитного листка должен быть равен

$$\mathbf{H} = \frac{J}{c}\oint \frac{[d\mathbf{s}\mathbf{R}]}{R^3},$$

т. е. должен совпадать с напряженностью поля линейного тока силы J [см. уравнение (42.4)], что и требовалось доказать.

4. Отметим в заключение еще раз, что все вышеизложенное относится лишь к полю безвихревого пространства (т. е. вне токов), внутри же этого пространства понятие магнитного потенциала теряет всякий смысл. Далее, эквивалентность токов и магнитных листков имеет место, в сущности, лишь в случае линейных токов, т. е. токов, расстояние которых от рассматриваемых точек поля велико по сравнению с сечением тока. В противном случае поле тока зависит от распределения тока по сечению вихревого кольца (т. е. несущего ток проводника), тогда как поле листка зависит лишь от положения его линейного контура. Правда, ток конечного сечения всегда может быть разложен на совокупность бесконечно тонких нитей тока, каждая из которых может быть заменена эквивалентным листком бесконечно малой силы, однако прибегать к столь сложным построениям не представляется целесообразным.

5. Нам остается еще показать, что замена линейных токов эквивалентными магнитными листками допустима не только при определении поля токов, но и при определении *пондеромоторных сил*, действующих на токи. Разумеется, замена тока эквивалентным листком допустима лишь при определении сил, *испытываемых токами во внешнем* магнитном *поле*, но не при определении взаимодействия элементов одного и того же тока.

Рассмотрим линейный ток силы J и контура L, находящийся во внешнем магнитном поле напряженности $\mathbf{H}$. Согласно уравнениям (50.1) и (50.4) потенциальная функция U тока J в этом поле будет равна

$$U = -\frac{J}{c}\Phi = -\frac{J}{c}\int H_n\, dS,$$

где S есть некоторая поверхность, опирающаяся на контур L, но в остальных отношениях остающаяся произвольной. Предположим, что поле $\mathbf{H}$ возбуждается токами, не пересекающими эту поверхность S. В этом случае, согласно результатам предшествующего параграфа, поле $\mathbf{H}$ на всем протяжении поверхности S можно рассматривать как поле потенциальное, обладающее некоторым магнитным потенциалом ψ:

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\psi.$$

Заменим теперь ток J эквивалентным магнитным листком, совпадающим с поверхностью S. Потенциальная энергия магнитного заряда dm элемента поверхности листка dS ($dm = \pm\sigma_m\, dS$) во внешнем поле $\mathbf{H}$, по аналогии с полем электростатическим, определяется выражением

$$\psi\, dm = \pm\psi\sigma_m\, dS,$$

общая же потенциальная энергия всех зарядов листка будет равна

$$U_л = \int (\sigma_m\psi_+ - \sigma_m\psi_-)\, dS,$$

где ψ_- и ψ_+ — соответственно значения потенциала внешнего поля на отрицательной и положительной поверхностях магнитного слоя (магнитного листка), т. е. значения ψ в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии толщины листка l. Стало быть,

$$\psi_+ - \psi_- = \mathbf{l}\,\mathrm{grad}\,\psi = -H_n l,$$

где $\mathbf{n}$ есть направление положительной нормали к листку, направленной от отрицательной его стороны к положительной. Следовательно,

$$U_л = -\int H_n\sigma_m l\, dS = -\int H_n\tau\, dS, \tag{55.4}$$

или ввиду уравнения (55.1)

$$U_л = -\frac{1}{c}\, J \int H_n\, dS. \tag{55.5}$$

Таким образом, потенциальная энергия $U_л$ магнитного листка во внешнем магнитном поле $\mathbf{H}$ действительно равна потенциальной функции U эквивалентного листку тока J. Следовательно, пондеромоторные силы, действующие в этом поле на ток, равны силам, действующим на эквивалентный току магнитный листок, что и требовалось доказать.

П р и м е р. *Замена соленоида магнитом.* Предположим, что ток J циркулирует по цилиндрическому соленоиду (§ 49, с. 226), на единицу длины которого приходится n витков проводника. Если ход винтовой линии достаточно мал, то каждый виток соленоида можно приближенно заменить нанизанным на цилиндр *замкнутым* кольцеобразным током той же силы J. Заменим эти токи плоскими магнитными листками мощности

$$\tau = \sigma_m l = \frac{J}{c}.$$

Если расстояние $1/n$ между смежными витками соленоида достаточно мало по сравнению с расстоянием рассматриваемых точек поля от соленоида, то приближенно можно считать, что ток распределен по поверхности цилиндра равномерно и непрерывно.

Соответственно этому «бесконечно малую» толщину магнитного листка l можно положить равной $1/n$. В этом случае смежные листки будут соприкасаться своими противоположно заряженными поверхностями. Поэтому заряды их будут взаимно нейтрализоваться, за исключением лишь зарядов внешних поверхностей двух крайних листков, совпадающих с основаниями цилиндрического соленоида; основания эти будут равномерно покрыты магнитными зарядами противоположных знаков плотности

$$\sigma_m = \frac{\tau}{l} = n\tau = \frac{nJ}{c}. \tag{55.6}$$

Следовательно, поле соленоида приближенно совпадает с полем цилиндрического магнита той же длины и того же сечения, основания которого равномерно покрыты магнитными зарядами указанной плотности. Как легко убедиться, направление момента этого магнита (от отрицательного, или южного, полюса к положительному, или северному) должно составлять *правовинтовую* систему с направлением тока в соленоиде (рис. 61).

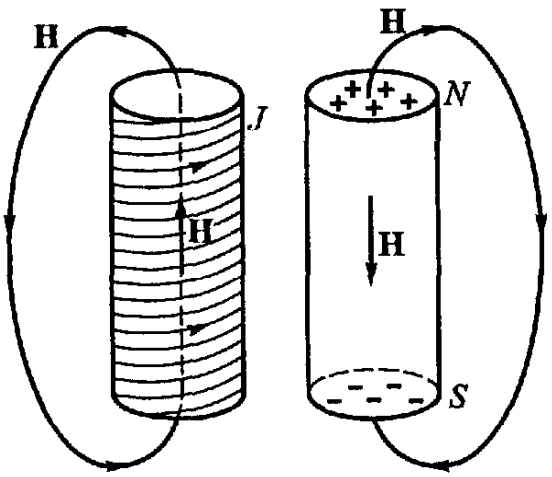

Рис. 61

Однако лишь *внешнее* поле такого магнита эквивалентно полю тока, *внутри* же магнита поле **H** направлено *противоположно* полю тока (от N к S) [1]. Этого и следовало ожидать, ибо мы заполнили всю внутренность соленоида магнитными листками *конечной* толщины. Между тем лишь внешнее поле листка эквивалентно полю тока, внутри же листка поле его направлено противоположно полю того тока, которому он «эквивалентен». В предыдущем нам не приходилось обращать на это внимание, потому что мы рассматривали лишь бесконечно тонкие листки, внутри которых само понятие поля теряет всякий смысл, ибо напряженность его **H** обращается в бесконечность (ср. § 14).

§ 56. Магнитный момент тока. Элементарные токи и магнитные диполи

1. В § 20 мы убедились, что электрическое поле нейтральной системы зарядов (т. е. системы зарядов, алгебраическая сумма которых равна нулю) на больших расстояниях от системы опре-

[1]) Этот вопрос мы рассмотрим еще с несколько иной точки зрения в гл. V.

деляется (с точностью до членов, более быстро спадающих с расстоянием) единственным параметром — электрическим моментом системы $\mathbf{p}$ — и что тем же параметром определяются и силы, испытываемые этой системой зарядов во внешнем электрическом поле. Аналогично этому и произвольный замкнутый ток при известных условиях характеризуется одним-единственным параметром $\mathbf{M}$, носящим название *магнитного момента тока.*

Будем называть *элементарным током* замкнутый ток, удовлетворяющий следующим требованиям: 1) размеры контура тока исчезающе малы по сравнению с его расстоянием до тех точек поля, в которых мы рассматриваем его поле, и 2) на всем протяжении замкнутого тока значения величин, характеризующих внешнее поле (точнее, значение напряженности этого поля $\mathbf{H}$ и значение пространственных производных этой напряженности $\mathbf{H}$), можно считать постоянными. Очевидно, что при определенных условиях любой замкнутый ток может рассматриваться как элементарный.

Согласно результатам предыдущего параграфа всякий постоянный ток эквивалентен магнитному листку как в активном (возбуждаемое им поле), так и в пассивном (испытываемые им силы) отношениях. Что же касается *элементарного тока*, то он *эквивалентен* простейшему магнитному листку — магнитному диполю.

Действительно, рассмотрим магнитный листок или магнитный двойной слой мощности $\tau = J/c$, эквивалентный данному току J. Каждая пара противоположных элементов dS двойного слоя, обладающих зарядом $dm = \pm\sigma_m\, dS$, представляет собой магнитный диполь момента [см. уравнение (55.1)]

$$\mathbf{l}\, dm = \mathbf{l}\sigma_m\, dS = \tau\, d\mathbf{S}$$

(вектор $d\mathbf{S}$ направлен по положительной оси $\mathbf{l}$ этого диполя). Если выполняются условия, при которых рассматриваемый ток может считаться элементарным, то как при определении поля, возбуждаемого эквивалентным току двойным слоем, так и при определении действующих на него сил можно пренебречь различием в положении отдельных элементов двойного слоя и заменить весь слой одним магнитным диполем момента

$$\mathbf{M} = \int \tau\, d\mathbf{S} = \frac{J}{c}\int d\mathbf{S}.$$

Обозначим через $\mathbf{S}$ *векторную величину площади* листка, т. е. векторную сумму элементов $d\mathbf{S}$ этой площади:

$$\mathbf{S} = \int d\mathbf{S}. \tag{56.1}$$

Так как эквивалентный току листок опирается на контур этого тока, то $\mathbf{S}$ есть не что иное, как векторная величина площади,

охватываемой током. На основании (56.1) предшествующее уравнение приобретает вид

$$\mathbf{M} = \frac{J}{c}\mathbf{S}. \tag{56.2}$$

Таким образом, элементарный ток эквивалентен магнитному диполю, момент которого, определяемый формулой (56.2), называется также *магнитным моментом тока.*

2. Заметим, что числовое значение $|\mathbf{S}|$ векторной величины $\mathbf{S}$ произвольной поверхности S, вообще говоря, меньше площади этой поверхности; лишь в случае *плоской* поверхности обе эти величины равны друг другу. В частности, векторная величина произвольной *замкнутой* поверхности тождественно равна нулю, в чем легко убедиться, рассматривая проекцию замкнутой поверхности на произвольную плоскость [1]). Отсюда следует, что векторные величины $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ двух произвольных поверхностей, опирающихся на один и тот же контур L, могут отличаться друг от друга только знаком (зависящим от выбора направлений внешних нормалей к ним). Действительно, совокупность двух таких поверхностей (при надлежащем выборе направлений нормалей) образует одну замкнутую поверхность, так что

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \oint d\mathbf{S} = 0. \tag{56.3}$$

3. Таким образом, магнитный момент тока [уравнение (56.2)] не зависит от произвольного выбора формы поверхности $\mathbf{S}$, опирающейся на контур L этого тока. Направление же нормали к этой поверхности $\mathbf{S}$, а стало быть, и направление магнитного момента тока $\mathbf{M}$, должно образовывать правовинтовую систему с направлением тока в контуре L. Действительно, нормаль к двойному слою, эквивалентному данному току, с одной стороны, образует правовинтовую систему с направлением тока (см. § 55, в частности рис. 59), а с другой стороны, согласно (56.2), определяет собой направление вектора $\mathbf{M}$.

4. По аналогии с (8.10) скалярный потенциал поля магнитного диполя, очевидно, равен

$$\psi = \frac{\mathbf{MR}}{R^3},$$

а напряженность этого поля

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{MR}}{R^3}\right) = \frac{3(\mathbf{MR})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{M}}{R^3} \tag{56.4}$$

[ср. формулу (10.4)].

[1]) Так, например, в случае шаровой поверхности проекции северного и южного полушарий на плоскость экватора численно равны друг другу, но противоположны по знаку.

По доказанному, то же значение будет иметь и напряженность тока момента $\mathbf{M}$ на расстояниях от этого тока, значительно превышающих его размеры.

Далее потенциальная энергия магнитного диполя во внешнем поле $\mathbf{H}$ по аналогии с (15.8) равна

$$U = -\mathbf{MH}, \tag{56.5}$$

а равнодействующая $\mathbf{F}$ и результирующий момент $\mathbf{N}$ приложенных к нему сил по аналогии с (18.8) и (18.11) равны

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla(\mathbf{MH}), \tag{56.6}$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{MH}]. \tag{56.7}$$

Ввиду равенства сил, действующих на элементарный ток и на магнитный диполь одинакового момента $\mathbf{M}$ [1], формулы эти применимы и к элементарному току.

5. Впрочем, последнее утверждение нуждается в известной оговорке.

Доказывая в § 55, что потенциальная энергия $U_л$ магнитного листка во внешнем поле $\mathbf{H}$ равна потенциальной функции эквивалентного листку тока, мы основывались на допущении, что внешнее поле $\mathbf{H}$ возбуждается токами, не пересекающими поверхности листка (т. е. не пересекающими контура эквивалентного листку тока). Только при этом условии можно рассматривать внешнее поле на протяжении листка как поле потенциальное, обладающее магнитным потенциалом ψ, и только при этом условии можно вообще говорить о потенциальной энергии магнитного листка во внешнем поле. Чтобы освободиться от этого ограничения на источники внешнего поля, мы должны независимо вычислить силы, действующие на магнитный листок и на ток. Начнем с последних.

Применимость уравнений (50.1) и (50.4)

$$U = -\frac{1}{c} J\Phi = -\frac{1}{c} J \int H_n \, dS = -\frac{1}{c} J \int \mathbf{H} \, d\mathbf{S},$$

определяющих потенциальную функцию тока, не связана упомянутым ограничением. В случае элементарного тока напряженность внешнего поля можно, по определению, считать постоянной на всем протяжении тока и вынести ее за знак интеграла. На основании (56.1) и (56.2) получаем

$$U = -\frac{1}{c} J\mathbf{H} \int d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} J\mathbf{HS} = -\mathbf{MH}.$$

Таким образом, формулы (56.5), а стало быть, и формулы (56.6) и (56.7) применимы к элементарному току без всяких дополнительных ограничений.

Иначе обстоит дело с магнитным диполем. В § 17 мы путем непосредственного подсчета сил, действующих на заряды электрического диполя в произвольном электрическом поле $\mathbf{E}$, нашли следующее выражение для результирующей этих сил [уравнение (17.5)]

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}\nabla \cdot \mathbf{E}.$$

---

[1]) Разумеется, это относится не к силам, испытываемым отдельными элементами тока, а к равнодействующей силе и к результирующему моменту всех этих сил. В этом смысле можно сказать, что магнитный диполь эквивалентен твердому элементарному току, т. е. току, текущему по твердому недеформирующемуся проводнику, ибо систему приложенных к твердому телу сил можно заменить их равнодействующей и результирующей парой сил.

Затем в § 18 мы показали, что

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla(\mathbf{pE}) - [\mathbf{p}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}].$$

Таким образом, только при условии $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$, т. е. только в потенциальном электрическом поле, испытываемая диполем сила выражается взятым с обратным знаком градиентом его потенциальной энергии $U = -\mathbf{pE}$ Соответственно этому сила, испытываемая магнитным диполем в произвольном внешнем поле $\mathbf{H}$, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla(\mathbf{MH}) - [\mathbf{M}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}]. \qquad (56.8)$$

Это выражение совпадает с (56.6) только при $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0$, т. е. только при условии, что в местах нахождения диполя плотность возбуждающих внешнее поле токов равна нулю [ср. уравнение (47.3)].

Таким образом, это последнее условие является также условием тождественности сил, действующих на элементарный ток и на эквивалентный ему магнитный диполь.

Это условие оказывается, однако, излишним для тождественности момента сил $\mathbf{N}$, действующих на ток и на диполь; тождественность эта всегда обеспечена, что явствует из сравнения формулы (56.7) с формулой (17.6), применимой к диполю в произвольном внешнем поле.

§ 57. Непосредственное определение поля элементарных токов и сил, ими испытываемых

1. В предыдущем параграфе мы определили поле элементарных токов и силы, испытываемые ими во внешнем поле, исходя из доказанной в § 55 эквивалентности замкнутых токов и магнитных листков.

Теперь же мы дадим непосредственный вывод этих выражений, не прибегая к представлению о фиктивных магнитных зарядах и характеризуя магнитное поле не скалярным потенциалом ψ, а векторным потенциалом $\mathbf{A}$. Такой способ вывода, во-первых, более последователен, во-вторых, он позволит нам рассмотреть не линейные, как в § 56, а объемные токи, замена которых магнитными листками если и не невозможна, то все же была бы чрезвычайно громоздкой.

Результаты этого параграфа понадобятся нам только в § 61, 66 и 98.

2. Рассмотрим вектор-потенциал $\mathbf{A}$ произвольной системы токов, циркулирующих в произвольном объеме V:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int_V \frac{\mathbf{j}\,dV}{R'},$$

где расстояние элемента тока $\mathbf{j}\,dV$ до точки наблюдения P, в которой определяется значение $\mathbf{A}$, мы обозначили через R'.

Выберем внутри рассматриваемой системы токов произвольную точку O, которую условно назовем центром токов. Пусть $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}$ суть соответственно расстояния точки наблюдения P и

элемента тока $\mathbf{j}\,dV$ от центра O, так что

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R} \quad \text{и} \quad R'^2 = R_0^2 - 2\mathbf{R}_0\mathbf{R} + R^2$$

(см. рис. 27, где $\mathbf{R}'_i$ и $\mathbf{R}_i$ соответствуют нашим теперешним $\mathbf{R}'$ и $\mathbf{R}$).

Если $R_0 \gg R$, т. е. если расстояние точки наблюдения P от системы токов значительно превышает размеры этой системы, то в разложении

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_0}\left(1 - \frac{2\mathbf{R}_0\mathbf{R}}{R_0^2} + \frac{R^2}{R_0^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{R_0} + \frac{\mathbf{R}_0\mathbf{R}}{R_0^3} + \ldots \qquad (57.1)$$

можно ограничиться первыми двумя выписанными членами. Внося это разложение в выражение для $\mathbf{A}$, получаем

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}\,dV + \frac{1}{cR_0^3}\int \mathbf{j}(\mathbf{R}_0\mathbf{R})\,dV. \qquad (57.2)$$

Легко убедиться, что [1])

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}_0\mathbf{R}) = \frac{1}{2}[[\mathbf{R}\mathbf{j}]\mathbf{R}_0] + \frac{1}{2}\{\mathbf{j}(\mathbf{R}\mathbf{R}_0) + \mathbf{R}(\mathbf{j}\mathbf{R}_0)\};$$

поэтому

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}\,dV + \frac{1}{2cR_0^3}\left[\int [\mathbf{R}\mathbf{j}]\,dV \cdot \mathbf{R}_0\right] + \frac{1}{2cR_0^3}\mathbf{K}, \qquad (57.3)$$

где мы вынесли за знак интеграла вектор $\mathbf{R}_0$, не зависящий от положения элемента интегрирования dV, и где мы обозначаем через $\mathbf{K}$ интеграл

$$\mathbf{K} = \int \{\mathbf{j}(\mathbf{R}\mathbf{R}_0) + \mathbf{R}(\mathbf{j}\mathbf{R}_0)\}\,dV.$$

Чтобы преобразовать этот интеграл, умножим его на произвольный, но постоянный вектор $\mathbf{a}$ и воспользуемся тем, что, согласно формулам векторного анализа (11*) и (43_2^*),

$$(\mathbf{a}\mathbf{j})(\mathbf{R}\mathbf{R}_0) + (\mathbf{a}\mathbf{R})(\mathbf{j}\mathbf{R}_0) = \mathbf{j}\,\mathrm{grad}\,\{(\mathbf{a}\mathbf{R})(\mathbf{R}\mathbf{R}_0\} =$$
$$= \mathrm{div}\,\{\mathbf{j}(\mathbf{a}\mathbf{R})(\mathbf{R}\mathbf{R}_0)\} - (\mathbf{a}\mathbf{R})(\mathbf{R}\mathbf{R}_0)\,\mathrm{div}\,\mathbf{j},$$

где при дифференцировании вектор $\mathbf{R}_0$ считается постоянным.

Так как мы рассматриваем постоянные токи, то, согласно (37.4), $\mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0$, и следовательно, на основании теоремы Гаусса (17*)

$$\mathbf{a}\mathbf{K} = \int_V \mathrm{div}\,\{\mathbf{j}(\mathbf{a}\mathbf{R})(\mathbf{R}\mathbf{R}_0)\}\,dV = \oint_S j_n(\mathbf{a}\mathbf{R})(\mathbf{R}\mathbf{R}_0)\,dS,$$

[1]) Это разложение соответствует разложению тензора $U_{ik} = j_i R_k$ на сумму симметричного и антисимметричного тензоров. $U_{ik} = (j_i R_k - j_i R_i)/2 + (j_i R_k + j_k R_i)/2$.

где поверхностный интеграл берется по поверхности S объема интегрирования V. Так как это равенство выполняется при любом выборе постоянного вектора $\mathbf{a}$, то из него следует, что

$$\mathbf{K} = \int j_n \mathbf{R}(\mathbf{RR}_0)\, dS.$$

Введем, наконец, обозначение

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c}\int_V [\mathbf{Rj}]\, dV. \tag{57.4}$$

Определяемый этим уравнением вектор $\mathbf{M}$ называется магнитным моментом токов, циркулирующих в объеме V, или просто магнитным моментом объема V [1]. Внеся в (57.3) выражения для $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$, получаем окончательно

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int_V \mathbf{j}\, dV + \frac{[\mathbf{MR}_0]}{R_0^3} + \frac{1}{2cR_0^3}\oint_S j_n \mathbf{R}(\mathbf{RR}_0)\, dS. \tag{57.5}$$

3. Отношение двух последних членов к первому члену правой части выражения (57.5) по порядку величины, вообще говоря, равно l/R_0, где l означает поперечный размер объема V. Поэтому на расстояниях R_0, больших по сравнению с l, на которых только и справедлива формула (57.5), последние два члена в этой формуле, вообще говоря, малы по сравнению с первым, так что приближенно можно ограничиться первым членом

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int_V \mathbf{j}\, dV,$$

смысл которого очевиден.

Если, однако,

$$\int_V \mathbf{j}\, dV = 0, \tag{57.6}$$

то значение $\mathbf{A}$ определяется двумя последними членами формулы (57.5). Так обстоит дело, в частности, в случае произвольной системы замкнутых токов, заключенных в объеме V, т. е. в том случае, если через поверхность S, ограничивающую объем V, никаких токов не протекает:

$$j_n = 0 \text{ на поверхности } S. \tag{57.7}$$

Докажем, что из условия (57.7) в случае постоянных токов действительно вытекает равенство (57.6). При условии (57.7) рассматриваемая система постоянных токов может быть разложена

[1] В конце этого параграфа мы покажем, что в случае линейных токов это определение магнитного момента тока совпадает с данным в § 56.

на совокупность замкнутых нитей тока, расположенных целиком внутри объема V. Интегрирование по объему каждой нити может быть, согласно (44.6), заменено интегрированием по ее длине:

$$\int \mathbf{j}\, dV \to J \oint d\mathbf{s}.$$

Последний же интеграл по замкнутому контуру нити, очевидно, равен нулю, откуда и следует справедливость (57.6).

При выполнении условия (57.7) обращается в нуль не только первый член формулы (57.5), но и ее последний член. Поэтому вектор-потенциал замкнутой системы токов на больших расстояниях от нее равен

$$\mathbf{A} = \frac{[\mathbf{MR}]}{R^3}. \tag{57.8}$$

Здесь мы отбросили у $\mathbf{R}_0$ индекс 0, так что в отличие от прежнего $\mathbf{R}$ означает расстояние точки наблюдения P от системы токов, характеризуемых ее моментом $\mathbf{M}$. При этом несущественно, от какой именно точки этой системы токов измеряется расстояние $\mathbf{R}$, ибо сама формула (57.8) получена нами в предположении, что расстояние точки наблюдения от системы токов велико по сравнению с размерами этой системы.

Итак, на этих расстояниях магнитное поле замкнутой системы токов определяется ее магнитным моментом $\mathbf{M}$, подобно тому как электрическое поле нейтральной системы зарядов определяется ее электрическим моментом $\mathbf{p}$.

Существенно, что значение магнитного момента $\mathbf{M}$ системы токов, удовлетворяющей условию (57.6), не зависит от выбора того условного центра системы O, от которого отсчитываются расстояния $\mathbf{R}$ в формуле (57 4). Действительно, если сместить центр системы из точки O на произвольный отрезок $\mathbf{a}$ в точку O', то все расстояния $\mathbf{R}$ от центра изменятся на $-\mathbf{a}$.

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R} - \mathbf{a}$$

Поэтому определяемый формулой (57.4) вектор $\mathbf{M}$ изменится на величину

$$\Delta\mathbf{M} = -\frac{1}{2c}\int [\mathbf{aj}]\, dV = -\frac{1}{2c}\left[\mathbf{a}\int \mathbf{j}\, dV\right]$$

(ибо постоянный вектор $\mathbf{a}$ можно вынести за знак интеграла), которая на основании (57.6) обращается в нуль.

4 Рассмотрим теперь результирующую силу $\mathbf{F}$, действующую во внешнем магнитном поле $\mathbf{H}$ на замкнутую систему токов, удовлетворяющую как условию (57.7), так и вытекающему из него равенству (57.6).

Согласно (44.4) слагающая по оси z этой силы $\mathbf{F}$ равна

$$F_z = \frac{1}{c}\int_V [\mathbf{jH}]_z\, dV = \frac{1}{c}\int_V (j_x H_y - j_y H_x)\, dV.$$

В *однородном* внешнем поле эта сила равна нулю, ибо постоянный вектор $\mathbf{H}$ можно вынести за знак интеграла, а интеграл $\int \mathbf{j}\, dV$, согласно (57.6), равен нулю.

Допустим, что поле $\mathbf{H}$ настолько медленно изменяется на протяжении рассматриваемой системы токов, что на всем ее протяжении можно ограничиться первыми членами разложения $\mathbf{H}$ по степеням расстояния от условного центра системы токов O:

$$H_x(x, y, z) = H_x(0, 0, 0) + x\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)_0$$

и аналогично для H_y и H_z. Здесь x, y, z суть слагающие расстояния $\mathbf{R}$ произвольной точки поля от центра O, а $\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)_0$ и т. д. — значения соответствующих производных в точке O; таким образом, как $H_x(0, 0, 0)$, так и $\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)_0$ и т. д. суть постоянные и от x, y, z не зависят. Внеся это разложение в выражение для F_z и воспользовавшись уравнением (57 6), получим

$$F_z = \frac{1}{c}\int\left\{j_x\left(x\frac{\partial H_y}{\partial x} + y\frac{\partial H_y}{\partial y} + z\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) - j_y\left(x\frac{\partial H_x}{\partial x} + y\frac{\partial H_x}{\partial y} + z\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)\right\} dV.$$

Докажем, что из условия (57.7) замкнутости токов вытекают уравнения

$$\int x j_x\, dV = \int y j_y\, dV = \int z j_z\, dV = 0, \quad \int x j_y\, dV = -\int y j_x\, dV = cM_z,$$

$$\int y j_z\, dV = -\int z j_y\, dV = cM_x, \quad \int z j_x\, dV = -\int x j_z\, dV = cM_y. \tag{57.9}$$

Согласно (6*) и (43_2^*),

$$x j_x = \frac{1}{2}\mathbf{j}\operatorname{grad} x^2 = \frac{1}{2}\operatorname{div}(\mathbf{j}x^2) - \frac{1}{2}x^2\operatorname{div}\mathbf{j}.$$

Так как в случае постоянных токов $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, то, воспользовавшись теоремой Гаусса (17*), получаем

$$\int x j_x\, dV = \frac{1}{2}\int \operatorname{div}(\mathbf{j}x^2)\, dV = \frac{1}{2}\oint j_n x^2\, dS.$$

На основании (57.7) последний интеграл обращается в нуль, что и требовалось доказать.

Далее, в тождестве

$$x j_y = \frac{1}{2}(x j_y - y j_x) + \frac{1}{2}(x j_y + y j_x)$$

последний член может быть представлен в виде

$$\frac{1}{2}(x j_y + y j_x) = \frac{1}{2}\mathbf{j}\operatorname{grad}(xy) = \frac{1}{2}\operatorname{div}(\mathbf{j}xy) - \frac{1}{2}xy\operatorname{div}\mathbf{j}$$

Так как $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, то

$$x j_y = \frac{1}{2}(x j_y - y j_x) + \frac{1}{2}\operatorname{div}(\mathbf{j}xy)$$

и, следовательно, на основании теоремы Гаусса

$$\int x j_y\, dV = \frac{1}{2}\int (x j_y - y j_x)\, dV + \frac{1}{2}\oint j_n xy\, dS.$$

Последний интеграл на основании (57.7) равен нулю, первый же интеграл справа, согласно (57.4), равен cM_z, так что

$$\int x j_y \, dV = cM_z.$$

Остальные равенства (57.9) получаются из доказанных надлежащей перестановкой осей координат x, y, z.

Воспользовавшись уравнениями (57.9), мы получаем следующее выражение для F_z:

$$F_z = -M_z \frac{\partial H_y}{\partial y} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial z} - M_z \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_x \frac{\partial H_x}{\partial z}.$$

Приняв во внимание, что, согласно (47.1),

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

получаем

$$F_z = M_x \frac{\partial H_x}{\partial z} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial z} + M_z \frac{\partial H_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{MH}),$$

ибо магнитный момент системы от координат точки поля не зависит, и поэтому $\mathbf{M}$ можно вынести за знак производной. Выражения для F_x и F_y будут совершенно аналогичны; записав их в векторной форме, получим окончательно

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{MH}), \tag{57.10}$$

что по своей форме полностью совпадает с (56.6).

Наконец, момент сил, приложенных к элементу тока $\mathbf{j}\,dV$, равен

$$\frac{1}{c} [\mathbf{R}[\mathbf{jH}]] \, dV = \frac{1}{c} \{\mathbf{j}(\mathbf{RH}) - \mathbf{H}(\mathbf{Rj})\} \, dV.$$

При интегрировании этого соотношения по объему системы токов мы пренебрежем изменениями $\mathbf{H}$ на протяжении этой системы, т. е. будем считать $\mathbf{H}$ постоянным вектором. Так как, согласно (57.9),

$$\int (\mathbf{jR}) \, dV = 0,$$

то

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{RH}) \, dV.$$

Этот интеграл отличается от второго интеграла в (57 2) только заменой $\mathbf{R}_0$ на $\mathbf{H}$ Поэтому из сравнения (57.2) с (57 8) получаем следующее выражение для магнитного момента сил, действующих в однородном поле на замкнутую систему токов:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2c} \int [[\mathbf{Rj}]\mathbf{H}] \, dV = [\mathbf{MH}], \tag{57.11}$$

что совпадает с (56.7)

5. Покажем теперь, что в случае *линейного* тока результаты этого параграфа полностью совпадают с результатами § 56.

Рассмотрим сначала выражение (57.4) для магнитного момента токов. Переходя к случаю линейных токов, его можно преобразовать с помощью формулы (44.6), в результате чего получим:

$$\mathbf{M} = \frac{J}{2c} \oint_L [\mathbf{R} \, d\mathbf{s}].$$

Входящий в это выражение интеграл имеет простое геометрическое значение.

Как явствует из рис. 62, произведение $[\mathbf{R}\,d\mathbf{s}]/2$ есть не что иное, как векторная величина элемента $d\mathbf{S}$ поверхности $\mathbf{S}$ конуса, образованного радиусами-векторами $\mathbf{R}$, проведенными из условного центра токов O ко всем точкам контура тока L. Стало быть,

$$\frac{1}{2}\int_L [\mathbf{R}\,d\mathbf{s}] = \int d\mathbf{S} = \mathbf{S} \quad \text{и} \quad \mathbf{M} = \frac{J}{c}\mathbf{S},$$

где $\mathbf{S}$ означает векторную величину поверхности, опирающуюся на контур тока, которая, как указывалось в § 56, от выбора этой поверхности не зависит. Таким образом, два данных нами определения магнитного момента токов $\mathbf{M}$ — формулы (56.2) и (57.4) — в случае линейных токов, к которым только и применимо (56.2), действительно оказываются тождественными друг другу.

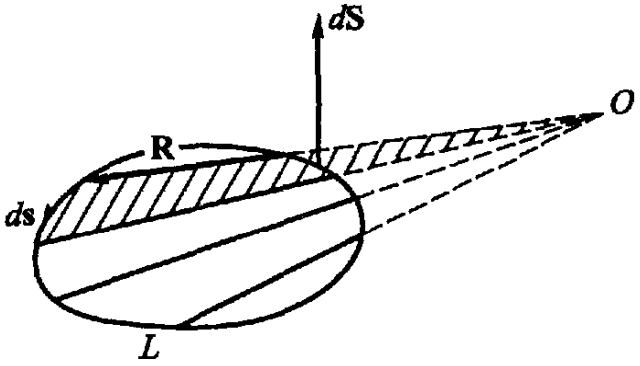

Рис. 62

Рассмотрим теперь поле системы токов на расстояниях от этой системы, значительно превышающих ее размеры. Согласно (46 2) и (57.8) напряженность этого поля равна

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}\frac{[\mathbf{MR}]}{R^3}, \tag{57.12}$$

тогда как в § 56 мы получили для нее выражение (56.4):

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\frac{(\mathbf{MR})}{R^3} = \frac{3(\mathbf{MR})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{M}}{R^3}. \tag{57.13}$$

Покажем, что эти выражения отличаются друг от друга лишь по внешнему виду. Из (57.12) и (43_3^*) следует:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\frac{[\mathbf{MR}]}{R^3} = \frac{1}{R^3}\operatorname{rot}[\mathbf{MR}] - \left[[\mathbf{MR}]\cdot\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right].$$

Так как

$$\nabla\left(\frac{1}{R^3}\right) = -\frac{3\mathbf{R}}{R^5},$$

то

$$-\left[[\mathbf{MR}]\cdot\nabla\left(\frac{1}{R^3}\right)\right] = \frac{3}{R^5}[[\mathbf{MR}]\mathbf{R}] = \frac{3}{R^5}\{\mathbf{R}\cdot(\mathbf{MR}) - \mathbf{M}R^2\} =$$

$$= \frac{3(\mathbf{MR})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{3\mathbf{M}}{R^3}.$$

Далее,

$$\operatorname{rot}_x[\mathbf{MR}] = \frac{\partial}{\partial y}(M_x y - M_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(M_z x - M_x z) = 2M_x,$$

ибо $\mathbf{M}$ от координат точки наблюдения x, y, z не зависит; поэтому

$$\operatorname{rot}[\mathbf{MR}] = 2\mathbf{M}.$$

Окончательно получаем

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\frac{[\mathbf{MR}]}{R^3} = \frac{3(\mathbf{MR})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{M}}{R^3}, \qquad (57.13a)$$

что, как и требовалось доказать, совпадает с (57.13).

Наконец, что касается сил, испытываемых током во внешнем поле, то, как уже указывалось, соответственные формулы этого и предшествующего параграфов даже по внешнему виду не отличаются друг от друга.

§ 58. Эволюция представлений о природе магнетизма. Спин электронов

1. Подведем теперь итоги полученным результатам. Мы определили магнитное поле как поле сил взаимодействия токов, подобно тому как электрическое поле было определено как поле сил взаимодействия электрических зарядов. Далее мы убедились, что если исключить из рассмотрения вихревое пространство и внести в поле надлежащие условные перегородки, то поле токов можно свести к кулонову полю фиктивных магнитных зарядов, связанных попарно в диполи и расположенных двойными слоями или листками.

Однако историческое развитие происходило, как известно, как раз в обратном направлении. Магнитные явления обнаружены были впервые при изучении так называемых «постоянных» магнитов. Для объяснения этих явлений было создано представление о магнитных зарядах, взаимодействующих по закону Кулона, которым приписывалось столь же реальное существование, как и зарядам электрическим. Однако опыт показал, что в отличие от электрических магнитные заряды противоположных знаков не могут быть отделены друг от друга. Из этого факта был сделан вывод (Кулон, 1789), что в каждой молекуле магнетиков (т. е. способных намагничиваться тел) всегда содержится равное количество магнетизма противоположных знаков и что намагничивание состоит либо в магнитной поляризации молекул, т. е. в раздвигании разноименных зарядов молекул магнетика в противоположные стороны, либо же в повороте магнитных осей молекул, если эти молекулы обладают постоянным магнитным моментом. При этом магнитный момент молекул считался обусловленным несимметричным расположением входящих в их состав магнитных зарядов и определялся выражением, совершенно аналогичным выражению электрического момента молекулы

[см. уравнение (20.1)]:

$$\mathbf{M} = \sum_i m_i \mathbf{R}_i,$$

где m_i — отдельные магнитные заряды или полюсы, входящие в состав молекул, а $\mathbf{R}_i$ — их радиусы-векторы. С этой точки зрения, простейшей моделью молекулы магнетика является магнитный диполь.

2. Лишь впоследствии были открыты магнитные свойства токов (Эрстед, 1818; Ампер, 1820), а именно пондеромоторное взаимодействие токов, с одной стороны, и взаимодействие токов с магнитами — с другой. Таким образом, оказалось, что существуют два рода источников магнитного поля — постоянные магниты с магнитными диполями и электрические токи, т. е. движущиеся электрические заряды, причем как магниты, так и токи сами испытывают во внешнем магнитном поле пондеромоторные силы. Естественно, возникло стремление устранить этот дуализм и свести все источники магнитного поля к одной категории. Уже Ампер, доказавший эквивалентность токов и магнитных листков (т. е. совокупности магнитных диполей), высказал предположение, что кажущееся существование магнитных диполей в молекулах магнетиков может в действительности обусловливаться наличием в них эквивалентных диполям замкнутых токов. В этом случае все источники магнитного поля свелись бы к одной категории, т. е. к токам. В течение почти целого столетия гипотеза Ампера, в дальнейшем развитая Вебером, оставалась гипотезой и встречала ряд более или менее веских возражений. Лишь с того момента, как возникло и укрепилось современное представление об атоме как о положительном ядре, окруженном роем обращающихся около него электронов, гипотеза амперовых токов стала на твердую почву. Действительно, электрон, обращающийся около ядра, в магнитном отношении соответствует круговому элементарному току некоторой определенной силы J, магнитный момент которого определяется формулой (56.2)

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c} J\mathbf{S},$$

где $\mathbf{S}$ — площадь орбиты электрона; результирующий же магнитный момент молекулы равен векторной сумме моментов орбитальных движений отдельных электронов, входящих в ее состав.

Эта «классическая» электронная теория имеет в своем активе целый ряд крупнейших достижений: рациональное объяснение явлений диамагнетизма, предсказание гиромагнитных явлений, качественно подтвердившееся на опыте, и т. д.

3. Однако примерно в 1925 г. выяснилось, что электроны (и протоны) обладают более сложными свойствами, чем это представлялось раньше, а именно — каждый электрон обладает не

только определенным зарядом e и определенной массой m, но и вполне определенным и неизменным по величине механическим моментом вращения, или, иначе, моментом количества движения K и магнитным моментом M (в ед. СГС), причем

$$K = \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}, \quad M = \frac{eh}{4\pi mc}, \tag{58.1}$$

где h есть универсальная постоянная Планка [1].

Другими словами, дело обстоит так, как если бы каждый электрон (вне зависимости от характера движения его центра и вне зависимости от того, обращается ли он по определенной орбите вокруг ядра атома или же свободно движется вне его) непрерывно вращался около проходящей через его центр оси с некоторой постоянной угловой скоростью ω, соответствующей механическому моменту вращения K [2].

С этой точки зрения магнитный момент электрона M создается тем же круговым движением элементов заряда электрона около его оси, т. е. совокупностью замкнутых круговых токов, эквивалентных этому движению зарядов.

Однако это наглядное представление о так называемом «собственном вращении» электрона действительности не соответствует. Даже в рамках классического представления об электроне как о маленьком шарике это явствует из того, что числовые значения величин e, m, K и M не могут быть согласованы с какими бы то ни было допустимыми значениями радиуса и угловой скорости вращения электрона. Магнитный момент электрона имеет чисто квантовое происхождение [3], и только квантовой механике удалось вполне удовлетворительно объяснить магнитные свойства электрона.

Впрочем, весьма удобным наглядным представлением о собственном вращении электрона можно, конечно, пользоваться в известных пределах, поскольку оно не приводит к противоречиям с фактами, не забывая, однако, что это представление носит лишь вспомогательный характер и действительности не соответствует. В настоящее время совокупность свойств электрона, характеризуемых его механическими и магнитными моментами K и M, принято обозначать терминами «спин», что означает вращение.

---

[1]) Протоны обладают тем же механическим моментом $(1/2)(h/2\pi)$, но магнитный момент их примерно в 650 раз меньше магнитного момента электрона. Поэтому в большинстве случаев магнитные свойства протонов, а также сложных атомных ядер можно во внимание не принимать.

[2]) Таким образом, углубляется аналогия между атомом и Солнечной системой это «собственное вращение» электрона соответствует суточному вращению Земли вокруг ее оси

[3]) Это проявляется в том, что, согласно (58 1), M пропорционально квантовой постоянной h.

4. Ввиду того что опытные доказательства существования «спина» в основном относятся к выходящей за рамки этой книги области физики атома и квантовой механики, мы не можем на них здесь останавливаться. Впрочем, существует целый ряд и макроскопических явлений, объяснение которых возможно только при учете спина электронов. Таковы, например, явления ферромагнетизма вообще и вопрос о физической природе так называемого молекулярного поля Вейсса в частности (см. § 72); таковы количественные закономерности гиромагнитных явлений (см. § 71) и т. д.

В случае же свободных электронов (например, электронов, образующих термоионный ток, катодные лучи, β-лучи и т. д.) поправки, вносимые наличием спина в формулы классической теории электронов, столь ничтожны, что практически не могут быть обнаружены на опыте. Именно поэтому спин электрона и мог остаться необнаруженным столь продолжительное время, несмотря на тщательные исследования электронных явлений, начавшиеся с конца XIX в.

Рассмотрим, например, силы, испытываемые электроном в магнитном поле. Благодаря наличию спина к лоренцевой силе [уравнение (45 3)]

$$\mathbf{F}_{\text{лор}} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$$

прибавляется сила, действующая в поле $\mathbf{H}$ на магнитный диполь, момент которого $\mathbf{M}$ равен магнитному моменту спина

$$\mathbf{F}_{\text{сп}} = \mathbf{M}\nabla \cdot \mathbf{H} = M\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{M}} \tag{58.2}$$

[ср. уравнение (56.8)]. Чтобы оценить порядок величин $\mathbf{F}_{\text{лор}}$ и $\mathbf{F}_{\text{сп}}$, можно в последней формуле заменить производную $\partial\mathbf{H}/\partial M$ вектора $\mathbf{H}$ по направлению вектора $\mathbf{M}$ абсолютной величины градиента H, а в формуле Лоренца положить, что $\mathbf{v}$ перпендикулярно к $\mathbf{H}$ Выражая M с помощью (58 1) через универсальные постоянные, получаем

$$\frac{F_{\text{сп}}}{F_{\text{лор}}} = \frac{c\mathrm{M}}{evH}|\nabla H| = \frac{h}{4\pi mv}\frac{1}{H}|\nabla H|.$$

Наиболее медленные электроны, с которыми вообще можно экспериментировать и определять их траекторию, действующие на них силы и т д., должны обладать скоростью по крайней мере порядка $v = 6\ \ 10^7$ см/с (такова скорость, которую приобретает электрон, пробежав ускоряющую его разность потенциалов в 1 В). Таким образом, максимально возможное значение множителя $h/(4\pi mv)$, который мы обозначим через Δl, равно

$$\Delta l = \frac{h}{4\pi mv} = \frac{6{,}62\ \ 10^{-27}}{4\pi\ \ 9{,}1\ \ 10^{-28}\cdot 6\ \ 10^7}\ \text{см},$$

т е. около 10^{-8} см. Итак,

$$\frac{F_{\text{сп}}}{F_{\text{лор}}} = \frac{\Delta l\cdot|\nabla H|}{H}$$

Числитель правой части равен разности напряженности поля H на концах отрезка $\Delta l \leqslant 10^{-8}$ см, и, таким образом, отношение $F_{\text{сп}}/F_{\text{лор}}$ равно от-

носительному изменению напряженности поля на расстоянии 10^{-8} см Очевидно, что во всех возможных опытах со свободными электронам и в макроскопических магнитных полях отношение это будет исчезающе малым и что, таким образом, силы, действующие на спин электрона, могут проявляться только в явлениях внутриатомных.

Заметим, что этот результат получается совершенно общим образом без каких-либо предположений о скорости электрона, из так называемого соотношения неопределенности квантовой механики.

5. Итак, магнитные свойства тел объясняются, во-первых, обращением электронов вокруг ядер атомов тела и, во-вторых, спином (собственным вращением) электронов

Существенно, что, согласно квантовой теории, магнитное поле, возбуждаемое магнитным спиновым моментом электронов, аналогично полю *электрических токов* (а не полю магнитных диполей, состоящих из магнитных зарядов) в том отношении, что оно является полем вихревым ($\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ всюду, тогда как $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ не всюду равен нулю). Иными словами, согласно квантовой теории, магнитное поле, возбуждаемое спином электронов, может быть сведено к полю электрических токов, определенным образом распределенных в пространстве [1]).

В этом смысле можно сказать, что *все магнитные свойства тел обусловливаются молекулярными электрическими токами.* Основы исходящей из этого представления электронной теории магнетиков будут изложены в следующей главе. Интерпретация макроскопической теории магнетиков, с точки зрения старых теорий магнетизма, будет рассмотрена в § 73.

§ 59. Абсолютная (гауссова) и другие системы единиц. Электродинамическая постоянная

1. В этой книге мы пользовались и будем пользоваться так называемой гауссовой абсолютной системой единиц, которую для краткости мы называем просто абсолютной системой и в основании которой лежит определение единицы электрического заряда по силам взаимодействия точечных зарядов (см. § 1). Единицы измерения всех остальных электрических величин, например напряженности электрического поля, его потенциала, силы и плотности тока и т. д., в этой абсолютной системе являются производными основной единицы количества электричества. Так как эта основная единица в свою очередь является производной от

[1]) Более того, релятивистская квантовая механика непосредственно приводит к некоему общему выражению для плотности токов, соответствующих определенному состоянию электрона, причем разделение этих токов на часть, обусловленную поступательным движением электрона, и на часть, обусловленную его спином, является в сущности искусственным

единиц массы M, длины L и времени T [1]) и имеет по отношению к этим величинам размерность (см. § 1)

$$[e] = \mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{T}^{-1},$$

то и производные электрические единицы (напряженности поля, потенциала и т. д.) также находятся в определенной зависимости от выбора единиц массы, длины и времени. Размерность этих производных единиц указывалась нами в соответствующих местах текста.

2. Встречаясь с новыми физическими величинами, мы всегда стремились выбрать единицы измерения этих величин так, чтобы во всех основных формулах, устанавливающих связь между этими величинами, все числовые коэффициенты, зависящие только от выбора единиц измерения, обращались в единицу (или 4π). Однако это удавалось нам лишь вплоть до того момента, когда мы перешли к изучению пондеромоторного взаимодействия токов

Как выяснилось в § 43, силы взаимодействия элементов тока зависят лишь от силы этих токов и от длины, направления и взаимного расстояния этих элементов тока, т. е. от величин, единицы измерения которых были уже установлены нами ранее. Естественно, что при этом в количественную формулировку закона взаимодействия токов [уравнение (43 1)] пришлось ввести коэффициент c, значение которого зависит от ранее сделанного выбора единиц измерения. Поскольку определенным образом выбрано значение этих единиц, постольку и эта электродинамическая постоянная c приобретает вполне определенное значение, которое можно *измерить* на опыте. С этой целью можно, например, воспользоваться формулами § 51, устанавливающими зависимость пондеромоторных сил взаимодействия токов от их силы и геометрической конфигурации, ибо все эти величины могут быть определены независимым друг от друга образом, а в соотношение между ними входит коэффициент c.

Теоретически можно, например, воспользоваться формулой (51 13), определяющей силу взаимного притяжения двух квадратных контуров тока Непосредственно измерив в абсолютных единицах входящие в эту формулу величины F, J_1, J_2, a и d и внося их числовые значения в уравнение (51 13), получаем числовое значение единственного неизвестного — постоянной c. Практически, однако, эти измерения сопряжены со значительными трудностями, ибо весьма непросто сконструировать такую систему проводников, чтобы, с одной стороны, силы их взаимодействия были достаточно велики и удобны для измерения и чтобы, с другой стороны, теоретический расчет

[1]) Ибо она определяется как величина заряда, который на равный ему заряд, находящийся от него на *единице расстояния*, действует *с силой, равной единице*

их коэффициента взаимной индукции L_{12} не оказался слишком сложным математически При этом надо иметь в виду, что сравнительно простое выражение (51.3) для L_{12}, выведенное для токов линейных, перестает быть применимым при сближении контуров тока. (Относительно оптических методов измерения коэффициента c см. § 97.)

Размерность электродинамической постоянной c, согласно (43.4), равна размерности скорости: $[c] = [\mathrm{LT}^{-1}]$, а ее числовое значение, как показали измерения [1]), весьма близко к $3 \cdot 10^{10}$ см/с (с точностью до 0,1 %): $c = 3 \cdot 10^{10}$ м/с.

3. По значению коэффициента c мы можем определить значение единиц измерения всех остальных величин, характеризующих постоянное, а также, как мы увидим в дальнейшем, и переменное поле. Так, например, из результатов решения задачи 26 (см. с. 203) следует, что напряженность поля кругового тока радиуса R_0 в его центре ($d = 0$) равна

$$H = \frac{2\pi J}{cR_0}.$$

Стало быть, можно сказать, что абсолютная единица напряженности магнитного поля в 2π раз меньше напряженности поля, возбуждаемого в центре круга единичного радиуса линейным током силы $J = c$, текущим по окружности этого круга. Размерность же H оказывается равной

$$[H] = \frac{[J]}{[cR]} = \frac{\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{T}^{-2}}{\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}} = \mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{-1/2}\mathrm{T}^{-1},$$

т. е. совпадает с размерностью напряженности электрического поля (см. § 2).

4. Заметим, что к абсолютной (гауссовой) системе единиц можно также прийти, исходя не из закона Кулона для электрических зарядов, а из закона Кулона для *фиктивных магнитных зарядов*. При этом нужно, конечно, прежде всего определить абсолютную единицу магнетизма как магнитный заряд, который отталкивает равный ему заряд, находящийся от него на единице расстояния, с силой, равной единице. Далее напряженность магнитного поля определится величиной силы, действующей в данной точке поля на единичный положительный магнитный заряд, и т. д. Конечно, тождество этой «магнитной» абсолютной системы единиц с той «электрической» системой, которой мы пользовались в этой книге, будет иметь место лишь в том случае, если мы сохраним прежнее соотношение (55.1), устанав-

[1]) Согласно рекомендуемым согласованным значениям фундаментальных физических постоянных (см. с 610) для величины c принимается значение. $c = 299\,792\,458$ м/с

ливающее связь между силой электрического тока и мощностью эквивалентного току магнитного листка: $\tau = J/c$.

5. В отличие от описанной нами системы единиц, которую мы будем называть просто *абсолютной* системой и которая иногда называется гауссовой, или симметрической (см. таблицу в конце параграфа), существуют еще так называемые абсолютная *электростатическая* и абсолютная *электромагнитная* системы единиц. Первая из них исходит из определения единицы электричества, основанного на законе Кулона, вторая — из определения единицы магнетизма, основанного на подобном же законе для фиктивных магнитных зарядов, причем, однако, в этих системах в отличие от гауссовой электродинамическая постоянная c полагается равной единице. Однако по изложенным выше соображениям полное устранение из формул теории всех числовых коэффициентов, значение которых зависит от выбора системы единиц, невозможно. Поэтому в электростатической системе единиц приходится приписывать магнитной проницаемости μ размерность $\mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}^2$ и полагать «магнитную проницаемость вакуума» μ_0 равной

$$\left(3 \cdot 10^{10}\ \text{см/с}\right)^{-2} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-20}\ \text{с}^2/\text{см}^2,$$

а в электромагнитной системе приходится приписывать ту же размерность диэлектрической постоянной ε и полагать «диэлектрическую постоянную вакуума» ε_0 равной той же величине $^1/_9 \cdot 10^{-20}\ \text{с}^2/\text{см}^2$.

На описании этих систем мы останавливаться не будем, ибо гауссова система единиц гораздо больше соответствует современным представлениям о природе электромагнитных явлений. Так, например, из рассмотрения физического смысла величины ε [гл. II, см., в частности, уравнение (22.5)] явствует, что она есть действительно величина отвлеченная, размерностью не обладающая, и что для вакуума ε обращается в единицу; коэффициент c, имеющий в гауссовой системе размерность скорости, как мы увидим дальше, действительно равен скорости распространения электромагнитных волн в пустоте и т. д. [1]).

Примечание. Из всего этого, однако, отнюдь не вытекает неправильность других систем электромагнитных единиц. Всякая система единиц условна, и критерием при выборе определенной системы единиц могут служить только ее внутренняя непротиворечивость, удобство и степень соответствия современным физическим представлениям.

---

[1]) Для физики гауссова система единиц представляется наиболее «естественной». в этом случае размерности E, D, H, B одинаковы в соответствии с относительностью деления электромагнитного поля на электрическое и магнитное (§ 115). См. по этому поводу: *Сивухин Д.В.* // УФН. 1979. Т. 129 С. 335

6. Заметим, что *абсолютные* (гауссовы) *единицы электрических величин совпадают с соответствующими электростатическими единицами, а абсолютные единицы магнитных величин — с электромагнитными единицами* (табл. I).

Таблица I

Физическая величина и ее обозначение	Размерность в абсолютной (гауссовой) системе единиц	
Количество электричества e	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$	Абсолютные гауссовы единицы совпадают с электростатическими
Напряженность электрического поля (то же для индукции D и поляризации P)	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$	
Потенциал φ	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}$	
Емкость C	L	
Электродвижущая сила и напряжение $\mathscr{E}$	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}$	
Сила тока J	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}$	
Плотность тока j	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-2}$	
Сопротивление проводника R	$L^{-1}T$	
Электропроводность λ	T^{-1}	
Напряженность магнитного поля H (то же для магнитной индукции B и намагничения I, см. гл. V)	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$	Абсолютные гауссовы единицы совпадают с электромагнитными
Поток магнитной индукции Ψ	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$	
Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции L	L	
Магнитный момент M	$M^{1/2}L^{5/2}T^{-1}$	
Количество (фиктивного) магнетизма m	$M^{1/2}L^{5/2}T^{-1}$	

Заметим, далее, что *электромагнитная единица силы тока и количества электричества в c раз больше соответствующих гауссовых* (а стало быть, и равных им электростатических) единиц. Следовательно, если J и J' — соответственно значения силы одного и того же тока в абсолютных и в электромагнитных единицах, то

$$J' = \frac{J}{c}.$$

Так как, с другой стороны, во всех почти формулах этой главы коэффициент c входит в комбинации J/c (*или* j/c), то, выражая силу тока не в абсолютных, а в электромагнитных единицах, мы можем устранить этот коэффициент из упомянутых формул и тем самым упростить их. Так, например, внося J' в формулу, приведенную в начале параграфа, получим

$$H = \frac{2\pi J'}{R_0},$$

ввиду чего можно сказать, что абсолютная единица магнитной напряженности H в 2π раз больше напряженности поля, возбуждаемого в центре круга единичного радиуса текущим по его окружности током силой в одну электромагнитную единицу.

Далее, уравнение (55.1) принимает вид

$$\tau = J';$$

стало быть, *мощность* τ *эквивалентного току магнитного листка* равна выраженной в электромагнитных единицах силе этого тока J'.

Однако последовательное пользование электромагнитными единицами количества электричества и силы тока далеко не всегда удобно. Так, например, при пользовании электромагнитными единицами в законе Кулона появляется множитель c^2 [1]):

$$F = \frac{c^2 e_1' e_2'}{R_2}.$$

Все же электромагнитные единицы иногда применяются при измерении не только магнитных, но и электрических величин. Электростатические же единицы, вообще говоря, для измерения величин магнитных не применяются.

Зная соотношение между электромагнитными и электростатическими единицами заряда, нетрудно найти соотношение между единицами других величин. Так, например, напряженность электрического поля E равна единице, если помещенный в поле единичный заряд испытывает силу в одну дину. Стало быть, электромагнитная единица напряженности должна быть в c раз меньше электростатической. Для ряда основных электрических величин эти соотношения приведены в табл. II.

Таблица II

Соотношение между электромагнитными и электростатическими единицами

Количество электричества e и сила тока J	1 эл.-магн. ед. = c абс. (эл -стат.) ед.
Напряженность электрического поля E Потенциал φ и электродвижущая сила $\mathscr{E}$	1 эл.-магн. ед. = $\frac{1}{c}$ абс. (эл.-стат.) ед.
Емкость C	1 эл.-магн. ед. = c^2 абс. (эл.-стат.) ед.
Сопротивление R	1 эл.-магн ед. = $\frac{1}{c^2}$ абс. (эл.-стат.) ед.
Напряженность магнитного поля H	1 абс. (эл.-магн.) ед. = c эл.-стат. ед.
Коэффициент индукции L	1 абс. (эл.-магн.) ед. = $\frac{1}{c^2}$ эл.-стат. ед.

[1]) Или равный ему множитель $1/\varepsilon_0 = (1/9)\cdot 10^{-20}$ с^2/см^2 есть «диэлектрическая проницаемость вакуума» (см. выше).

Наконец, в табл. III приведены названия и значения основных практических единиц измерения.

Таблица III

Практические единицы

Количество электричества e	1 Кл $= 10^{-1}$ СГС эл -магн.ед. $=$ $= 3 \cdot 10^9$ абс. (эл.-стат.) СГС ед.
Потенциал φ Электродвижущая сила и напряжение $\mathscr{E}$	1 В $= 10^8$ СГС эл.-магн. ед. $= \dfrac{1}{300}$ абс. (эл.-стат.) СГС ед.
Напряженность поля E	$1 \dfrac{В}{см} = 10^8$ СГС эл.-магн. ед. $= \dfrac{1}{300}$ абс. (эл.-стат.) СГС ед.
Емкость C	1 Ф $= 10^{-9}$ СГС эл.-магн. ед. $=$ $= 9 \cdot 10^{11}$ абс. (эл -стат.) СГС ед. (см)
Сила тока J	1 А $= 10^{-1}$ СГС эл.-магн. ед. $=$ $= 3 \cdot 10^9$ абс. (эл.-стат.) СГС ед.
Сопротивление R	1 Ом $= 10^9$ СГС эл.-магн. ед. $= \dfrac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ абс. (эл.-стат.) СГС ед
Напряженность магнитного поля H	1 Гс $= 1$ абс. СГС (эл.-магн.) ед $=$ $= 3 \cdot 10^{10}$ СГС эл.-стат. ед.
Самоиндукция L	1 Гн $= 10^9$ абс. СГС (эл.-магн.) ед. (см) $= \dfrac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ СГС эл.-стат. ед.
Поток магнитной индукции Ψ	1 Мкс(максвелл) $=$ $= 10^{-8}$ Вб(вебера) $= 1$ Гс $\cdot$ см$^2 =$ $= 1$ абс. СГС (эл.-магн.) ед. $=$ $= 3 \ \ 10^{10}$ СГС эл.-стат. ед.
Энергия W	1 Дж $= 10^7$ абс. СГС ед. (эрг)
Мощность	1 Вт $= 10^7$ абс. СГС ед. (эрг/с)

7. Практическая система единиц есть правильно построенная система единиц в том смысле, что, подобно гауссовой, электростатической и электромагнитной системам, все практические единицы могут быть получены как производные от одной основной единицы. Какую именно единицу (ампер, ом и т. д.) считать при этом основной, конечно, не существенно. Однако точное определение производных единиц по единице основной представляет значительные экспериментальные трудности, и результаты соответствующих измерений по мере усовершенствования измерительной техники непрерывно изменяются и уточняются. Далее, основные единицы практической системы (ампер, ом и т. д.) были в свою очередь определены указанием определенного числового отношения их к единицам абсолютным, построенным на абсолютной единице количества электричества; абсолютное же измерение количества электричества представляет гораздо бо́льшие

трудности, чем, например, абсолютное определение силы тока или сопротивления.

Поэтому международный съезд 1908 г. установил так называемую *международную систему практических единиц*, в основе которой лежат две основные единицы — международный ом (Ohm. Int) и международный ампер (Amp. Int). Значение этих единиц определено следующим образом: 1) международный ом равен сопротивлению столба ртути длиной в 106,300 см при температуре, равной 10 °С, и при массе этого столба, равной 14,4521 г; 2) международный ампер равен силе тока, выделяющего при прохождении через раствор $AgNO_3$ в воде 0,0011180 г серебра в 1 с. Все остальные международные практические единицы (в том числе и вольт) являются производными от этих основных.

Международный ампер и ом были определены так, чтобы их величины со всей доступной в то время точностью равнялись соответственно 10^{-1} и 10^9 электромагнитным единицам силы тока и сопротивления; однако вместе с тем было условлено считать эти единицы установленными раз навсегда и не менять их величины в зависимости от могущих выясниться отличий их от абсолютного ома (10^9 эл.-магн. ед. = Ohm. abs.) и абсолютного ампера (10^{-1} эл.-магн. ед. = Amp. abs.).

Фактически, однако, каждая крупная страна пользовалась не указанными основными единицами, а своими государственными стандартами ЭДС (нормальные гальванические элементы Вестона) и электрического сопротивления. Хотя стандарты различных стран были в свое время приведены в согласие друг с другом и выражены в международных единицах, но к 1930 г. между стандартами различных стран накопились расхождения, доходившие до 0,01 %. Кроме того, существовало расхождение между электрическими и механическими единицами; так, например, электрическая и механическая единицы энергии различались на 0,02 %. Поэтому в 1935 г. Международный комитет мер и весов решил вновь заменить «международную систему единиц» системой абсолютной и ввести ее в употребление с 1 января 1940 г.

По данным 1935 г. [1])

$$\text{Ohm. Int.} = 1{,}0005\ \text{Ohm. abs.},$$
$$\text{Amp. Int.} = 0{,}9999\ \text{Amp. abs.}$$

[1]) В дальнейшем определение и значения электрических единиц неоднократно изменялись. Данные 1973 г. на этот счет можно найти в УФН. 1975. Т. 115. С. 623. В частности, для единиц сопротивления и силы тока установлены соотношения:

$$\text{Ohm. МБ} = 0{,}99999947\ (19)\ \text{СИ},$$
$$\text{Amp МБ} = 1{,}0000007\ (26)\ \text{СИ},$$

где через МБ обозначены эталоны, установленные Международным Бюро мер и весов.

8. Упомянем, наконец, о предложенной Хэвисайдом так называемой рациональной системе единиц, которой по примеру Лоренца все чаще и чаще пользуются в теоретических исследованиях. Она отличается от абсолютной гауссовой системы не размерностью, а лишь числовым значением основных единиц: единица электричества (а также и магнетизма) в рациональной системе принимается равной $1/\sqrt{4\pi}$ доли абсолютной единицы электричества (магнетизма). Хотя из-за этого и в закон Кулона и в некоторые другие формулы приходится вводить знаменатель 4π, но зато, и в этом состоит преимущество рациональной системы, этот множитель 4π выпадает из целого ряда основных формул теории поля, например из дифференциальных уравнений для скалярного [уравнение (11.3)] и векторного [уравнение (46 5)] потенциалов, из формулы (22.2), связывающей значения $\operatorname{div}\mathbf{D}$ и ρ, и т. д.

ГЛАВА V

МАГНЕТИКИ (НАМАГНИЧИВАЮЩИЕСЯ СРЕДЫ)

§ 60. Намагничение магнетиков. Молекулярные токи и токи проводимости

1. Подобно тому как внесение диэлектриков в поле свободных электрических зарядов (см. определение этого термина в § 21) вызывает изменение этого поля, обусловливающееся *поляризацией* диэлектрика, так и внесение магнетиков (например железа) в магнитное поле токов вызывает изменение этого поля, обусловливаемое *намагничиванием* магнетика. При этом *магнетиками* мы называем все способные намагничиваться тела [1], т. е., иными словами, все тела, присутствие которых способно либо видоизменить, либо возбуждать магнитное поле. Однако, в то время как все диэлектрики деполяризуются одновременно с исчезновением внешнего электрического поля [2], лишь *большинство* магнетиков, намагничиваясь под воздействием внешнего магнитного поля, по исчезновении этого поля полностью размагничиваются (временное или *индуцированное* намагничение пара- и диамагнетиков).

Наряду с этим в отличие от диэлектриков существует класс магнетиков (так называемые *ферромагнетики*), способных оставаться намагниченными и после исчезновения внешнего поля (так называемое *постоянное* или *остаточное намагничение*), т. е. способных не только видоизменять своим присутствием магнитное поле токов, но и самостоятельно возбуждать магнитное

[1] В сущности все материальные тела обладают в той или иной мере магнитными свойствами (правда, в большинстве случаев весьма слабо выраженными)

[2] См. § 21, с 104. Явление так называемой остаточной поляризации, имеющее место в некоторых диэлектриках, особенно в случае загрязнения их посторонними примесями, не имеет по своей физической природе ничего общего с остаточным магнетизмом ферромагнетиков. Оно связано с наличием токов утечки и поляризационных токов (несовершенные изоляторы), создающих перераспределение *свободных* электрических зарядов. Исключением являются пиро- и сегнетоэлектрики (см. § 29, с. 135), диэлектрические свойства которых в ряде отношений действительно аналогичны магнитным свойствам ферромагнетиков

поле независимо от наличия электрических токов (так называемые *постоянные магниты*) [1].

2. Поле намагниченных магнетиков, как и всякое магнитное поле, создается циркулирующими в магнетике электрическими токами [2].

Рассмотрим сначала магнетик, не проводящий электричества и построенный из нейтральных молекул (газы, жидкости) или из закрепленных в определенных положениях ионов (ионная кристаллическая решетка или аморфный твердый диэлектрик). Хотя *средняя* плотность тока в такой среде и равна нулю и переноса электрических зарядов на макроскопические расстояния в ней не происходит, однако внутри отдельных молекул или ионов имеет место движение электронов, соответствующее определенному распределению токов. Эти *токи* называются *молекулярными*; в ненамагниченных магнетиках они распределены совершенно хаотично, и магнитные поля их в среднем взаимно компенсируются. Намагниченный же магнетик характеризуется упорядоченностью молекулярных токов, благодаря которой результирующее магнитное поле этих токов отлично от нуля.

В магнетиках, являющихся проводниками (металлы, электролиты и т. п.), нужно, очевидно, проводить различие между *токами проводимости* $\mathbf{j}_{\text{пр}}$, соответствующими движению зарядов, переносящих макроскопический ток (свободные электроны в металлах, ионы в электролитах и ионизированных газах), и токами молекулярными $\mathbf{j}_{\text{мол}}$ в нейтральных молекулах электролитов, в закрепленных ионах, образующих твердый кристаллический остов металлов, и т. п.:

$$\mathbf{j}_{\text{микро}} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \mathbf{j}_{\text{мол}}, \tag{60.1}$$

где индекс «микро» означает истинную микроскопическую плотность тока в среде в отличие от средней макроскопической плотности $\mathbf{j}$.

Мы будем придерживаться этого разделения токов на два класса, хотя оно и не всегда может быть проведено однознач-

[1] Способность ферромагнетиков сохранять остаточное намагничение существенно зависит от их микроскопической неоднородности (остаточные упругие натяжения, поликристаллическая структура, химические загрязнения) и почти отсутствует, например, в ферромагнитных монокристаллах, лишенных внутренних натяжений. Поэтому, строго говоря, основной характеристикой ферромагнетиков является не остаточный магнетизм (гистерезис), а нелинейный характер зависимости намагничения от напряженности магнитного поля (о котором подробнее см. в § 72 и 108), проявляющейся даже в очень слабых полях и усугубляющейся при повышении микроскопической неоднородности ферромагнетика.

[2] Спиновый магнитный момент электрона также может быть сведен к действию соответствующих электрических токов (см. конец этого параграфа)

но [1]), ибо это разделение весьма упрощает вывод макроскопических уравнений поля из представленной электронной теории [2]). Для наших целей достаточно допустить, что в отличие от токов проводимости молекулярные токи замыкаются внутри микроскопически малых пространственных объемов.

3. Для построения теории магнетиков нужно прежде всего найти удобную количественную характеристику распределения молекулярных токов в среде. Такой характеристикой не может служить среднее по физически бесконечно малому объему значение плотности молекулярных токов $\mathbf{j}_{\text{мол}}$. Действительно, среднее значение тока, взятое по всему объему системы замкнутых токов, равно нулю [3]), хотя магнитный момент и магнитное поле такой системы вовсе не обязаны равняться нулю. В частности, векторная сумма токов, протекающих в любой молекуле, всегда равна нулю.

В § 56 и 57 мы убедились, что система замкнутых токов при условии достаточной малости ее размеров однозначно характеризуется ее магнитным моментом

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c}\int [\mathbf{R}\mathbf{j}]\, dV.$$

Очевидно, что и распределение молекулярных токов нужно характеризовать их магнитным моментом. Подобно тому как мерой поляризации диэлектрика служит вектор поляризации $\mathbf{P}$, равный электрическому моменту единицы его объема, так мерой намагничения магнетика служит вектор *намагничения* $\mathbf{I}$, равный магнитному моменту молекулярных токов, рассчитанному на единицу объема магнетика:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2c}\int [\mathbf{R}\mathbf{j}_{\text{мол}}]\, dV, \tag{60.2}$$

где интегрирование распространено на единицу объема магнетика. Как уже отмечалось в § 57, значение этого интеграла при условии замкнутости системы токов не зависит от выбора начала отсчета радиусов-векторов $\mathbf{R}$.

Если магнетик состоит из отдельных молекул (например, газообразные магнетики), то его намагничение $\mathbf{I}$ может быть так

---

[1]) Так, например, токи, создаваемые свободными электронами в металлах, не могут быть, вообще говоря, целиком причислены к токам проводимости, ибо, например, намагничение диамагнитных металлов обусловливается главным образом упорядоченным движением свободных электронов, не связанным с переносом макроскопического тока.

[2]) Конечно, справедливость макроскопических уравнений поля может быть обоснована и без специальных допущений подобного рода (см. конец § 91)

[3]) Ибо по доказанному в § 57 из (57.7) следует (57.6).

же определено, как векторная сумма магнитных моментов молекул, находящихся в единице его объема:

$$\mathbf{I} = \sum \mathbf{M}, \tag{60.3}$$

где $\mathbf{M}$ означает момент отдельной молекулы магнетика. Легко сообразить, что в магнетиках, построенных из отдельных молекул, уравнение (60.3) эквивалентно уравнению (60.2).

Наконец, если намагничение магнетика непостоянно по его объему, то вектор намагничения $\mathbf{I}$ можно определить как среднюю (по физически бесконечно малому объему ΔV) плотность магнитного момента молекулярных токов:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2c}[\mathbf{R}\mathbf{j}_{\text{мол}}] = \frac{1}{2c\Delta V}\int_{\Delta V}[\mathbf{R}\mathbf{j}_{\text{мол}}]\,dV. \tag{60.4}$$

По аналогии с электрической поляризацией $\mathbf{P}$ намагничение $\mathbf{I}$ можно также назвать *магнитной поляризацией*.

4. Построение теории магнетиков на основе рассмотрения постоянных замкнутых молекулярных токов может вызвать двоякого рода сомнения.

Во-первых, с точки зрения элементарных представлений о строении атома движение электронов внутри атомов и молекул не вполне эквивалентно *постоянным* токам, ибо поле электронов не постоянно во времени, а изменяется периодически, соответственно периоду обращения электрона по его орбите (вокруг ядра атома или по сложной орбите внутри молекулы и т. п.).

С точки зрения боровской теории атома это затруднение устранялось тем, что период обращения электронов по орбитам чрезвычайно мал и сравним с периодом световых колебаний (10^{-14}—10^{-15} с), так что при макроскопических наблюдениях мы воспринимаем лишь среднее по времени значение этого поля. Поэтому при построении макроскопической теории мы вправе заменить движущийся внутри атома электрон постоянным замкнутым током («молекулярный ток»), постоянное поле которого тождественно со средним за время одного периода значением поля электрона.

Однако современная квантовая механика вовсе устранила это затруднение, показав, что наглядное представление о движении электрона в атоме по определенным орбитам является лишь первым, весьма грубым приближением к действительности и что магнитное поле атомов, находящихся в стационарном состоянии, постоянно во времени и может быть сведено к полю постоянных замкнутых токов, распределенных внутри атома или молекулы с определенной плотностью $\mathbf{j}$.

Во-вторых, сомнение может вызвать то обстоятельство, что магнитные свойства атомов и молекул обусловливаются не толь-

ко движением электронов в них, но и *спином* электронов. Действительно, магнитный спиновый момент электронов часто уподобляется магнитному диполю. Однако, как уже указывалось в § 58, согласно квантовой механике, магнитное поле, возбуждаемое спиновым магнитным моментом электрона, тоже может быть сведено к полю электрических токов, распределенных определенным образом в пространстве.

Во всяком случае, магнитное поле, возбуждаемое спином, как и всякое поле токов, является полем вихревым и должно описываться векторным потенциалом $\mathbf{A}$, а не скалярным потенциалом ψ (см. § 71).

Таким образом, вполне оправдано утверждение, что магнитные свойства магнетиков обусловливаются молекулярными токами. Однако для некоторых целей весьма удобно рассматривать намагничение $\mathbf{I}$ магнетиков как слагающееся, во-первых, из магнитных моментов токов, соответствующих поступательному (орбитальному) движению электронов, и, во-вторых, из дипольных спиновых магнитных моментов электронов. Такое разделение ничего не меняет в рассуждениях последующих параграфов, посвященных выводу общих уравнений магнитного поля в магнетиках, но оказывается полезным при рассмотрении гиромагнитных эффектов (§ 71) и механизма намагничения ферромагнетиков (§ 72).

§ 61. Векторный потенциал магнитного поля при наличии магнетиков. Средняя плотность объемных и поверхностных молекулярных токов

1. Разложив, согласно (60.1), полную плотность $\mathbf{j}_{\text{микро}}$ в произвольной среде на плотность токов проводимости $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ и плотность токов молекулярных $\mathbf{j}_{\text{мол}}$, мы получаем следующее выражение для вектор-потенциала магнитного поля:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}_{\text{микро}}\, dV}{R} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}_{\text{пр}}\, dV}{R} + \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}_{\text{мол}}\, dV}{R}.$$

Вводя обозначения $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}'$ для векторных потенциалов токов проводимости и токов молекулярных

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}_{\text{пр}}\, dV}{R} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}' = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}_{\text{мол}}\, dV}{R}, \tag{61.1}$$

можно написать

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}'. \tag{61.2}$$

В эти выражения входят истинные микроскопические плотности токов, тогда как в макроскопической теории мы должны оперировать средними значениями микроскопических величин и должны, следовательно, соответственно преобразовать выражения (61.1).

Среднее значение $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ по физически бесконечно малому объему есть, очевидно, та плотность токов $\mathbf{j}$, с которой только и оперирует макроскопическая теория, не вводящая явно в рассмотрение молекулярных токов:

$$\mathbf{j} = \bar{\mathbf{j}}_{\text{пр}}. \tag{61.3}$$

Таким образом, в макроскопической теории мы можем в выражении для $\mathbf{A}_0$ попросту заменить $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ на $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}\,dV}{R}. \tag{61.4}$$

Соответственно этому для определения среднего значения вектор-потенциала молекулярных токов $\mathbf{A}'$ нужно выразить среднее значение плотности молекулярных токов $\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}}$ через величины, с которыми оперирует макроскопическая теория, а именно через намагничение. Проще, однако, следующим образом непосредственно вычислить среднее значение вектора $\mathbf{A}'$.

Векторный потенциал системы замкнутых токов при условии достаточной малости ее пространственных размеров равен, согласно (57.8), $\frac{[\mathbf{MR}]}{R^3}$, где $\mathbf{M}$ есть магнитный момент системы. С другой стороны, магнитный момент элемента объема dV магнетика, характеризующий циркулирующие в нем молекулярные токи, согласно (60.2) и (60.4), равен $\mathbf{I}\,dV$ [1]. Поэтому векторный потенциал поля, возбуждаемого элементом объема dV магнетика, равен

$$\frac{[\mathbf{IR}]}{R^3}\,dV,$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный из элемента объема dV в ту «точку наблюдения», в которой определяется значение вектор-потенциала.

Наконец, векторный потенциал $\mathbf{A}'$ всей совокупности молекулярных токов, циркулирующих во всех элементах магнетика, определится интегралом

$$\mathbf{A}' = \int \frac{[\mathbf{IR}]}{R^3}\,dV, \tag{61.5}$$

который, очевидно, можно распространить на все бесконечное пространство (ибо вне магнетиков $\mathbf{I} = 0$). Таким образом, векторный потенциал $\mathbf{A}'$ поля молекулярных токов полностью определяется намагничением среды $\mathbf{I}$.

---

[1]) Заметим, что вектор намагничения $\mathbf{I}$ является величиной *макроскопической*, ибо он равен, согласно (60.4), *средней* плотности магнитного момента в физически бесконечно малом объеме.

2. Целесообразно несколько преобразовать последнее выражение. Согласно уравнениям (43_3^*) и (10*)

$$\operatorname{rot}_q\left(\frac{1}{R}\mathbf{I}\right) = \left[\nabla_q \frac{1}{R}\cdot\mathbf{I}\right] + \frac{1}{R}\operatorname{rot}\mathbf{I} = \frac{[\mathbf{RI}]}{R^3} + \frac{1}{\mathbf{R}}\operatorname{rot}\mathbf{I}\ ^{1})$$

и, следовательно, последнее уравнение может быть записано так:

$$\mathbf{A}' = \int \frac{\operatorname{rot}\mathbf{I}}{R}\,dV - \int \operatorname{rot}_q\left(\frac{1}{R}\mathbf{I}\right)dV.$$

Последний интеграл может быть преобразован с помощью соотношения векторного анализа (56*) в интеграл по поверхности S, охватывающей объем интегрирования V [2]):

$$\int\limits_V \operatorname{rot}_q\left(\frac{1}{R}\mathbf{I}\right)dV = \oint\limits_S \frac{[\mathbf{nI}]}{R}\,dS.$$

Если в поле нет поверхностей разрыва вектора намагничения $\mathbf{I}$, то последний интеграл может быть взят по бесконечно удаленной поверхности, охватывающей *полное поле*, и обращается при этом в нуль (если намагничение $\mathbf{I}$ исчезает в бесконечности быстрее, чем $1/R$).

В противном же случае поверхностный интеграл придется, как обычно, распространить еще на поверхность S_1', выделяющую из объема интегрирования V поверхность S_1 разрыва вектора I.

Стягивая поверхность S_1' вплоть до совпадения с поверхностью разрыва S_1 и повторяя с незначительными изменениями рассуждения, приведенные нами в § 12, убедимся, что

$$\lim \oint\limits_{S_1'} \frac{[\mathbf{nI}]}{R}\,dS = \int\limits_{S_1} \frac{[\mathbf{n}_1\mathbf{I}_1] + [\mathbf{n}_2\mathbf{I}_2]}{R}\,dS = -\int\limits_{S_1} \frac{[\mathbf{N}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)]}{R}\,dS,$$

где $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$ — значения $\mathbf{I}$ по обеим сторонам поверхности разрыва, а $\mathbf{N}$ — нормаль к этой поверхности, направленная от 1 к 2. Обозначая эту нормаль через $\mathbf{n}$, получим

$$\mathbf{A}' = \int \frac{\operatorname{rot}\mathbf{I}}{R}\,dV + \int \frac{[\mathbf{N}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)]}{R}\,dS. \qquad (61.6)$$

[1]) Индекс q в выражении $\operatorname{rot}_q \mathbf{I}$ можно опустить, не опасаясь недоразумений, ибо вектор $\mathbf{I}$ является функцией *одной лишь* точки истока радиуса-вектора $\mathbf{R}$.

[2]) Преобразование это можно непосредственно применить к нашему интегралу потому, что при образовании пространственных производных мы дифференцируем R и $\mathbf{I}$ по координатам точки истока вектора $\mathbf{R}$, совпадающей с элементом объема интегрирования dV (см. примечание к § 21, с. 103).

Таким образом, полный векторный потенциал $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}'$ магнитного поля в произвольной среде выражается в микроскопической теории через макроскопическую плотность токов $\mathbf{j}$ и через вектор $\mathbf{I}$, характеризующий намагничение среды:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}}{R}\,dV + \int \frac{\operatorname{rot}\mathbf{I}}{R}\,dV + \int \frac{[\mathbf{N}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)]}{R}\,dS. \tag{61.7}$$

3. Сравним макроскопическое выражение (61.6) для векторного потенциала $\mathbf{A}'$ молекулярных токов с тем, которое получается из микроскопического выражения (61.1) для $\mathbf{A}'$ путем непосредственного усреднения его, т.е. путем замены в (61.1) микроскопической плотности $\mathbf{j}_{\text{мол}}$ средним ее значением $\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}}$ по физически бесконечно малому объему:

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{c}\int \frac{\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}}\,dV}{R}. \tag{61.8}$$

Сравнение это показывает, во-первых, что средняя плотность объемных молекулярных токов $\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}}$ следующим образом связана с намагничением среды:

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} = c\operatorname{rot}\mathbf{I}; \tag{61.9}$$

во-вторых, из этого сравнения следует, что допущение существования поверхностей разрыва вектора намагничения эквивалентно допущению существования наряду с объемными также и *поверхностных молекулярных токов*, средняя плотность которых пропорциональна поверхностному ротору $\mathbf{I}$:

$$\bar{\mathbf{i}}_{\text{мол}} = c\operatorname{Rot}\mathbf{I} = c[\mathbf{n}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)]. \tag{61.10}$$

Действительно, при этом допущении выражение (61.8) нужно дополнить членом, учитывающим поверхностные токи:

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{c}\int \frac{\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}}}{R}\,dV + \frac{1}{c}\int \frac{\bar{\mathbf{i}}_{\text{мол}}}{R}\,dS,$$

в результате чего это выражение на основании (61.9) и (61.10) становится эквивалентным (61.6).

Конечно, само допущение о возможности существования поверхностей разрыва физических величин и поверхностных токов характерно для макроскопической трактовки поля и совершенно чуждо микроскопической теории.

Выражение (61.9) для средней плотности молекулярных токов, как и следовало ожидать, удовлетворяет условию замкнутости токов, ибо, согласно (42_2^*):

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} = c\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{I} = 0.$$

Далее, выражение для средней поверхностной плотности молекулярных токов совпадает с тем, которое может быть получено из выражения их объемной плотности путем предельного перехода типа (49.7).

Заметим, что в равномерно намагниченных средах ($\mathbf{I} = \text{const}$) средняя плотность молекулярных токов, согласно уравнению (61.9), равна нулю [1]). Действительно, если смежные элементы объема среды намагничены совершенно одинаково, то в ней нигде не может иметь место преобладание токов какого-либо одного определенного направления. На границе же намагниченных магнетиков и вакуума, согласно уравнению (61.10), имеются поверхностные токи плотности $\mathbf{i} = \pm c[\mathbf{nI}]$, ибо в вакууме $\mathbf{I} = 0$.

Уравнения (61.9) и (61.10), устанавливающие связь между распределением молекулярных токов и пространственными производными вектора намагничения (а также скачком его касательных слагающих на поверхностях разрыва), получены были нами довольно окольным путем. Было бы желательно получить их непосредственно из основного уравнения (60.2), определяющего вектор намагничения $\mathbf{I}$ и выражающего значение $\mathbf{I}$ через $\mathbf{j}_{\text{мол}}$. В § 67 мы проведем соответствующие вычисления при некоторых упрощающих предположениях.

4. В качестве примера рассмотрим цилиндрический магнит, равномерно намагниченный по всему объему параллельно своей оси. Средняя плотность объемных молекулярных токов всюду будет равна нулю, ибо при $\mathbf{I} = \text{const}$ имеем $\operatorname{rot}\mathbf{I} = 0$. На основаниях цилиндра поверхностных молекулярных токов также не будет, ибо нормаль к этим основаниям параллельна $\mathbf{I}$. Нормаль же к боковой поверхности цилиндра перпендикулярна к $\mathbf{I}$ и поэтому плотность поверхностных молекулярных токов на боковой поверхности цилиндра будет отлична от нуля и будет численно равняться

$$i_{\text{мол}} = cI \tag{61.11}$$

(в формуле (61.10) полагаем $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}$, $\mathbf{I}_2 = 0$, ибо вне магнита $\mathbf{I} = 0$).

Эти замкнутые круговые поверхностные токи составляют правовинтовую систему с направлением намагничения $\mathbf{I}$.

Таким образом, с точки зрения электронной теории, магнит эквивалентен цилиндрическому соленоидальному току (см. § 49). При этом из сравнения уравнения (61.11) с уравнением (49.14) следует, что сила тока J в соленоиде, эквивалентном данному магниту, может быть определена из равенства

$$i = nJ = cI, \tag{61.12}$$

[1]) Подобно тому как равна нулю средняя плотность связанных зарядов в равномерно поляризованном диэлектрике.

где n — число витков соленоида на единицу его длины. Происхождение поверхностных токов на границе магнетика и вакуума может быть пояснено путем весьма простых рассуждений. Весьма схематически рис. 63 изображает собой поперечный разрез магнита. Совокупность молекулярных токов внутри магнита может быть схематически представлена как совокупность токов одинаковой силы, обтекающих каждую ячейку (молекулу) магнита в одинаковом направлении, например против часовой стрелки. Внутри магнита токи смежных молекул взаимно компенсируются, на поверхности же магнита они складываются в круговой ток, обтекающий магнит по окружности [1]).

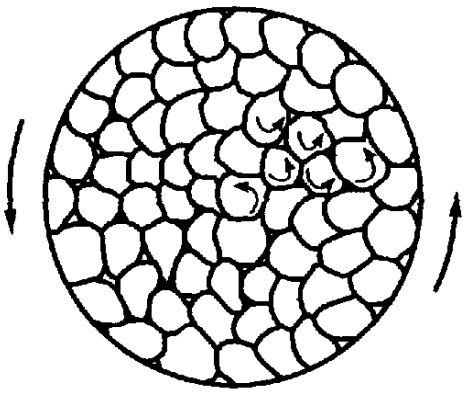

Рис. 63

Чтобы уточнить это рассуждение в количественном отношении, рассмотрим тонкий слой магнита, заключенный между двумя плоскостями, перпендикулярными к его оси. Если высота этого слоя равна l, сечение S, объем $V = lS$, а сумма магнитных моментов молекул, в нем находящихся, равна $\sum \mathbf{M}$, то

$$\mathbf{I} = \frac{1}{V} \sum \mathbf{M}.$$

Выражая с помощью уравнения (56.2) магнитный момент каждой молекулы через силу и площадь соответствующего молекулярного тока, получаем

$$\mathbf{I} = \frac{1}{cV} J \sum \mathbf{S},$$

где нами для простоты предположено, что все молекулярные токи линейны и силы их одинаковы. Магнитный момент молекул не изменится, если мы так изменим силу тока J и площадь молекулярных токов, чтобы их произведение осталось постоянным. Подберем эти величины в соответствии с рис. 63 так, чтобы смежные молекулярные токи непосредственно прилегали друг к другу. Тогда $\sum \mathbf{S}$ будет численно равна площади сечения магнита S и

$$I = \frac{JS}{cV} = \frac{JS}{cSl} = \frac{1}{c} \frac{J}{l}.$$

Отношение силы тока J, протекающего по поверхности рассматриваемого слоя, к высоте этого слоя l равно по определению поверхностной плотности тока i. Таким образом, последнее уравнение совпадает с уравнениями (61.11) и (62.12).

[1]) Вопрос об отличии поля внутри магнита от поля внутри эквивалентного соленоида будет рассмотрен в § 74.

§ 62. Дифференциальные уравнения макроскопического магнитного поля в магнетиках. Напряженность магнитного поля в магнетиках и вектор магнитной индукции

1. В этом параграфе мы поставим себе задачу путем усреднения уравнений истинного *микроскопического* поля вывести уравнения для средних *макроскопических* значений, характеризующих поле величин $\mathbf{H}$ и $\mathbf{j}$. При этом мы будем исходить из предположения, что для истинного *микроскопического* поля строго справедливы основные уравнения магнитного поля постоянных токов (47.1) и (47.3):

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_{\text{микро}} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_{\text{микро}} = \frac{4\pi \mathbf{j}_{\text{микро}}}{c},$$

если под $\mathbf{j}_{\text{микро}}$ понимать точно «микроскопическое» значение плотности тока в данной точке поля. Задача же наша будет состоять в установлении уравнений, определяющих среднее макроскопическое значение вектора $\mathbf{H}_{\text{микро}}$ в физически бесконечно малом объеме (см. § 25), которое мы обозначим через $\overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}}$. Так как, согласно уравнению (25.2), среднее значение производных по координатам равно производным от среднего значения дифференцируемой величины, то из микроскопических уравнений поля следует:

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}} = 0, \tag{62.1}$$

$$\operatorname{rot}\overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}} = \frac{4\pi \bar{\mathbf{j}}_{\text{микро}}}{c}. \tag{62.2}$$

Плотность токов в произвольной среде слагается, согласно (60.1), из токов проводимости и токов молекулярных. Среднее значение $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ представляет собой, согласно (61.3), обычную плотность $\mathbf{j}$ макроскопического тока в проводниках, тогда как среднее значение $\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}}$ выражается, согласно (61.9), через ротор намагничения. Таким образом,

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{микро}} = \bar{\mathbf{j}}_{\text{пр}} + \bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} = \mathbf{j} + c\operatorname{rot}\mathbf{I}. \tag{62.3}$$

Внося это в (62.2), получаем

$$\operatorname{rot}\overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + 4\pi\operatorname{rot}\mathbf{I}. \tag{62.4}$$

Уравнения (62.1) и (62.4) являются основными дифференциальными уравнениями магнитного поля в произвольной магнитной среде.

2. Напряженность макроскопического электрического поля по определению равна средней напряженности $\mathbf{E}_{\text{микро}}$ микроскопического поля (см. § 26). Было бы совершенно естественно аналогичным образом определить напряженность макроскопического магнитного поля.

Однако исторически укоренилось иное определение, являвшееся совершенно естественным с точки зрения представления о существовании магнитных зарядов в молекулах (см. § 73); а именно, напряженность макроскопического поля в магнетиках, которую мы в дальнейшем будем просто обозначать буквой $\mathbf{H}$, определяется следующим соотношением:

$$\mathbf{H} = \overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}} - 4\pi\mathbf{I}. \tag{62.5}$$

Среднее же значение напряженности микроскопического поля носит название вектора *магнитной индукции* и обозначается буквой $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}}. \tag{62.6}$$

Уравнение (62.4) может быть записано следующим образом:

$$\operatorname{rot}(\overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}} - 4\pi\mathbf{I}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

так что в новых обозначениях оно принимает вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{62.7}$$

а уравнения (62.1) и (62.5) принимают вид

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{62.8}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}. \tag{62.9}$$

Уравнения (62.7)–(62.9) представляют собой систему основных дифференциальных уравнений поля, которые должны быть дополнены лишь уравнениями, устанавливающими связь между намагничением $\mathbf{I}$ и напряженностью $\mathbf{H}$. Связь этих величин будет рассмотрена нами в следующем параграфе. В случае отсутствия намагниченных сред $\mathbf{I} = 0$; $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ совпадают между собой, и уравнения (62.7) и (62.8) совпадают с ранее выведенными уравнениями магнитного поля в вакууме (47.1) и (47.3).

Во всем дальнейшем, если не будет оговорено противное, мы под напряженностью магнитного поля $\mathbf{H}$ будем понимать вектор, определяемый соотношением (62.5) и удовлетворяющий уравнениям (62.7) и (62.9).

При формальном сравнении уравнений электрического и магнитного полей

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}$$

создается впечатление о сходстве величин $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, с одной стороны, и $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — с другой, тогда как по существу, как только что указывалось, аналогом напряженности макроскопического электрического поля $\mathbf{E}$ является магнитная индукция $\mathbf{B}$ (равная

средней напряженности микроскопического магнитного поля), а аналогом электрической индукции $\mathbf{D}$ — напряженность макроскопического магнитного поля $\mathbf{H}$ [1]. Это сказывается, например, в том, что, как мы убедимся в § 65, силы, испытываемые электрическими токами, определяются магнитной индукцией $\mathbf{B}$, тогда как силы, испытываемые электрическими зарядами, определяются электрической напряженностью $\mathbf{E}$.

3. Заметим в заключение, что в укоренившихся обозначениях уравнение $\mathbf{H}_{\text{микро}} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ [ср. уравнение (46.2)], дающее возможность свести определение напряженности поля к вычислению вектор-потенциала, записывается следующим образом:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{62.10}$$

где под $\mathbf{A}$ нужно понимать, конечно, среднее макроскопическое значение вектор-потенциала. Уравнение (62.8) можно рассматривать как прямое следствие уравнения (62.10). Вектор же напряженности макроскопического поля $\mathbf{H}$, вообще говоря, не является соленоидальным и поэтому не может выражаться ротором вспомогательного вектор-потенциала.

Наконец, дифференциальное уравнение для макроскопического значения векторного потенциала

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}_{\text{микро}} = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + c \operatorname{rot} \mathbf{I}) \tag{62.11}$$

может быть получено либо усреднением уравнения (46.5), либо же непосредственно из (61.7) таким же путем, как в § 46 уравнение (46.5) было получено из (46.1).

4. Что касается *пограничных условий* для магнитного поля, то они непосредственно вытекают из дифференциальных уравнений поля путем предельного перехода от случая тонких слоев конечной толщины, в которых объемные токи $\mathbf{j}$ и намагничение $\mathbf{I}$ остаются конечными и непрерывными, к предельному случаю бесконечно тонких поверхностей разрыва.

Так, согласно уравнению (6.8), мы получаем из уравнения (62.8) следующее уравнение для нормальных слагающих вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$:

$$\operatorname{Div} \mathbf{B} = B_{2n} - B_{1n} = 0, \tag{62.12}$$

являющееся обобщением уравнения (49.1) на случай наличия магнетиков. Что же касается напряженности поля $\mathbf{H}$, то дифференциальное уравнение для этого вектора сохраняет в магнитных средах тот же вид [уравнение (62.7)], что и в вакууме

[1] Это обстоятельство проявляется, в частности, в том, что при четырехмерной формулировке уравнений электромагнитного поля в теории относительности оказывается необходимым объединить, с одной стороны, векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и, с другой стороны, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$ попарно в два четырехмерных тензора 2-го ранга.

[уравнение (47.3)], и, стало быть, приводит к тому же пограничному условию для его касательных слагающих [ср. уравнения (49.3) и (49.6)]:

$$\operatorname{Rot}\mathbf{H} = [\mathbf{n}(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i}. \qquad (62.13)$$

При отсутствии поверхностных токов ($\mathbf{i} = 0$) это уравнение может быть записано также в следующей форме [ср. уравнение (49.5)]:

$$H_{2t} = H_{1t}. \qquad (62.14)$$

§ 63. Зависимость намагничения от напряженности магнитного поля. Пара-, диа- и ферромагнетики

1. Для того чтобы система уравнений поля, выведенная в предыдущем параграфе, стала полной, ее необходимо дополнить определенным соотношением, связывающим намагничение среды $\mathbf{I}$ и напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$. Поляризация диэлектриков $\mathbf{P}$ пропорциональна напряженности $\mathbf{E}$ электрического поля в них [уравнение (21.7)]; магнетики же по характеру зависимости их намагничения $\mathbf{I}$ от напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ могут быть подразделены на три различных класса.

В так называемых парамагнетиках и диамагнетиках $\mathbf{I}$ пропорционально $\mathbf{H}$ [1]:

$$\mathbf{I} = \varkappa\mathbf{H}. \qquad (63.1)$$

Значение коэффициента пропорциональности $\varkappa$, носящего название (объемной) *магнитной восприимчивости* и вполне аналогичного коэффициенту α поляризуемости диэлектрика [2], зависит от физико-химических свойств данного магнетика. Восприимчивость $\varkappa$ *парамагнитных тел* имеет (как и поляризуемость диэлектриков) *положительное* значение, т. е. направление намагничения $\mathbf{I}$ совпадает с направлением поля $\mathbf{H}$. *Диамагнетики* же отличаются тем, что их магнитная восприимчивость $\varkappa$ *отрицательна*, т. е. направление намагничения диамагнетиков *противоположно* направлению намагничивающего их поля $\mathbf{H}$. Объяснение этого, кажущегося парадоксальным, свойства диамагнетиков будет дано в дальнейшем.

---

[1]) В *анизотропных* (кристаллических) диа- и парамагнетиках, которые мы в этой книге рассматривать не будем, связь слагающих вектора намагничения $\mathbf{I}$ со слагающими вектора $\mathbf{H}$ остается линейной, но векторы $\mathbf{I}$ и $\mathbf{H}$, вообще говоря, не совпадают по направлению, и уравнение (63.1) должно быть заменено более сложным соотношением, аналогичным уравнению (21.8).

[2]) В конце этого параграфа будет показано, что поляризуемости диэлектриков α, строго говоря, соответствует не восприимчивость $\varkappa$, а величина $\frac{\varkappa}{1+4\pi\varkappa} = \frac{\varkappa}{\mu}$ (см. (63.4)).

Наконец, намагничение **I** третьего класса магнетиков, названных *ферромагнетиками* по латинскому названию важнейшего их представителя — железа (ferrum), не только не пропорционально напряженности поля **H**, но, вообще говоря, вовсе не связано с ним сколько-нибудь простой функциональной зависимостью. Так, например, в ферромагнетиках наблюдается явление так называемого *гистерезиса*, т. е. зависимости намагничения от предшествующей истории данного образца ферромагнитного вещества. Это значит, что величина намагничения **I** ферромагнетика зависит не только от напряженности **H** магнитного поля в нем, но также и от того, находился ли ранее данный образец ферромагнетика в магнитном поле, каковы были числовая величина и направление напряженности этого поля и т. д. Тесно связан с гистерезисом и *остаточный*, или «*постоянный*», *магнетизм* ферромагнетиков, заключающийся, как уже упоминалось, в том, что после исчезновения внешнего намагничивающего поля ферромагнетики могут сохранять состояние намагничения и благодаря этому продолжают возбуждать «собственное» магнитное поле (постоянные магниты).

Таким образом, хотя и можно формально определить магнитную восприимчивость $\varkappa$ ферромагнетиков как отношение намагничения **I** к напряженности поля **H** [уравнение (63.1)], однако в ферромагнетиках (в отличие от диа- и парамагнетиков) этот коэффициент не является материальной константой, зависящей лишь от химического состава тела, его температуры и других физических условий. Огромное количество экспериментальных исследований посвящено определению весьма сложной зависимости $\varkappa$ от напряженности поля **H**, от предшествующей истории данного образца ферромагнитного вещества и т. д. В качестве примера укажем, что восприимчивость $\varkappa$ мягкого железа при нарастании поля возрастает с 5–10 единиц до нескольких сотен ($\varkappa$ есть число отвлеченное) и затем вновь падает, причем значение этого коэффициента весьма существенно зависит от способа изготовления и термической обработки образца металла, а также от незначительных химических примесей в нем.

2. Помимо всех прочих обстоятельств, уже один только факт нелинейной зависимости намагничения **I** от напряженности поля чрезвычайно усложняет даже формальную феноменологическую теорию поля в ферромагнетиках, ибо нелинейность уравнений поля влечет за собой нарушение принципа суперпозиции полей [1]).

[1]) Напряженность поля нескольких источников поля только в том случае равна сумме напряженностей полей, возбуждаемых каждым из этих источников в отдельности (принцип суперпозиции полей), если уравнения поля линейны.

Ввиду сложности магнитных свойств ферромагнетиков мы ограничимся в ближайших параграфах рассмотрением диа- и парамагнетиков и отложим рассмотрение ферромагнетиков до конца этой главы. Поэтому вплоть до § 71 включительно мы, если только явно не будет оговорено противное, будем под магнетиками понимать только пара- и диамагнетики. При этом в ряде вопросов (например, в вопросе о пондеромоторных силах, испытываемых магнетиками, — § 66) можно будет для упрощения рассуждений воспользоваться тем, что сколько-нибудь значительной магнитной восприимчивостью $\varkappa$ обладают лишь ферромагнетики (в которых $\varkappa$ может достигать сотен единиц), восприимчивость же пара- и в особенности диамагнетиков чрезвычайно мала [1]).

3. Внося уравнение (63.1) в уравнение (62.9), получаем

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I} = (1 + 4\pi\varkappa)\mathbf{H}.$$

Введем по аналогии с диэлектрической постоянной ε *магнитную проницаемость* среды μ, определяемую уравнением

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa; \tag{63.2}$$

тогда последнее уравнение примет вид

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{63.3}$$

Из сказанного выше о восприимчивости $\varkappa$ вытекает, что в диамагнетиках $\mu < 1$, в вакууме $\mu = 1$ и, наконец, в парамагнетиках $\mu > 1$.

Заметим, что из (63.1) и (63.3) следует:

$$\mathbf{I} = \frac{\varkappa}{\mu}\mathbf{B}. \tag{63.4}$$

Так как именно $\mathbf{B}$, а не $\mathbf{H}$ является средней напряженностью микроскопического поля [уравнение (62.6)], то коэффициент $\frac{\varkappa}{\mu}$ имеет более простой физический смысл, чем коэффициент $\varkappa$ (в частности, именно $\frac{\varkappa}{\mu}$, а не $\varkappa$ соответствует в электрическом случае коэффициенту поляризуемости диэлектриков α).

---

[1]) Отношение восприимчивости $\varkappa$ к плотности тела δ (так называемая восприимчивость единицы массы) лежит для парамагнетиков примерно в пределах от 10^{-4} до 10^{-5}, а для диамагнетиков — от 10^{-6} до 10^{-7} СГС-единиц Для наиболее диамагнитного из всех веществ — висмута — $\varkappa$ равно приблизительно 2 10^{-5}.

Об уподоблении сверхпроводников идеальному диамагнетику, т е телу с магнитной проницаемостью $\mu = 0$ и восприимчивостью $\varkappa = -1/4\pi$, см *примечание на с* 198

§ 64. Полная система уравнений поля постоянных токов. Однородная магнитная среда

1. Система полученных в § 63 уравнений

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0,\\ \mathbf{B}=\mu\mathbf{H},\\ \operatorname{Div}\mathbf{B}=0,\quad \operatorname{Rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}\end{gathered}\tag{C}$$

представляет собой *полную* систему уравнений постоянного магнитного поля в произвольной (но не ферромагнитной) среде. Это значит, что системой (C) магнитное поле определяется *однозначно*, если только известно распределение объемных и поверхностных электрических токов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{i}$ и значение магнитной проницаемости μ [или, что, согласно уравнению (63.2), сводится к тому же, значение восприимчивости $\varkappa$] в каждой точке среды и если на бесконечности удовлетворено условие (49.10): HR^2 при $R\to\infty$ остается конечным.

Доказательство полноты системы (C) вполне аналогично доказательствам полноты систем уравнений (A) и (B), изложенным в § 22 и 49, и мы предоставляем провести его читателю.

Из однозначности системы (C), в частности, следует [ср. аналогичный вывод из системы (A′) в § 22], что при отсутствии токов проводимости (и при отсутствии ферромагнетиков) постоянное магнитное поле тождественно равно нулю. Стало быть, наличие (неферромагнитных) магнетиков лишь видоизменяет поле токов; в отсутствие же последних намагничение магнетиков не может сохранять постоянное во времени и отличное от нуля значение — оно спадает до нуля, и магнитное поле исчезает.

При $\mu=1$ система (C), как и следовало ожидать, полностью совпадает с уравнениями магнитного поля в вакууме [система (B), § 49].

2. Рассмотрим случай однородной магнитной среды (μ и $\varkappa$ постоянны), в которой система уравнений (C) принимает вид [1])

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\quad \operatorname{div}\mathbf{H}=0,\tag{64.1}$$

так как при постоянном μ

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=\operatorname{div}\frac{\mathbf{B}}{\mu}=\frac{1}{\mu}\operatorname{div}\mathbf{B}=0.$$

Эта система уравнений для вектора $\mathbf{H}$ полностью совпадает с системой (B) уравнений магнитного поля токов в отсутствие

[1]) Пограничных условий, однозначно вытекающих из дифференциальных уравнений, для краткости не выписываем

магнетиков (см. § 49): постоянный фактор μ из нее выпадает. Таким образом, при *заполнении всего поля однородным магнетиком напряженность магнитного поля токов не изменяется*, оставаясь такой же, как и в отсутствие магнетиков (т. е. как при $\mu = 1$); магнитная же индукция $\mathbf{B}$ возрастает в μ раз. В этом проявляется отмеченное в § 62 соответствие между *напряженностью* магнитного поля $\mathbf{H}$ и *индукцией* электрического поля $\mathbf{D}$: индукция электрического поля $\mathbf{D}$ также не изменяется, если при заданном распределении (свободных) зарядов заполнить все поле однородным диэлектриком; напряженность же электрического поля возрастает при этом в $1/\varepsilon$ раз [1]) (см. § 23).

3. Вектор-потенциал магнитного поля в общем случае определяется уравнениями (62.10), (46.7), (62.11) и (61.7), которые мы сопоставим здесь еще раз:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \operatorname{div}\mathbf{A} = 0, \quad \nabla^2\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + c\operatorname{rot}\mathbf{I}),$$
$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j} + c\operatorname{rot}\mathbf{I}}{R}\,dV + \frac{1}{c}\int\frac{[\mathbf{n}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)]}{R}\,dS. \tag{64.2}$$

В двух последних из этих уравнений можно с помощью уравнения (63.1) выразить $\mathbf{I}$ через $\mathbf{H}$. Однако в случае неоднородной среды ($\mu \neq \text{const}$) это приводит к довольно сложным выражениям; кроме того, непрерывность векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$, а вместе с тем и непрерывность производных вектора $\mathbf{A}$, вообще говоря, нарушается на границе раздела сред различной проницаемости μ. Поэтому мы не будем входить здесь в рассмотрение общего случая и ограничимся лишь рассмотрением векторного потенциала для *поля токов в однородной среде* (μ и $\varkappa$ постоянны). В этом случае вектор $\mathbf{I}$ непрерывен, и поверхностный интеграл в последнем из уравнений (64.2) отпадает. Далее, приняв во внимание уравнения (63.1), (62.7) и (63.2), получаем

$$\mathbf{j} + c\operatorname{rot}\mathbf{I} = \mathbf{j} + c\varkappa\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + 4\pi\varkappa\mathbf{j} = \mu\mathbf{j},$$

и, следовательно,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\int\mathbf{j}\frac{dV}{R}, \quad \nabla^2\mathbf{A} = -\frac{4\mu\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{64.3}$$

Таким образом, вектор-потенциал токов в однородной магнитной среде в μ раз больше, чем в вакууме. Это обстоятельство вполне соответствует упомянутой выше независимости напряженности поля токов в однородной среде от проницаемости этой среды; действительно, на основании уравнений (63.3) и (62.10) получаем

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

[1]) Сопоставляя $\mathbf{H}$ с $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ с $\mathbf{E}$, мы, очевидно, должны сопоставить μ не с ε, а с $1/\varepsilon$.

В поле линейных токов (т. е., в сущности, на расстояниях от токов, больших по сравнению с их сечением) первая из формул (64.3) принимает вид [ср. уравнение (46.3)]

$$\mathbf{A} = \frac{\mu J}{c} \oint \frac{d\mathbf{s}}{R} \qquad (\mu = \text{const}). \tag{64.4}$$

Вообще говоря, формулы (64.3) и (64.4) строго справедливы лишь в том случае, если μ постоянно не только во всем пространстве, окружающем проводники, по которым течет ток, но если и сами эти проводники обладают той же самой проницаемостью μ.

Задача 32. Показать, что для тока, текущего по бесконечному прямолинейному цилиндрическому проводнику, первое уравнение (64.3) строго справедливо в окружающей проводник среде даже в том случае, если проницаемость μ' проводника отлична от проницаемости окружающей среды μ; при этом проводник может быть заключен в цилиндрическую оболочку произвольной проницаемости μ'' (изоляция).

§ 65. Механические силы, испытываемые токами в магнитном поле. Взаимодействие токов

1. Плотность сил, испытываемых токами в магнитном поле, в отсутствие магнетиков определяется формулой (44.5)

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}[\mathbf{jH}].$$

Ввиду атомистического строения проводников истинное микроскопическое поле $\mathbf{H}_{\text{микро}}$ весьма значительно меняется в них даже на протяжении атомарных расстояний. Применяя же формулу (44.5) в микроскопической теории, мы должны, очевидно, понимать в ней под $\mathbf{H}$ *среднее* значение микроскопического поля. В магнитных средах это среднее значение $\overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}}$, как мы видели, принято обозначать буквой $\mathbf{B}$ и называть *индукцией* магнитного поля. Стало быть, если учесть, что обтекаемые током проводники, вообще говоря, способны намагничиваться, то формулу (44.5) нужно записать следующим образом [1]:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}[\mathbf{j}\overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}}] = \frac{1}{c}[\mathbf{jB}]. \tag{65.1}$$

При $\mu = 1$ индукция $\mathbf{B}$ равна $\mathbf{H}$, так что формула (65.1) совпадает с прежней формулой (44.5).

[1] Приведенный вывод формулы (65.1) страдает тем недостатком, что мы не учитываем в нем возможной разницы между средним значением произведения $\overline{[\mathbf{j}_{\text{пр}}\mathbf{H}_{\text{микро}}]}$ и произведением средних значений сомножителей $[\mathbf{jB}]$. Более строгое доказательство формулы (65 1) будет дано в § 83

Итак, силы, испытываемые током в магнитном поле, пропорциональны *индукции*, а не напряженности этого поля.

Обращаясь от токов конечного сечения к токам линейным, легко убедиться, что элемент $d\mathbf{s}$ длины линейного тока испытывает силу [ср. уравнение (42.1)]

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} J[d\mathbf{s}\,\mathbf{B}]. \tag{65.2}$$

2. Обратимся теперь к силам, действующим на произвольный замкнутый ток в целом. При определении этих сил мы можем повторить все рассуждения § 50–52, проведенные без учета намагничения, с тем только изменением, что соответственно переходу от формулы (44.5) к формуле (65.1) нам придется во всех формулах этих параграфов заменить $\mathbf{H}$ на $\mathbf{B}$. Это относится, в частности, и к определению магнитного потока Φ через контур тока L; при выводе выражения (50.2) для Φ мы воспользовались уравнением (46.2)

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

которое в магнитных средах должно быть заменено уравнением (62.10)

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Соответственно этому вместо уравнения (50.2) получаем аналогичное выражение для *потока магнитной индукции* через охватываемую контуром L поверхность S; величину этого потока в отличие от Φ обозначим через Ψ:

$$\Psi = \int\limits_S B_n\, dS = \int\limits_S \operatorname{rot}_n \mathbf{A}\, dS = \oint\limits_L A_s\, ds. \tag{65.3}$$

Эта формула показывает, что поток магнитной индукции через произвольную поверхность S зависит лишь от положения и формы контура L этой поверхности и имеет одинаковое значение для всех поверхностей, опирающихся на один и тот же контур. При $\mu = 1$ получаем $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ и $\Phi = \Psi$, и уравнение (65.3) совпадает с прежним уравнением (50.2).

Потенциальная функция токов в магнитном поле при учете магнитных свойств среды выражается формулой

$$U = -\frac{1}{c} J\Psi, \tag{65.4}$$

которая получается из прежней формулы (50.4) заменой Φ на Ψ. С помощью этой функции можно определить как обобщенные пондеромоторные силы магнитного поля Θ_i, так и работу этих сил δA [см. уравнения (50.5) и (50.6)]:

$$\Theta_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad \delta A = -(\delta U). \tag{65.5}$$

3. Все приведенные в этом параграфе формулы применимы, очевидно, в любой неоднородной магнитной среде. Рассмотрим

теперь пондеромоторное взаимодействие двух линейных токов, предположив для простоты, что все поле заполнено однородной в магнитном отношении средой ($\mu = \text{const}$). В этом случае вектор-потенциал поля $\mathbf{A}$ выразится формулой (64.4). Повторяя выкладки § 51 и 52 и принимая во внимание, что $\mathbf{A}$ пропорционально μ, мы придем к следующей совокупности формул:

$$\Psi_{ik} = \frac{1}{c} L_{ik} J_k \qquad (i, k = 1, 2), \tag{65.6}$$

$$L_{21} = L_{12} = \mu \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{s}_1\, d\mathbf{s}_2}{R} \text{ [ср. уравнение (51.3)]}, \tag{65.7}$$

$$L_{11} = \frac{\mu}{J_1^2} \int_{V_1} \int_{V_1} \frac{\mathbf{j}_1 \mathbf{j}_1'\, dV\, dV'}{R} \text{ [ср. уравнение (52.4)]}.$$

Потенциальная функция токов U по-прежнему будет определяться уравнением (52.9):

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22} = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2\right). \tag{65.8}$$

Таким образом, *в однородной магнитной среде коэффициенты взаимной индукции и самоиндукции токов* L_{12} и L_{11}, а стало быть, *и потенциальная функция* U *и пондеромоторные силы взаимодействия токов* Θ_i *прямо пропорциональны проницаемости среды* μ.

4. В том случае, если среда неоднородна в магнитном отношении ($\mu \neq \text{const}$), вектор-потенциал токов $\mathbf{A}$ не может быть выражен простой формулой типа (64.4), и, таким образом, формулы (65.7) перестают быть применимыми. Однако если только в поле нет ферромагнетиков, то вектор-потенциал произвольного тока J будет, очевидно, по-прежнему пропорционален силе этого тока J [1]). Поэтому поток магнитной индукции $\Psi_{21} = \int \mathbf{A}_2\, d\mathbf{s}_1$, посылаемый током J_2 через контур тока J_1 [ср. уравнение (51.2)], может быть по-прежнему выражен в виде произведения

$$\Psi_{21} = \frac{1}{c} J_2 L_{21},$$

причем коэффициент взаимной индукции будет зависеть лишь от геометрической конфигурации токов, распределения их по сечениям проводников и т. д., но не от силы тока в них.

Таким образом, в отличие от (65.7) формула (65.6), а также, как легко убедиться, и формула (65.8) остаются справедливыми и в произвольной магнитной среде в *отсутствие ферромагнетиков*, так как при их выводе делалось предположение о пропор-

[1]) В ферромагнитных же средах нарушается пропорциональность между вектором $\mathbf{B}$, определяемым ротором вектор-потенциала $\mathbf{A}$, и напряженностью поля $\mathbf{H}$, ротор которой определяется плотностью токов $\mathbf{j}$.

циональности вектор-потенциала силе тока. Заметим, что при выводе формулы (52.11)

$$U = -\frac{1}{2c}\int \mathbf{A}\mathbf{j}\,dV \tag{65.9}$$

этого предположения не делалось.

5. В заключение заметим следующее. Значения характеризующих магнитное поле векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ могут быть измерены на опыте путем измерения пондеромоторных сил, испытываемых в этом поле несущими ток проводниками и постоянными магнитами (например, магнитной стрелкой, которую при известных условиях можно рассматривать как магнитный диполь).

С этой целью удобнее всего воспользоваться либо формулой (65.1), связывающей испытываемую элементом тока силу $\mathbf{f}$ с индукцией $\mathbf{B}$, либо формулой (56.7), связывающей момент пары сил, испытываемых магнитным диполем момента $\mathbf{M}$, с напряженностью поля $\mathbf{H}$ [1]). Конечно, при измерениях необходимо следить за тем, чтобы внесение измерительного прибора (тока или стрелки) не влекло за собой сколько-нибудь существенного изменения измеряемого поля.

Однако внесение измерительных приборов в поле возможно лишь в том случае, если исследуемый участок его заполнен газообразной или жидкой средой. Если же среда твердая, то для возможности измерений необходимо проделать в ней соответствующие отверстия, причем, конечно, поле $\mathbf{H}'$ внутри этих отверстий будет, вообще говоря, отлично от поля $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ в смежных точках твердой среды.

Нетрудно, однако, установить связь между $\mathbf{H}'$, с одной стороны, и $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$, с другой (см. задачу 33).

З а д а ч а 33. Показать, исходя из уравнений (62.12) и (62.14), что напряженность поля $\mathbf{H}'$ в средней части длинной и узкой щели, проделанной в твердом магнетике, равна *напряженности* поля $\mathbf{H}$ в смежных со щелью точках магнетика, если эта щель *параллельна* вектору $\mathbf{H}$, и что $\mathbf{H}'$ равна *индукции* $\mathbf{B}$ в смежных точках магнетика, если эта щель *перпендикулярна* к вектору $\mathbf{H}$. Сравни задачу 17 (§ 22).

§ 66. Пондеромоторные силы, испытываемые магнетиками в магнитном поле

1. Механические силы, испытываемые магнетиками в магнитном поле, должны сводиться к силам, испытываемым молекулярными токами. Согласно (57.10) и (56.8) сила, действующая

[1]) В § 72 мы убедимся, что силы, испытываемые удлиненными стержнеобразными постоянными магнитами, определяются не индукцией $\mathbf{B}$, а напряженностью $\mathbf{H}$ внешнего поля.

на систему замкнутых токов, характеризуемую магнитным моментом $\mathbf{M}$, равна

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{MH}) = \mathbf{M}\nabla \cdot \mathbf{H} + [\mathbf{M}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}]. \qquad (66.1)$$

Для определенности предположим, что магнетик состоит из отдельных молекул [1]. Применяя (66.1) к отдельным молекулам магнетика, мы должны, очевидно, понимать под $\mathbf{M}$ магнитный момент молекулы, а под $\mathbf{H}$ напряженность истинного микроскопического поля $\mathbf{H}_{\text{микро}}$ в месте нахождения молекулы. Намагничение пара- и диамагнетиков во всех доступных нам полях настолько слабо (см. сноску на с. 292), что мы вправе пренебречь в них различием между средним значением *поля, действующего на молекулу* (магнитный диполь), и средним значением $\mathbf{B}$ поля $\mathbf{H}_{\text{микро}}$ по всем точкам физически бесконечно малого объема (ср. § 28). Поэтому *средняя* сила, испытываемая отдельной молекулой магнетика, эквивалентной элементарному току, будет определяться *средней* напряженностью микроскопического поля $\overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}}$, согласно уравнению (62.6) равной вектору магнитной индукции $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}\nabla \cdot \mathbf{B} + [\mathbf{M}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}], \qquad (66.2)$$

где знак среднего над $\mathbf{F}$ нами опущен.

Плотность $\mathbf{f}$ пондеромоторных сил, испытываемых магнетиком, т. е. сила, действующая на единицу объема магнетика, будет равна сумме сил, действующих на отдельные молекулы, находящиеся в единице объема:

$$\mathbf{f} = \sum \mathbf{F} = \sum \mathbf{M}\nabla \cdot \mathbf{B} + \sum [\mathbf{M}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}] = \left(\sum \mathbf{M}\right)\nabla \cdot \mathbf{B} + \left[\sum \mathbf{M} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{B}\right].$$

Воспользовавшись формулой (60.3), получаем окончательно

$$\mathbf{f} = \mathbf{I}\nabla \cdot \mathbf{B} + [\mathbf{I}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}]\ ^{2}). \qquad (66.3)$$

Наконец, если по рассматриваемому объему магнетика протекают, помимо токов молекулярных, еще и токи проводимости $\mathbf{j}$, то $\mathbf{f}$ определится суммой выражений (65.1) и (66.3):

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}[\mathbf{jB}] + \mathbf{I}\nabla \cdot \mathbf{B} + [\mathbf{I}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}]. \qquad (66.4)$$

[1]) В противном случае нужно только незначительно изменить форму рассуждений; результат остается прежним.

[2]) Отметим, что при выводе этой формулы мы пренебрегли разницей между средним значением векторных выражений типа $\overline{\mathbf{M}\nabla \cdot \mathbf{H}_{\text{микро}}}$ и соответствующими выражениями, образованными из средних значений векторов $\overline{\mathbf{M}}$ и $\overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}}$.

2. В уравнениях (66.3) и (66.4) можно выразить намагничение $\mathbf{I}$ через индукцию $\mathbf{B}$. Согласно (63.4) и (63.2)

$$\mathbf{I} = \frac{\varkappa}{\mu}\mathbf{B} = \frac{\mu - 1}{4\mu\pi}\mathbf{B}. \tag{66.5}$$

Внося это выражение в (66.3) и воспользовавшись формулой (47*), получаем

$$\mathbf{f} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu}\{\mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{B} + [\mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}]\} = \frac{\mu - 1}{8\pi\mu}\nabla B^2 \tag{66.6}$$

при отсутствии токов проводимости в рассматриваемом элементе среды, тогда как при $\mathbf{j} \neq 0$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}[\mathbf{jB}] + \frac{\mu - 1}{8\pi\mu}\nabla B^2. \tag{66.7}$$

Выражение (66.6) вполне аналогично (если не считать множителя μ в знаменателе) выражению (32.3), определяющему плотность сил, действующих на диэлектрики $\left(\mathbf{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\nabla E^2\right)$. Однако $\varepsilon - 1$ всегда положительно, между тем как $\mu - 1 = 4\pi\varkappa$ положительно лишь в парамагнетиках, тогда как в диамагнетиках $\mu - 1 < 0$. Стало быть, сила (66.7) *увлекает парамагнитные* вещества *в области, где индукция* поля $\mathbf{B}$ имеет *максимальное* значение, и наоборот, *стремится удалить диамагнитные* вещества из этих областей (ср. § 32). Так как напряженность поля обыкновенного стержнеобразного магнита возрастает при приближении к его полюсу, то *парамагнетики* (например, медь) должны *притягиваться магнитом*, а *диамагнетики* (например, висмут) *отталкиваться им.*

Ввиду весьма малой магнитной восприимчивости диамагнитных веществ (см. с. 292) испытываемые диамагнетиками силы, вообще говоря, весьма малы. Тем не менее большинство экспериментальных методов определения величин $\varkappa$ и μ для пара- и диамагнетиков основано на измерении пондеромоторных сил (66.6), испытываемых этими телами в магнитном поле.

Надо отметить, что в литературе встречается целый ряд различных выражений для $\mathbf{f}$, отличающихся от формулы (66.6). Впрочем, ввиду того, что в диа- и парамагнетиках μ весьма мало отличается от единицы, все эти выражения приблизительно эквивалентны друг другу.

В § 83 мы приведем строгий вывод величины пондеромоторных сил в магнетиках из выражения энергии магнитного поля; при этом выводе выяснятся также условия применимости формул этого параграфа.

§ 67. Дополнение к выводу макроскопических уравнений магнитного поля в магнетиках [1])

1. В § 62 мы вывели дифференциальные уравнения макроскопического поля путем усреднения соответствующих микроскопических уравнений. При этом мы воспользовались уравнением (61.9):

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} = c \operatorname{rot} \mathbf{I}, \tag{67.1}$$

которое было получено нами в § 61 довольно окольным путем. Ввиду фундаментальной важности уравнения (67.1) мы посвятим настоящий параграф непосредственному выводу этого уравнения из основных положений электронной теории магнетиков.

2. Рассмотрим некоторый физически бесконечно малый объем магнетика V, ограниченный поверхностью S. По определению [см. уравнение (25.1)]

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} V = \int_V \mathbf{j}_{\text{мол}}\, dV, \tag{67.2}$$

где $\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}}$ означает среднее макроскопическое значение плотности молекулярных токов.

В магнитном отношении молекулярный ток, как и всякий элементарный ток, вполне характеризуется заданием его магнитного момента $\mathbf{M}$ Поэтому с целью упрощения вычислений мы можем предположить, что молекулярные токи являются токами линейными и что контур каждого молекулярного тока представляет собой окружность. Если радиус кругового.тока равен a, а сила его J, то, согласно уравнению (56 2),

$$M = \frac{JS}{c} = \frac{J\pi a^2}{c}.$$

В окончательный результат наших вычислений ни a, ни J явно входить не будут, так что наше специальное допущение, по существу, общности рассуждений не ограничивает. Кроме того, законность замены молекулярных токов токами линейными может быть строго обоснована разложением каждого молекулярного тока на совокупность бесконечно тонких нитей тока, каждая из которых является током линейным.

Считая все молекулярные токи линейными, можем, согласно уравнению (44 1), написать

$$\mathbf{j}_{\text{мол}}\, dV = J\, d\mathbf{s}.$$

Стало быть, уравнение (67.2) примет вид

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} V = \sum_V J\, d\mathbf{s} = J \sum_V d\mathbf{s},$$

где суммирование должно быть распространено на все расположенные в объеме V элементы молекулярных токов (для простоты предполагаем, что все эти токи обладают одинаковой силой)

3. Если какой-либо элементарный ток целиком расположен внутри объема V, то векторная сумма всех его элементов будет равна нулю (ибо ток замкнут). Стало быть, сумма $\sum_V d\mathbf{s}$ сведется к сумме элементов тех молекулярных токов, которые рассекаются поверхностью S, ограничивающей объем V, и, таким образом, лишь частью находятся внутри V. Далее, ес-

[1]) Параграф этот может быть опущен при первом чтении книги.

ли поверхность S рассекает какой-нибудь из круговых токов по хорде AB (рис. 64), то векторная сумма элементов $d\mathbf{s}$ этого тока, лежащих внутри поверхностей S, будет, очевидно, равна замыкающей хорде AB. Следовательно, если эта хорда AB по величине и направлению равна $\mathbf{s}$, то $\sum d\mathbf{s} = \mathbf{s}$. Величина и направление вектора $\mathbf{s}$ будут зависеть от направления плоскости тока, которая характеризуется направлением перпендикулярного к ней вектора $\mathbf{M}$, и от расстояния центра тока от поверхности S.

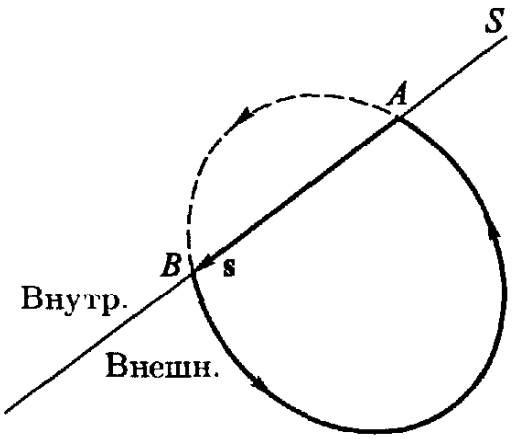

Рис. 64

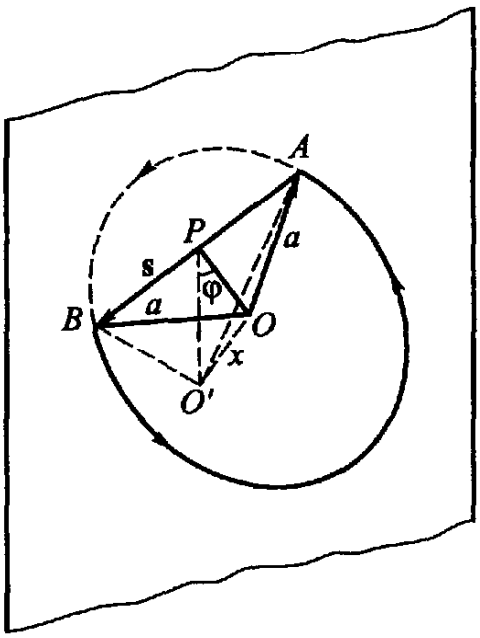

Рис. 65

Пусть $\mathbf{M}$ составляет с внешней нормалью $\mathbf{n}$ к поверхности S угол α и пусть центр тока O находится на расстоянии $OO' = x$ от поверхности S (рис. 65), причем x мы будем считать отрицательным или положительным в зависимости от того, находится ли O внутри или вне S. Проведем через OO' плоскость, перпендикулярную к AB, точку пересечения ее с AB обозначим через P. Двугранный угол OPO' между поверхностью S и плоскостью тока обозначим через φ. Этот угол не больше, чем $\pi/2$, и либо равен углу α между нормалями $\mathbf{n}$ и $\mathbf{M}$ к поверхности S и плоскости тока, либо равен $\pi - \alpha$ (если $\alpha > \pi/2$). Так как OO' перпендикулярно поверхности, то

$$OP = |x| / \sin\varphi.$$

Далее, так как OA и OB равны радиусу тока a, то

$$s = 2\sqrt{OA^2 - OP^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2/\sin^2\varphi} = 2\sqrt{a^2\sin^2\varphi - x^2}/\sin\varphi.$$

4. Рассмотрим теперь совокупность молекулярных токов, направление магнитного момента $\mathbf{M}$ которых лежит внутри бесконечно малого телесного угла $d\omega$. Число этих токов в единице объема магнетика обозначим через $N(\omega)\,d\omega$; число таких токов в слое толщиной dx и с основанием dS, находящемся на расстоянии x от элемента dS пограничной поверхности S, будет равно

$$N(\omega)\,d\omega\,dS\,dx.$$

Если

$$-a\sin\varphi < x < +a\sin\varphi,$$

то все эти токи будут пересекаться пограничной поверхностью, причем пересекаться они будут по равным и параллельным хордам $\mathbf{s}$. Поэтому абсолютная величина суммы относящихся к этим токам членов суммы $J\sum d\mathbf{s}$ будет равна

$$J\left|\sum d\mathbf{s}\right| = JsN(\omega)\,d\omega\,dS\,dx = 2J\frac{\sqrt{a^2\sin^2\varphi - x^2}}{\sin\varphi}N(\omega)\,d\omega\,dS\,dx.$$

Интегрируя это выражение по x от $-a\sin\varphi$ до $+a\sin\varphi$, получим значение соответствующей суммы для всех токов, пересекаемых элементом граничной поверхности dS, направление магнитного момента которых лежит внутри угла $d\omega$ [1]):

$$J\left|\sum ds\right| = 2JN(\omega)\,d\omega\,dS\int\limits_{-a\sin\varphi}^{+a\sin\varphi}\frac{\sqrt{a^2\sin^2\varphi - x^2}}{\sin\varphi}\,dx =$$

$$= N(\omega)\,d\omega\,dS\cdot J\pi a^2\sin\varphi = N(\omega)\,dw\,dS\cdot cM\sin\varphi.$$

Чтобы определить направление вектора $J\sum ds$, относящегося к токам указанного направления, заметим, что хорда $\mathbf{s}$ каждого тока лежит как в плоскости элемента dS, так и в плоскости самого тока, и следовательно, перпендикулярна как к $\mathbf{n}$, так и к $\mathbf{M}$. Стало быть, $\mathbf{s}$, а вместе с тем и $J\sum d\mathbf{s}$, должно быть параллельным $\pm[\mathbf{nM}]$; из рассмотрения рисунков 64 и 65 следует, что знак здесь нужно выбрать положительный. Так как, с другой стороны,

$$|[\mathbf{nM}]| = M|\sin\alpha| = M\sin\varphi$$

(поскольку угол $\varphi \leqslant \pi/2$ и равен либо α, либо $\pi-\alpha$), то последнее уравнение можно записать в векторной форме так:

$$J\sum d\mathbf{s} = N(\omega)\,d\omega\cdot dS\,c\,[\mathbf{nM}] = c\,[d\mathbf{S}\,\mathbf{M}]N(\omega)\,d\omega,$$

где, как обычно, вектор $d\mathbf{S}$ считается направленным по внешней нормали $\mathbf{n}$.

Чтобы получить полную сумму всех элементов $d\mathbf{s}$ длины токов, отсекаемых элементом граничной поверхности dS, достаточно, очевидно, проинтегрировать последнее выражение по ω; при этом получаем

$$J\sum d\mathbf{s} = c\int[d\mathbf{S}\,\mathbf{M}]N(\omega)\,d\omega = c\left[d\mathbf{S}\int\mathbf{M}N(\omega)\,d\omega\right].$$

Входящий в это выражение интеграл $\int\mathbf{M}N(\omega)\,d\omega$ представляет собой векторную сумму моментов всех молекул, находящихся в единице объема магнетика, и, стало быть, согласно уравнению (60.3), равен намагничению магнетика $\mathbf{I}$. Таким образом,

$$J\sum d\mathbf{s} = \mathrm{c}\,[d\mathbf{S}\cdot\mathbf{I}].$$

Наконец, полная сумма всех элементов $d\mathbf{s}$ длины молекулярных токов, отсекаемых всеми элементами замкнутой поверхности S, будет равна

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}}V = J\sum_V d\mathbf{s} = c\oint_S[d\mathbf{S}\cdot\mathbf{I}].$$

Последний интеграл может быть на основании уравнения (56*) преобразован в интеграл по объему V, так что окончательно получаем

$$\frac{1}{c}\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} = \frac{1}{V}\oint_S[d\mathbf{S}\cdot\mathbf{I}] = \frac{1}{V}\int_V \operatorname{rot}\mathbf{I}\,dV.$$

Правая часть этого уравнения представляет собой, согласно уравнению (25.1), среднее значение ротора $\mathbf{I}$ в физически бесконечно малом объеме V. Так как сам вектор $\mathbf{I}$ является величиной микроскопической и равен, согласно (60.4), средней (по физически бесконечно малому объему) плотности

[1]) Применяем формулу $\int\sqrt{b^2-x^2}\,dx = [b^2\arcsin(x/b) + x\sqrt{b^2-x^2}]/2$.

магнитного момента магнетика, то среднее значение $\operatorname{rot}\mathbf{I}$ можно заменить просто на $\operatorname{rot}\mathbf{I}$ Таким образом, получаем

$$\frac{1}{c}\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} = \operatorname{rot}\mathbf{I},$$

что совпадает с уравнением (67.1), которое и требовалось доказать

5 Заметим, что из этого уравнения, в частности, вытекает, что средняя плотность молекулярных токов в равномерно намагниченной среде равна нулю В этом легко убедиться и непосредственно, рассматривая, например, объем V кубической формы Благодаря постоянству вектора $\mathbf{I}$ противолежащие грани куба будут рассекать одинаковое число молекулярных токов данного направления M и притом так, что участки этих токов, отсеченные одной гранью, будут в среднем как раз дополняться до полного замкнутого контура участками, отсеченными гранью противолежащей Поэтому векторная сумма отсеченных участков будет равна нулю.

§ 68. Механизм намагничения магнетиков. Теорема Лармора

1 До сих пор мы не делали никаких специальных предположений о механизме намагничения магнетиков, и, помимо совершенно общих положений теории магнетизма, основывались только на том факте, что намагничение диа- и парамагнетиков пропорционально напряженности магнитного поля в них. Теперь же мы рассмотрим в общих чертах самый механизм намагничения различных тел, что позволит нам выяснить причину разных знаков намагничения в диа- и парамагнетиках, установить связь между магнитной восприимчивостью и атомистическим строением магнетика и т. д.

Всякая теория атомарных явлений и процессов должна основываться на квантовой механике. В явлениях же намагничения специфические квантовые закономерности играют по ряду причин еще гораздо более существенную роль, чем, например, в явлениях поляризации диэлектриков. Прежде всего, последовательная электронная теория с неизбежностью приводит в рамках классической физики к выводу, что намагничение любого тела всегда должно равняться нулю! (см. § 71). Далее, если даже сделать чуждое классической физике допущение о дискретности возможных состояний движения электронов в атомах и молекулах (см. § 71), то все же этого оказывается недостаточно для объяснения ферромагнитных явлений

Однако изложение квантовой теории выходит за рамки этой книги. Поэтому мы при рассмотрении механизма намагничения принуждены будем в основном исходить из полуклассических — полуквантовых представлений *боровской теории* атома, позволяющих *качественно* ориентироваться в ряде интересующих нас явлений.

2. Рассмотрим простейший случай намагничения одноатомных газов и пренебрежем пока спином электронов В отсутствие внешнего магнитного поля электроны в каждом атоме находятся в некотором определенном состоянии движения. При внесении магнетика в магнитное поле $\mathbf{H}$ движение электронов изменится, ибо на них начнет действовать лоренцева сила (45.3):

$$\mathbf{F}_{л} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]. \tag{68.1}$$

Согласно *теореме Лармора*, которую мы сейчас докажем, это изменение движения электронов в первом приближении сводится к наложению на невозмущенное движение электронов добавочного вращения («*прецессии*») всех электронов вокруг направления магнитного поля $\mathbf{H}$ с угловой скоростью

$$\mathbf{o} = -\frac{e\mathbf{H}}{2mc}, \tag{68.2}$$

где e есть заряд электрона ($e < 0$), а m — его масса. Иными словами, если ввести вспомогательную систему координат S' с центром в ядре атома, вращающуюся с угловой скоростью $\mathbf{o}$ вокруг проходящей через ядро оси, совпадающей по направлению с $\mathbf{H}$, то по отношению к этой системе S' движение электронов при наличии поля будет в первом приближении таким же, каким оно было при отсутствии поля $\mathbf{H}$ по отношению к инерциальной (неподвижной) системе координат S.

Действительно, ввиду симметрии кулоновского поля ядра взаимодействие электронов с ядром не будет видоизменено их добавочной прецессией. Также не изменится и взаимодействие электронов друг с другом, ибо общая прецессия электронов не изменит их относительного расположения. Однако поскольку система S' вращается, постольку для поддержания прежнего движения электронов в ней уже не будет достаточно тех сил, которые поддерживали это движение в инерциальной системе координат; необходимо будет еще уравновесить силы инерции, а именно — силы центробежные и силы Кориолиса.

Центробежная сила пропорциональна произведению расстояния электрона от оси вращения на квадрат угловой скорости o^2, т е., согласно (68.2), пропорциональна квадрату напряженности поля H^2 [1]). Поэтому в первом приближении, в котором учитываются только величины, пропорциональные первой степени поля H, центробежными силами можно пренебречь.

[1]) Ибо в атоме расстояние электрона от оси вращения, проходящей через ядро атома, в первом приближении не зависит от H. Напротив, в случае движения в магнитном поле *свободного* электрона радиус R его орбиты, согласно (45.7), обратно пропорционален H, и поэтому центробежная сила пропорциональна первой, а не второй степени H

Кориолисова же сила, приложенная к i-му электрону ($i = 1, 2, \ldots, n$, где n есть число электронов в атоме), пропорциональна *первой степени* $\mathbf{H}$ и равна

$$\mathbf{F}_i^{(k)} = 2m[\mathbf{v}_i'\mathbf{o}],$$

где $\mathbf{v}_i'$ есть («относительная») скорость i-го электрона во вращающейся системе S', связанная с его («абсолютной») скоростью $\mathbf{v}_i$ в инерциальной системе S соотношением

$$\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_i - [\mathbf{o}\mathbf{r}_i],$$

где $\mathbf{r}_i$ есть расстояние i-го электрона от оси вращения. С точностью до членов второго порядка относительно $\mathbf{H}$ можно в выражении для $\mathbf{F}_i^{(k)}$ заменить $\mathbf{v}_i'$ на $\mathbf{v}_i$:

$$\mathbf{F}_i^{(k)} = 2m\,[\mathbf{v}_i\mathbf{o}].$$

Внося сюда значение $\mathbf{o}$ из (68.2), получаем

$$\mathbf{F}_i^{(k)} = -\frac{e}{c}\,[\mathbf{v}_i\mathbf{H}],$$

что равно с обратным знаком лоренцевой силе (68.1), действующей на i-й электрон. Таким образом, лоренцева сила (68.1) действительно уравновешивается кориолисовой силой (с точностью до членов второго порядка относительно $\mathbf{H}$).

Итак, мы доказали, что при наличии поля *возможно* прежнее движение электронов в атоме, видоизмененное лишь общей их прецессией с угловой скоростью $\mathbf{o}$. Чтобы полностью доказать теорему Лармора, следовало бы еще показать, что эта возможность *действительно осуществляется* при (достаточно медленном) включении поля $\mathbf{H}$. Мы примем на веру это утверждение, доказательство которого излагается в теории атома, но зато приведем еще другой вывод формулы Лармора (68.2); при этом мы попутно получим ряд формул, которые понадобятся нам в дальнейших параграфах.

3. Для всякой системы частиц, движущихся в центральном поле сил, справедлив закон сохранения момента количества движения. В частности, суммарный момент количества движения электронов относительно атомного ядра, равный

$$\mathbf{K} = m\sum_{i=1}^{n}[\mathbf{R}_i\mathbf{v}_i], \tag{68.3}$$

остается в отсутствие внешних полей постоянным во времени (взаимодействие электронов друг с другом не нарушает постоянства $\mathbf{K}$). Здесь $\mathbf{R}_i$ есть расстояние i-го электрона от ядра, а $\mathbf{v}_i$ — его скорость.

С другой стороны, выражение (57.4) магнитного момента атома

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c}\int_V [\mathbf{Rj}]\,dV$$

может быть преобразовано следующим образом. Микроскопическая плотность тока $\mathbf{j}$ в каждой точке пространства может быть выражена через микроскопическую объемную плотность ρ зарядов в этой точке и через их скорость $\mathbf{v}$ [1]):

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}. \tag{68.4}$$

Действительно, $\mathbf{j}$, очевидно, параллельно или антипараллельно скорости зарядов $\mathbf{v}$ в зависимости от знака ρ. Далее, через перпендикулярную к $\mathbf{v}$ единичную площадку проходят все заряды, расположенные в цилиндре высоты $\mathbf{v}$, построенном на этой площадке как на основании, откуда и следует (68.4). Внося (68.4) в выражение для $\mathbf{M}$, получаем

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c}\int [\mathbf{Rv}]\rho\,dV. \tag{68.5}$$

С точки зрения боровской теории атома, эту формулу, выведенную, строго говоря, для замкнутых постоянных токов, можно применить к усредненному по времени движению электронов по орбитам внутри атома. При этом можно с достаточной точностью считать значение произведения $[\mathbf{Rv}]$ одинаковым во всех точках каждого отдельного электрона и, стало быть, можно вынести его за знак интеграла:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c}[\mathbf{Rv}]\int \rho\,dV = \frac{e}{2c}[\mathbf{Rv}],$$

где $e = \int \rho\,dV$ есть заряд электрона. В случае наличия в атоме нескольких электронов соответственно получим

$$\mathbf{M} = \frac{e}{2c}\sum_{i=1}^{n}[\mathbf{R}_i, \mathbf{v}_i]. \tag{68.6}$$

Сравнивая это выражение с уравнением (68.3), убеждаемся, что механический момент вращения электронов $\mathbf{K}$ пропорционален

[1]) Формулу (68 4) нельзя непосредственно перенести в макроскопическую теорию, ибо среднее значение произведения $\rho\mathbf{v}$ не равно, вообще говоря, произведению средних значений сомножителей Так, например, в проводнике, по которому течет ток, средняя плотность зарядов ρ может равняться нулю, хотя средняя плотность тока $\mathbf{j}$ и отлична от нуля, ибо в проводнике движутся заряды только одного знака (электроны) Формула (68 4) будет применима к этому случаю, если в ней под ρ понимать плотность только движущихся зарядов — электронов При этом условии она совпадает с уравнением (45 1), где ne есть макроскопическое значение плотности ρ зарядов электронов

магнитному моменту $\mathbf{M}$, создаваемому движением электронов по орбите:

$$\mathbf{M} = \eta \mathbf{K}, \tag{68.7}$$

причем $\mathbf{M}$ направлено прямо противоположно $\mathbf{K}$, ибо коэффициент пропорциональности η:

$$\eta = \frac{e}{2mc}, \tag{68.8}$$

отрицателен, так как заряд электрона $e < 0$.

4. В отсутствие внешних полей, как уже упоминалось, механический момент атома $\mathbf{K}$, а стало быть, и пропорциональный ему магнитный момент атома $\mathbf{M}$ постоянны во времени. При наличии же внешнего магнитного поля на атом действует пара сил, момент которой $\mathbf{N}$ равен [уравнения (56.7)]:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{MH}].$$

Если бы атом не обладал моментом количества движения, то под воздействием этой пары сил его магнитная ось стремилась бы установиться по направлению поля $\mathbf{H}$. Однако наличие момента количества движения $\mathbf{K}$ делает атом подобным в механическом отношении вращающемуся волчку (гироскопу). Известно, что если на вращающийся волчок начинает действовать пара сил, момент которой перпендикулярен к оси волчка, то ось эта начинает *прецессировать* вокруг направления сил, причем *угол наклона оси* к направлению сил *не изменяется* (ср. прецессию тяжелого волчка в поле сил тяжести).

Действительно, согласно известной теореме механики, под воздействием пары сил момента $\mathbf{N}$ конечная точка вектора момента количества движения $\mathbf{K}$ материальной системы перемещается с линейной скоростью $\frac{d\mathbf{K}}{dt}$, равной $\mathbf{N}$:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{N} = [\mathbf{MH}].$$

Внося сюда значение $\mathbf{M}$ из уравнения (68.7), получим

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \eta\,[\mathbf{KH}].$$

Поскольку, согласно (68.2) и (68.8),

$$\mathbf{o} = -\eta \mathbf{H}, \tag{68.9}$$

мы можем также написать

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = [\mathbf{oK}]. \tag{68.10}$$

Из этого уравнения следует, что вектор $\mathbf{K}$, а значит, и $\mathbf{M}$ будут вращаться около направления $\mathbf{o}$ с угловой скоростью o, или,

иными словами, будут вращаться с угловой скоростью, определяемой по величине и направлению вектором **o**. Это значит, что при возникновении магнитного поля **H** электронная оболочка атома начинает *прецессировать* вокруг направления поля с угловой скоростью *o*, причем *угол наклона магнитной оси* атома к направлению поля *остается неизменным.*

Так, например, если мысленно заменить совокупность внутриатомных токов линейным плоским замкнутым током (соответствующим в боровской теории орбите электрона), то вектор **K** будет перпендикулярен плоскости этого тока (плоскости орбиты) и прецессия этого вектора будет соответствовать прецессии плоскости тока (орбиты) с той же угловой скоростью **o** (рис. 66; нанесенный на рисунке вектор **ΔM** будет рассмотрен в § 69).

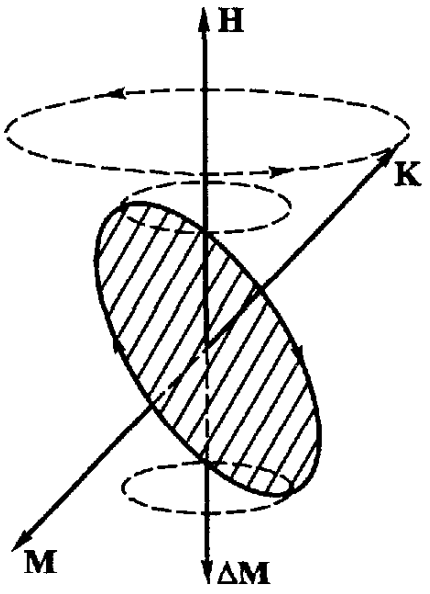

Рис 66

В этом и заключается содержание *теоремы Лармора*, которую мы, таким образом, доказали двумя различными способами. Недостаток второго доказательства состоит в том, что оно неприменимо к атомам, результирующий магнитный момент **M** которых в отсутствие внешнего поля равен нулю.

5. Все изложенное в этом параграфе строго применимо к изолированным атомам *газообразных* магнетиков. Однако качественно результаты этого параграфа применимы во всех тех случаях, когда электронная оболочка атомов или ионов может более или менее свободно вращаться вокруг ядра атома. Если электронная оболочка атома или иона обладает сферической симметрией (как, например, у атомов благородных газов или ионов с тем же числом электронов, как у благородных газов), то свободное вращение этой оболочки может иметь место и в жидких и в твердых телах.

Во всяком случае, опыт показывает в соответствии с более точной (чем излагаемая нами) теорией, что основные результаты § 68–70 с достаточной степенью точности применимы как к многоатомным газам, так и ко многим жидким и твердым пара- и диамагнетикам.

§ 69. Диамагнетизм

1. В отсутствие внешнего магнитного поля молекулярные токи в (неферромагнитных) магнетиках распределены совершенно хаотично, а поэтому намагничение магнетика (т. е. магнит-

ный момент единицы его объема) равно нулю. При внесении же магнетика в магнитное поле возникает *ларморова прецессия* электронных оболочек атомов, эквивалентная добавочному вращению электронов с угловой скоростью $\mathbf{o}$ вокруг проходящей через ядро атома оси, параллельной $\mathbf{H}$. Благодаря этому вращению электронов диамагнитный атом приобретает некоторый магнитный момент $\Delta\mathbf{M}$. Так как $\mathbf{o}$ направлено параллельно полю [ибо $\eta < 0$, см. уравнение (68.8)], то направление добавочного вращения электронов составляет с вектором $\mathbf{H}$ *правовинтовую* систему. Следовательно, направление «добавочного» тока $\Delta\mathbf{J}$, эквивалентного этому прецессионному движению *отрицательных* электронов, составляет с вектором $\mathbf{H}$ *левовинтовую* систему. Стало быть, магнитный момент $\Delta\mathbf{M}$, приобретаемый атомом в магнитном поле благодаря прецессии, направлен *против* магнитного поля $\mathbf{H}$ (см. рис. 66). Таким образом, в результате прецессии атомы приобретут обратный полю магнитный момент, т. е. тело намагнитится в направлении, обратном полю. В этом и заключается объяснение *диамагнетизма.*

Этот диамагнитный эффект имеет место и в парамагнитных телах, но, как мы покажем в следующем параграфе, полностью маскируется в них противоположным по знаку и значительно более сильным парамагнитным эффектом.

2. Чтобы определить числовое значение диамагнитной восприимчивости, заметим, что благодаря ларморовой прецессии электронной оболочки атома каждый объемный элемент $\rho\,dV$ заряда этой оболочки приобретает добавочную скорость

$$\Delta\mathbf{v} = [\mathbf{oR}],$$

где $\mathbf{R}$ есть расстояние элемента dV от ядра атома. Согласно уравнению (68.5), добавочный магнитный момент атома, соответствующий этой прецессии, равен

$$\Delta\mathbf{M} = \frac{1}{2c}\int [\mathbf{R}\cdot\Delta\mathbf{v}]\rho\,dV = \frac{1}{2c}\int [\mathbf{R}\,[\mathbf{oR}]]\rho\,dV. \tag{69.1}$$

Далее,

$$[\mathbf{R}\,[\mathbf{oR}]] = \mathbf{o}R^2 - \mathbf{R}(\mathbf{oR}).$$

Пусть ось z направлена по направлению $\mathbf{o}$, совпадающему с направлением $\mathbf{H}$. Тогда слагающая этого вектора по оси z будет равна

$$oR^2 - z(oz) = o(R^2 - z^2) = o(x^2 + y^2);$$

слагающие по осям x и y будут равны

$$-zox \quad \text{и} \quad -zoy.$$

По подстановке в интеграл и усреднении значения $\Delta\mathbf{M}$ по периоду прецессии слагающие по осям x и y дадут нуль, ибо благодаря прецессии электронов атом будет обладать в среднем по времени цилиндрической симметрией около оси z. Действительно, благодаря этой симметрии всякому элементу заряда $\rho\,dV$ с координатами x, y, z найдется равный элемент заряда с координатами $-x$, y, z, так что сумма выражений $-zox$ для этой пары элементов обратится в нуль.

Таким образом, среднее по времени значение $\Delta\mathbf{M}$ равно

$$\overline{\Delta\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{o}}{2c}\int \overline{(x^2+y^2)}\rho\,dV.$$

Последний интеграл равен, очевидно, произведению суммы зарядов электронов атома Ze (где Z означает число электронов в атоме) на среднее значение квадрата расстояния электронов от оси z:

$$\int \overline{(x^2+y^2)}\rho\, dV = Ze\overline{(x^2+y^2)}.$$

Внося, наконец, значение $\mathbf{o}$ из уравнения (68.2), получаем

$$\overline{\Delta\mathbf{M}} = \frac{1}{2c} Ze\mathbf{o}\overline{(x^2+y^2)} = -\frac{Ze^2}{4mc^2}\overline{(x^2+y^2)}\mathbf{H}. \tag{69.2}$$

Среднее по времени значение $\overline{x^2}$ будет иметь, вообще говоря, различное значение для различных атомов, в среднем же для различно ориентированных атомов оно, очевидно, будет равно

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \frac{1}{3}\overline{R^2},$$

где $\overline{R^2}$ есть средний квадрат расстояния электронов от ядра атома. Стало быть,

$$\overline{\Delta\mathbf{M}} = -\frac{Ze^2}{6mc^2}\overline{R^2}\mathbf{H},$$

а намагничение единицы объема диамагнетика равно

$$\mathbf{I} = N\cdot\overline{\Delta\mathbf{M}} = -\frac{NZe^2}{6mc^2}\overline{R^2}\mathbf{H}, \tag{69.3}$$

где N есть число атомов в единице объема.

Стало быть, восприимчивость диамагнетика равна

$$\varkappa = -\frac{NZe^2}{6mc^2}\overline{R^2}; \tag{69.4}$$

при постоянном объеме (т. е. при постоянном N) она от температуры не зависит.

Если с помощью квантовой механики вычислить средний квадрат расстояния электронов от ядра различных диамагнитных атомов, то формула (69.4) дает значение $\varkappa$, очень хорошо согласующееся с данными опыта.

Заметим, что $\mathbf{H}$ в (69.3) по смыслу означает среднюю напряженность микроскопического поля $\overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}}$ (если пренебречь отличием его от среднего эффективного поля, действующего на молекулу) и что поэтому правильнее было бы в соответствии с (62.6) писать в (69.3) не $\mathbf{H}$, а $\mathbf{B}$. Произведя эту замену в соответствии с (63.4), получим вместо (69.4):

$$\frac{\varkappa}{\mu} = \frac{\varkappa}{1+4\pi\varkappa} = -\frac{NZe^2}{6mc^2}\overline{R^2}. \tag{69.5}$$

Однако отличие μ от единицы в диамагнетиках настолько мало, что (69.5) практически не отличается от (69.4).

§ 70. Парамагнетизм

1. Если магнетик состоит из атомов или молекул, магнитный момент $\mathbf{M}$ которых в отсутствие внешнего поля $\mathbf{H}$ равен нулю ($\mathbf{M}=0$), то воздействие магнитного поля на магнетик исчерпывается тем диамагнитным моментом, который был рассмотрен в

предшествующем параграфе, и магнетик этот диамагнитен ($\varkappa < 0$). Если же магнитный момент $\mathbf{M}$ атомов и молекул среды в отсутствие внешнего поля отличен от нуля ($\mathbf{M} \neq 0$), то наряду с диамагнитным эффектом [возникновение добавочного момента атомов $\Delta\mathbf{M}$, формула (69.1)] магнитное поле вызывает также *перераспределение направлений* магнитных моментов $\mathbf{M}$ атомов и молекул среды. В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов ориентированы совершенно беспорядочно, так что намагничение среды равно нулю. При наличии же внешнего магнитного поля $\mathbf{H}$ получают преобладание те направления магнитных моментов атомов, которые приближаются к направлению поля. Это намагничение магнетика по направлению поля (положительное намагничение, *парамагнетизм*) при $\mathbf{M} \neq 0$ всегда значительно превышает диамагнитный эффект. Поэтому все магнетики с $\mathbf{M} \neq 0$ парамагнитны ($\varkappa > 0$).

2. Как мы убедились в § 68, магнитное поле непосредственно не изменяет угла наклона магнитного момента атома к направлению поля, а лишь заставляет магнитную ось атома прецессировать вокруг направления поля при том же угле наклона к нему. Если до возбуждения поля направления осей атомов были распределены хаотически, то и в магнитное поле векторная сумма моментов отдельных атомов должна остаться равной нулю. Следовательно, *непосредственное* воздействие поля на магнетик сводится к диамагнитному эффекту, рассмотренному в § 69.

Однако это справедливо лишь постольку, поскольку мы ограничиваемся рассмотрением свободных или изолированных атомов или молекул и вовсе не учитываем их взаимодействия. В простейшем случае идеального газа взаимодействие молекул сводится к соударениям их между собой. Что существенно нового приносит учет этих соударений?

При каждом соударении направление оси молекул будет, вообще говоря, изменяться. Акт соударения молекул настолько сложен, что мы не можем проследить его во всех деталях. Однако мы можем учесть влияние соударений, прибегнув к помощи общих принципов статистической механики, а именно — к *теореме Больцмана*, согласно которой вероятность данного состояния молекулы, тем больше, чем меньше его энергия [1]. Мы сейчас докажем, что при заданном магнитном моменте атома кинетическая энергия электронов, входящих в состав данного атома, тем

[1] Теорема Больцмана относится к системам, находящимся в состоянии *термодинамического равновесия*, и необходимым условием ее применимости и является сама возможность изменения состояний молекул (в данном случае направления их осей). Как мы видели, в магнитном поле направление осей молекул может изменяться лишь при наличии взаимодействия (в частности, *соударений*) молекул; в противном случае теорема Больцмана была бы неприменима.

меньше, чем меньше угол между магнитным моментом атома и направлением магнитного поля. Стало быть, согласно теореме Больцмана, при наличии внешнего поля в результате соударений атомов должны получить преобладание направления магнитных осей атомов, близкие к направлению $\mathbf{H}$, и тело должно намагнититься (парамагнитный эффект).

3. Итак, нам нужно определять изменение кинетической энергии электронов в атомах под воздействием внешнего магнитного поля $\mathbf{H}$. Прецессия электронов в магнитном поле с угловой скоростью $\mathbf{o}$ вызывает изменение скорости $\mathbf{v}_i$ i-го электрона в атоме на величину

$$\Delta\mathbf{v}_i = [\mathbf{o}\mathbf{R}_i], \tag{70.1}$$

где $\mathbf{R}_i$ есть расстояние i-го электрона от ядра атома. Соответственно этому кинетическая энергия T электронов в атоме изменяется на

$$\Delta T = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n}\{(\mathbf{v}_i+\Delta\mathbf{v}_i)^2-\mathbf{v}_i^2\} = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n}\{2\mathbf{v}_i\Delta\mathbf{v}_i+(\Delta\mathbf{v}_i)^2\}, \tag{70.2}$$

где m — масса электрона, а n — число электронов в атоме. Так как $\Delta\mathbf{v}_i$ во всех доступных полях гораздо меньше $\mathbf{v}_i$, то квадратом $\Delta\mathbf{v}_i$ можно пренебречь:

$$\Delta T = m\sum_{i=1}^{n}\mathbf{v}_i\Delta\mathbf{v}_i = m\sum_{i=1}^{n}\mathbf{v}_i[\mathbf{o}\mathbf{R}_i] = m\mathbf{o}\sum_{i=1}^{n}[\mathbf{R}_i\mathbf{v}_i].$$

Воспользовавшись уравнением (68.3), получаем

$$\Delta T = \mathbf{o}\mathbf{K},$$

где $\mathbf{K}$ равно невозмущенному полем значению момента количества движения электронной оболочки атома. Наконец, с помощью уравнений (68.9) и (68.7) получаем окончательно

$$\Delta T = -\eta\mathbf{K}\mathbf{H} = -\mathbf{M}\mathbf{H}. \tag{70.3}$$

Таким образом, изменение *кинетической* энергии электронов в магнитном поле $\mathbf{H}$ [1]) численно равно *потенциальной энергии* в этом поле *магнитного диполя*, момент которого $\mathbf{M}$ равен магнитному моменту атома [см. уравнение (56.5)]. В этом вновь проявляется эквивалентность элементарного замкнутого тока и магнитного диполя, на которую мы уже неоднократно обращали внимание.

4. Для определения намагничения парамагнетиков нам остается только воспользоваться теоремой Больцмана. В § 29 мы уже пользовались этой теоремой в применении к консервативному

[1]) Конечно, ни о какой потенциальной энергии электрона в неконсервативном магнитном поле не может быть и речи.

полю электрических сил. Теорема Больцмана остается применимой и в неконсервативном поле магнитных сил, если только в формулировке этой теоремы, приведенной в § 29, заменить потенциальную энергию молекулы U приращением ΔW *полной* (потенциальной и кинетической) энергии молекулы в рассматриваемом поле сил.

Таким образом, мы приходим к следующей формулировке теоремы Больцмана: в условиях термодинамического равновесия закон распределения молекул по различным состояниям в случае наличия внешнего поля сил отличается от закона их распределения в отсутствие этого поля множителем $\exp -\frac{\Delta W}{kT}$, причем, конечно, существенна зависимость ΔW от состояния молекулы. Иными словами, теорема Больцмана утверждает, что вероятность данного состояния молекулы тем больше, чем меньше энергия этого состояния.

В рассматриваемом нами случае $\Delta W = \Delta T = -\mathbf{MH}$, так что энергия молекулы тем меньше, чем меньше угол между направлением ее момента $\mathbf{M}$ и направлением поля $\mathbf{H}$. Таким образом, намагничение парамагнетиков совершенно аналогично поляризации диэлектриков с твердыми диполями: фактор Больцмана $\exp -\frac{\Delta W}{kT}$, определяющий распределение осей молекул во внешнем поле, равен $\exp \frac{\mathbf{MH}}{kT}$ для парамагнитных молекул в магнитном поле $\mathbf{H}$ и $\exp \frac{\mathbf{pE}}{kT}$ для твердых электрических диполей в электрическом поле $\mathbf{E}$ [см. уравнение (29.2)]. Поэтому в теории парамагнетизма мы можем непосредственно воспользоваться результатами теории диэлектриков с твердыми диполями.

С этой целью достаточно заменить в формулах § 29 электрические величины $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{P}$ соответствующими магнитными $\mathbf{M}$ и $\mathbf{I}$. Что же касается электрической напряженности $\mathbf{E}$, то, собственно говоря, вместо нее нужно подставить не $\mathbf{H}$, а магнитную индукцию $\mathbf{B}$, ибо именно $\mathbf{B}$ равно среднему значению микроскопической напряженности $\mathbf{H}_{\text{микро}}$ [уравнение (62.6)]. Произведя эту замену в формуле (29.5), получим

$$\mathbf{I} = \frac{NM^2}{3kT}\mathbf{B},$$

откуда на основании (63.4)

$$\frac{\varkappa}{\mu} = \frac{\varkappa}{1 + 4\pi\varkappa} = \frac{NM^2}{3kT}. \tag{70.4}$$

Здесь T означает, конечно, в отличие от (70.2) и (70.3) абсолютную температуру парамагнетика. Из (70.4) легко определить магнитную восприимчивость $\varkappa$. Однако восприимчивость неферромагнитных тел настолько мала, что членом $4\pi\varkappa$ можно прене-

бречь по сравнению с единицей [1]) и положить, как это делается обычно,

$$\varkappa = \frac{NM^2}{3kT}. \tag{70.5}$$

5. Таким образом, в отличие от восприимчивости диамагнетиков [формула (69.4)], восприимчивость парамагнетиков $\varkappa$ должна при постоянном объеме (т. е. при постоянном N) изменяться обратно пропорционально абсолютной температуре (ср. два класса диэлектриков, § 29). Этот характер зависимости $\varkappa$ от T был экспериментально обнаружен П. Кюри еще до разработки соответствующей теории и носит название *закона Кюри*. Закон этот хорошо оправдывается на опыте для газообразных парамагнетиков, а также для ряда твердых парамагнетиков (например для солей редких земель). С другой стороны, для многих жидких и твердых парамагнетиков изложенная элементарная теория, предполагающая свободную прецессию магнитных моментов атомов вокруг направления поля, оказывается недостаточной, и закон Кюри в этих парамагнетиках нарушается.

Впрочем, и в тех парамагнетиках, к которым это предположение применимо, должны наблюдаться и наблюдаются отклонения от закона Кюри в очень сильном поле и при очень низкой температуре (порядка нескольких градусов абсолютной шкалы). Эти отклонения вполне соответствуют ожиданиям излагаемой теории и объясняются тем, что применимость формул (70.4) и (70.5) ограничена условием

$$a = \frac{MH}{kT} \ll 1 \tag{70.6}$$

[ср. соответствующую формулу (29.7) и § 29]. При $a \sim 1$ наблюдается *насыщение намагничения* парамагнетиков, заключающееся в нарушении пропорциональности между $\mathbf{I}$ и $\mathbf{H}$, причем намагничение I стремится при возрастании поля к постоянному пределу $I_{\text{нас}} = NM$. Это максимально возможное намагничение соответствует установке магнитных моментов *всех* атомов по направлению поля $\mathbf{H}$ (см. § 72).

Формула (70.4) позволяет вычислить значение M по данным измерения величин $\varkappa$ и N при различных температурах T. Определенные таким образом значения магнитного момента парамагнитных атомов и молекул вполне соответствуют выводам квантовой теории атома.

[1]) В сущности, было бы непоследовательным учитывать в приведенных формулах различие между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ и вместе с тем пренебрегать, как это мы всюду делали в этой главе, отличием действующего на молекулу поля от среднего поля (§ 28), отличием среднего квадрата напряженности поля от квадрата его средней напряженности и т. п., ибо все эти различия одного порядка величины.

6. Заметим в заключение, что в связи с формулами (70.2) и (70.3) законно возникает следующий вопрос. Силы магнитного поля перпендикулярны к скорости электрона и поэтому никакой работы не совершают. Каким же образом возникновение магнитного поля может изменить кинетическую энергию электронов?

Ответ заключается в том, что всякое изменение напряженности магнитного поля, в частности возникновение этого поля, возбуждает поле электрическое (см. § 85). Работой сил этого электрического поля и обусловливается изменение энергии электрона при возбуждении поля магнитного. Для полноты мы приведем здесь соответствующие выкладки, хотя нам придется при этом пользоваться некоторыми положениями, которые будут доказаны в следующей главе, так что при первом чтении книги эти выкладки можно опустить.

Усреднив движение электронов в атоме по времени обращения их по орбитам, мы можем свести движение атомных электронов к соответствующей системе замкнутых постоянных токов (квантовая механика непосредственно сводит магнитное поле атома к полю такой системы токов) Далее, произвольную систему постоянных замкнутых токов можно разложить на совокупность замкнутых нитей тока. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением одной такой нити тока или, проще, линейного замкнутого тока J. Работа A, совершаемая силами электрического поля над током J за промежуток времени от t_1 до t_2, равна [ср. уравнение (35.5)]:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} J\,dt \oint E_s\,ds,$$

где линейный интеграл должен быть взят по контуру тока L. Воспользовавшись формулой (76.6), получаем

$$\oint_L E_s\,ds = \mathcal{E}^{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S H_n\,dS = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt},$$

где поверхностные интегралы должны быть взяты по поверхности S, опирающейся на контур тока, а Φ есть магнитный поток через этот контур. Внося это в предшествующее выражение и предполагая, что изменение тока J под влиянием индукции настолько незначительно, что им можно пренебречь и вынести J за знак интеграла по времени, получаем

$$A = -\frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2} J\frac{d\Phi}{dt}\,dt = -\frac{J}{c}[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)].$$

Если в начальный момент времени магнитного поля не было и, стало быть, $\Phi(t_1)$ равнялось нулю и если на поверхности S магнитное поле имеет в момент t_2 постоянное значение $\mathbf{H}$, то

$$\Phi(t_1) = 0, \quad \Phi(t_2) = \mathbf{HS}$$

и, согласно (56.2),

$$A = -\frac{J\mathbf{HS}}{c} = -\mathbf{MH}. \tag{70.7}$$

Таким образом, работа электрических сил, индуцируемых при возбуждении магнитного поля, действительно равна изменению кинетической энергии электронов [уравнение (70.3)].

§ 71. Уточнения и дополнения к теории намагничения. Роль спина. Гиромагнитные явления

В § 68–70, посвященных теории намагничения пара- и диамагнетиков, мы для упрощения изложения оставили без рассмотрения ряд обстоятельств, часть из которых мы теперь рассмотрим дополнительно.

1. Во-первых, в предыдущем мы исходили из предположения, что все молекулы (или все атомы) данного вещества обладают (в отсутствие внешнего магнитного поля) вполне определенным магнитным моментом $\mathbf{M}$, испытывающим при возбуждении внешнего поля $\mathbf{H}$ вполне определенное изменение $\Delta\mathbf{M}$ [формула (69.1)]. Это изменение зависит только от ориентации атома относительно поля $\mathbf{H}$, ибо среднее расстояние электронов от атомного ядра, входящее в (69.2), считается одинаковым для всех атомов.

Не представляет труда обобщить результаты предшествующих параграфов на случай смеси различных сортов атомов или молекул (например смесь газов, раствор, смесь невозбужденных и возбужденных атомов и т. д.); магнитная восприимчивость смеси будет, очевидно, равна сумме восприимчивостей ее компонент. Однако совершенно решающее значение имеет предположение, что возможные значения магнитного момента атомов M и среднего квадрата расстояния электронов от ядра атома $\overline{R^2}$ [уравнение (69.3)] образуют *дискретную* совокупность. Предположение это вполне соответствует квантовой теории, но никак не укладывается в рамки классической физики. Если же в духе классической физики принять, что как момент каждого атома M, так и величина $\overline{R^2}$ могут принимать все значения от 0 до ∞, то *магнитная восприимчивость* вещества оказывается *тождественно равной нулю* [1]. В случае же электрической поляризации аналогичной трудности не возникает.

Таким образом, хотя по внешности рассуждения предшествующих параграфов велись в рамках классической теории, однако, строго говоря, последовательная электронная теория намагничения оказывается в рамках классической физики совершенно невозможной.

2. Во-вторых, в § 68–70 мы совершенно не учитывали *спина* электронов и должны теперь восполнить этот пробел.

Ограничиваясь рассмотрением так называемого *орбитального* магнитного момента $\mathbf{M}_{\text{орб}}$ и *орбитального* момента количества движения $\mathbf{K}_{\text{орб}}$ атома, обусловленных поступательным движени-

[1] См., например, *Вонсовский С.В.* Магнетизм. — М.: Наука, 1984; *Беккер Р.* Электронная теория. — М.: ОНТИ, 1941. С. 159.

ем электронов в атоме [1]), мы установили в § 68, что эти моменты пропорциональны друг другу [уравнение (68.7)]:

$$\mathbf{M}_{\text{орб}} = \eta \mathbf{K}_{\text{орб}}, \tag{71.1}$$

причем коэффициент пропорциональности имеет универсальное значение [уравнение (68.8)]:

$$\eta = \frac{e}{2mc} < 0. \tag{71.2}$$

Однако полный магнитный и механический моменты атома не исчерпываются этими орбитальными моментами, а складываются из суммы их и спиновых моментов электронов $\mathbf{M}'$ и $\mathbf{K}'$. Между векторными величинами спиновых моментов $\mathbf{M}'$ и $\mathbf{K}'$ каждого отдельного электрона также существует прямая пропорциональность:

$$\mathbf{M}' = \eta' \mathbf{K}'. \tag{71.3}$$

Однако, согласно (58.1), коэффициент пропорциональности в этом случае отличен от η:

$$\eta' = e/(mc) = 2\eta. \tag{71.4}$$

Поэтому коэффициент пропорциональности η'' между результирующими магнитным и механическим моментами $\mathbf{M}$ и $\mathbf{K}$ всего атома в целом

$$\mathbf{M} = \eta'' \mathbf{K} \tag{71.5}$$

не является величиной универсальной, а зависит от соотношения между орбитальным и спиновым моментом в данном атоме [2]). Значение его должно, очевидно, быть отрицательным и заключаться в пределах

$$2\eta \leqslant \eta'' \leqslant \eta. \tag{71.6}$$

Повлияет ли это обстоятельство на результаты § 69–70? При выводе закона Кюри (70.4) для парамагнетиков мы, в сущности, опирались только на тот факт, что изменение энергии атома момента $\mathbf{M}$ при возникновении магнитного поля $\mathbf{H}$ равно

$$\Delta W = -\mathbf{M}\mathbf{H}. \tag{71.7}$$

---

[1]) Для отличия от спиновых моментов мы теперь ввели в обозначения индекс «орб», которого до сих пор не писали.

[2]) Собственно говоря, ввиду отличия η от η' не самоочевидно, что результирующий магнитный момент атома $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{орб}} + \sum \mathbf{M}'$ направлен всегда прямо противоположно результирующему механическому моменту $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{орб}} + \sum \mathbf{K}'$. Однако если $\mathbf{M}_{\text{орб}}$ и сумма спиновых магнитных моментов электронов $\sum \mathbf{M}'$ направлены под углом друг к другу, то силы магнитного взаимодействия между $\mathbf{M}_{\text{орб}}$ и $\sum \mathbf{M}'$ (так называемая «связь спина с орбитой») вызывают прецессию каждого из этих моментов вокруг вектора $\mathbf{K}$, направление и величина которого в изолированном атоме, согласно закону сохранения момента количества движения, изменяться не могут В результате среднее за период этой «внутренней» прецессии значение результирующего магнитного момента атома оказывается направленным противоположно $\mathbf{K}$.

Соотношение это было доказано нами в § 70 для случая, когда момент $\mathbf{M}$ создается орбитальным движением электронов и ΔW определяется изменением их *кинетической* энергии. Однако формула (71.7) остается справедливой и для твердого магнитного диполя, в таком случае ΔW равно *потенциальной* энергии этого диполя в поле $\mathbf{H}$ [см. уравнение (56.5)]. Таким образом, формула (71.7) носит универсальный характер, и вытекающий из нее закон Кюри (70.4) остается применимым при любом соотношении между орбитальной и спиновой составными частями полного магнитного момента атома $\mathbf{M}$.

Что же касается диамагнитных атомов, то их полный магнитный и механический моменты в отсутствие магнитного поля равны нулю, и поэтому можно ожидать, что учет спинового момента электрона не повлияет на результаты § 69. Действительно, квантовомеханические вычисления приводят к выводу, что формула (69.4) для восприимчивости диамагнетиков остается справедливой и при учете спина электронов [1].

3. Таким образом, учет спина электронов не вносит никаких изменений в основные соотношения теории намагничения диа- и парамагнетиков. Существуют, однако, и такие макроскопические явления (помимо ферромагнетизма, о котором речь ниже), для правильного объяснения которых учет спина является необходимым. Это так называемые *магнитно-механические*, или *гиромагнитные* явления, состоящие, во-первых, в том, что при намагничивании пара- или ферромагнитных [2] тел тела эти приходят во вращательное движение вокруг направления намагничивания, и, во-вторых, в том, что при вращении этих тел в них возникает намагничение, параллельное оси вращения. Обусловливаются эти явления тем, что, согласно уравнению (71.5), магнитный и механический моменты каждого атома пропорциональны друг другу. Поэтому намагничение вещества, т. е. появление результирующего магнитного момента единицы объема, связано с появлением соответствующего момента количества движения, и обратно.

Рассмотрим сначала момент количества движения какого-либо атома относительно какой-либо неподвижной (относительно инерциальной системы) точки O. Как известно из механики, момент количества движения системы материальных точек (в нашем

[1] Мы вовсе не касаемся в этой книге вопроса о диа- и парамагнетизме свободных электронов в металлах, требующего специального рассмотрения (см., например, книгу С В. Вонсовского, цитированную в примечании к с 317).

[2] Хотя мы ферромагнетиков до сих пор и не рассматривали, однако как формулы (71.1)–(71.6), так и все дальнейшее содержание этого параграфа имеют совершенно общий характер и в равной мере применимы как к пара-, так и к ферромагнетикам.

случае атома) равен сумме того момента количества движения, которым обладала бы система, если бы вся ее масса была сосредоточена в ее центре инерции, и того момента количества движения, который соответствует движению точек системы относительно ее центра инерции. Центр инерции атома можно считать совпадающим с его ядром. Поэтому общий момент количества движения атома $\mathbf{K}$ будет равен сумме момента $\mathbf{K}_a$, соответствующего движению центра инерции (т. е. ядра) атома, и момента $\mathbf{K}_e$, соответствующего движению электронов относительно ядра:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_a + \mathbf{K}_e.$$

Общий момент количества движения единицы объема тела будет равен

$$\sum \mathbf{K} = \sum \mathbf{K}_a + \sum \mathbf{K}_e,$$

где знак $\sum$ означает суммирование по всем атомам, находящимся в единице объема. Приняв во внимание связь между механическим и магнитным моментами электронной оболочки атома, т. е. уравнение (71.5), получим

$$\sum \mathbf{K} = \sum \mathbf{K}_a + \eta'' \sum \mathbf{M} = \sum \mathbf{K}_a + \eta'' \mathbf{I},$$

ибо сумма $\sum \mathbf{M}$, по определению, равна намагничению тела [1]).

Рассмотрим теперь процесс намагничивания пара- и ферромагнетиков. Непосредственное воздействие магнитного поля на электронную оболочку атома вызывает лишь прецессию этой оболочки; диамагнитным эффектом этой прецессии, ввиду его малости, мы пренебрежем. Изменение же направлений магнитных осей атомов, являющееся причиной пара- и ферромагнитного намагничения, происходит, как мы видели, лишь при соударении атомов или, вообще говоря, при наличии взаимодействия между атомами. Лишь под влиянием этого взаимодействия и происходит поворот осей атомов по направлению поля $\mathbf{H}$, т. е. изменение направления как магнитного момента $\mathbf{M}$, так и непосредственно связанного с ними механического момента $\mathbf{K}_e$ электронов, входящих в состав атомов. Так как при взаимодействии атомов должен выполняться закон сохранения момента количества движения, то сумма $\sum \mathbf{K}$ должна оставаться постоянной [2]), и изменение $\sum \mathbf{K}_e$ должно компенсироваться соответствующим изменением $\sum \mathbf{K}_a$.

---

[1]) Движение атома в целом ($\sum \mathbf{K}_a$) не создает магнитного поля, если атом нейтрален (не ионизован).

[2]) Для случая намагничения тела вращения, ось которого параллельна внешнему магнитному полю $\mathbf{H}$, легко, основываясь на соображениях симметрии и на формуле (83.4) гл. VI, непосредственно доказать, что момент $\mathbf{N}$ сил внешнего поля, приложенных к намагничиваемому телу, действительно равен нулю и что, таким образом, $\sum \mathbf{K}$ должна при намагничении оставаться постоянной.

Предположим, что до намагничивания не только $\sum \mathbf{K}_e$, но и $\sum \mathbf{K}_a$, а значит, и $\sum \mathbf{K}$ равнялись нулю. В этом случае, согласно последнему уравнению, возникновение пропорционально $\sum \mathbf{K}_e$ намагничения $\mathbf{I}$ сопровождается одновременным возникновением момента $\sum \mathbf{K}_a$, равного

$$\sum \mathbf{K}_a = -\eta'' \mathbf{I}. \tag{71.8}$$

Предположим, далее, что намагничиванию подвергается твердый пара- или ферромагнетик. Атомы твердого тела не могут двигаться порознь, и наличие момента количества движения атомов тела $\sum \mathbf{K}_a$ означает в этом случае вращение всего тела в целом. Угловая скорость вращения ω, которую должно приобрести тело при возникновении намагничения $\mathbf{I}$, определяется из равенства

$$\left|\sum \mathbf{K}_a\right| = Q\omega = -\eta'' I, \tag{71.9}$$

где Q — момент инерции тела относительно оси, параллельной направлению намагничения и проходящей через центр инерции тела. Стало быть, если намагничивать, например, свободно подвешенный железный стерженек, то стерженек этот должен приобрести вращение вокруг оси намагничивания с угловой скоростью ω (*эффект Эйнштейна-де Хааса*). Так как ω, Q и I могут быть непосредственно измерены, то уравнение (71.9) дает возможность определить отношение механического и магнитного моментов атома η'' [1].

Легко показать, что и обратно, если привести стерженек в быстрое вращение, то в нем должно возникнуть намагничение, которое зависит от скорости вращения и от η'' (*эффект Барнетта*) [2]. Не останавливаясь подробно на теории этого эффекта, заметим только, что он вполне аналогичен следующему известному механическому явлению: если укрепить на подставке гироскоп (которому в нашем случае соответствуют электронные орбиты) и привести подставку (кристаллический скелет твердого тела) во вращение, то ось вращения гироскопа будет стремиться установиться по направлению оси вращения подставки (чему в нашем случае соответствует намагничение).

[1] Практически опыт ставится следующим образом: стерженек подвешивается на ниточке так, что его ось совпадает с осью катушки, обтекаемой переменным током. Ток этот периодически перемагничивает стерженек, сообщая ему при этом каждый раз определенный момент вращения $\sum \mathbf{K}_a$. Зная Q, I и крутильную упругость нити, можно по амплитуде крутильных колебаний стерженька определить η''.

[2] Более подробно о трактовке экспериментов Барнетта см.: *Гинзбург В.Л.* Памяти А.А. Андронова. — М.: Изд-во АН СССР, 1955; *Цидильковский И.М.* // УФН. 1975. Т. 115. С. 321.

Ряд экспериментальных исследований подтвердил существование предсказанных электронной теорией гиромагнитных эффектов. При этом, в частности, подтвердилось, что магнетизм обусловливается движением *отрицательных* электрических зарядов (электронов), ибо значения коэффициента η'' оказались отрицательными [положительное направление оси вращения тела оказалось совпадающим с направлением его намагничивания, — ср. уравнение (71.8)].

Что же касается отношения механического и магнитного моментов атома η'', то значения η'', как и следовало ожидать, оказались лежащими между значениями универсальных постоянных η и η', определяемых уравнениями (71 2) и (71.4).

Весьма существенно, что для всех исследованных *ферромагнетиков* (железо, никель, кобальт, ряд сплавов) коэффициент η'' оказался равным η'. Это показывает, что *магнетизм ферромагнетиков обусловливается одним лишь спином электронов*, а не их орбитальным движением.

§ 72. Ферромагнетизм. Молекулярное поле Вейсса

1. Как и в случае парамагнетизма, намагничение ферромагнетиков объясняется упорядочением ориентации магнитных моментов атомов ферромагнетика. Чрезвычайная же сложность ферромагнитных явлений обусловливается весьма значительными силами взаимодействия между смежными атомами ферромагнетика, зависящими от относительной ориентации их магнитных осей. По сравнению с этими силами, соответствующие силы взаимодействия в парамагнетике совершенно ничтожны. Этими силами взаимодействия объясняются отсутствие пропорциональности между намагничением ферромагнетика и внешним магнитным полем, остаточное и спонтанное намагничение и т. д.

Природа этих сил взаимодействия (так называемых «*обменных сил*» между электронами атомов ферромагнетика) совершенно не поддается объяснению в рамках классической физики, и только квантовая механика принесла с собою выяснение истинной природы ферромагнетизма.

Однако уже чисто формальное введение зависящих от ориентации сил взаимодействия между атомами позволило в рамках классической физики разобраться в целом ряде основных закономерностей ферромагнетизма. Поэтому мы изложим сначала основы классической теории ферромагнетизма, разработанной Вейссом, и лишь в конце параграфа коснемся вопроса об истинной природе введенного им в рассмотрение «молекулярного поля сил».

2. Согласно теории Вейсса поле сил, действующих на магнитный момент атома ферромагнетика, может быть сведено к сумме

поля магнитного $\mathbf{H}$ и некоторого «*молекулярного поля*», учитывающего воздействие на данный атом смежных атомов ферромагнетика и пропорционального его намагничиванию $\mathbf{I}$. Иными словами, можно сказать, что «эффективное» магнитное поле $\mathbf{H}_{эф}$ в ферромагнетике равно сумме истинного магнитного поля $\mathbf{H}$ и молекулярного поля $b\mathbf{I}$:

$$\mathbf{H}_{эф} = \mathbf{H} + b\mathbf{I}, \tag{72.1}$$

где b есть некоторая положительная постоянная, характеризующая свойства данного ферромагнетика.

Собственно говоря, эффективное магнитное поле выражается формулой того же типа и в том случае, когда никакого особого молекулярного поля нет и зависящие от относительной ориентации атомов силы взаимодействия между ними сводятся к силам магнитным. Действительно, в § 28 мы показали, что при известных предположениях эффективное, т. е. лействующее на диполь, электрическое поле в диэлектриках с квазиупругими диполями выражается формулой (28.6). Заменяя в этой формуле электрические величины $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ соответствующими магнитными $\mathbf{H}$ и $\mathbf{I}$, получаем

$$\mathbf{H}_{эф} = \mathbf{H} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{I}. \tag{72.2}$$

Однако, как мы увидим ниже, экспериментальные определения постоянной Вейсса b в ферромагнетиках приводят к столь большим значениям этой постоянной, что молекулярное поле Вейсса никак не может быть сведено к магнитному взаимодействию атомов.

Согласно формуле (72.1) та доля энергии атома, которая зависит от направления его магнитного момента, будет выражаться уже не формулой (70.3) или (71.7), а формулой

$$U = -\mathbf{M}\mathbf{H}_{эф} = -\mathbf{M}(\mathbf{H} + b\mathbf{I}). \tag{72.3}$$

При этом для дальнейшего совершенно не существенно, является ли эта энергия потенциальной или кинетической, или же частью потенциальной и частью кинетической (см. § 71, с. 319).

Согласно (72.3) энергия атома при прочих равных условиях будет тем меньше, чем ближе совпадает направление его магнитного момента с направлением намагничения $\mathbf{I}$ тела. Другими словами, наличие сильного молекулярного поля должно проявляться в тенденции всех атомов ориентироваться в одном и том же направлении, т. е. в тенденции к самопроизвольному спонтанному намагничению тела.

Сделав основное допущение, выражаемое уравнением (72.1), мы можем в дальнейшем воспользоваться теоремой Больцмана и повторить в основном рассуждения § 29 и 70. Число атомов в единице объема ферромагнетика, угол оси которых с направлением эффективного поля $H_{эф}$ лежит в пределах между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$,

будет равно [ср. уравнение (29.2)]

$$dN = ce^{a\cos\vartheta}\sin\vartheta\cdot d\vartheta,$$

где введено обозначение [ср. уравнение (29 3)] [1])

$$a = \frac{MH_{эф}}{kT} = \frac{M(H+bI)}{kT}. \tag{72.4}$$

При рассмотрении диэлектриков с твердыми диполями мы ограничились тем практически всегда осуществляющимся случаем, когда $a \ll 1$, и соответственно упростили все вычисления. В случае же ферромагнетиков условие $a \ll 1$, вообще говоря, не выполняется, и мы вынуждены провести все вычисления без упрощений

Коэффициент пропорциональности c можно определить из того условия, что общее число всех атомов в единице объема должно равняться N·

$$N = \int dN = c\int_0^{\pi} e^{a\cos\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{c}{a}(e^a - e^{-a}).$$

Разрешая это равенство относительно c, получаем

$$c = \frac{aN}{e^a - e^{-a}}. \tag{72.5}$$

Определим теперь результирующий магнитный момент единицы объема тела, т. е. его намагничение $\mathbf{I}$. Вектор $\mathbf{I}$ считаем параллельным эффективному полю $\mathbf{H}_{эф}$ (см. примечание к с. 290), поэтому его значение будет равно сумме проекций моментов всех N атомов на направление $\mathbf{H}_{эф}$. Общий момент dN атомов, оси которых лежат между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$, равен $M\cdot dN$, а проекция этого момента на направление $\mathbf{H}_{эф}$ равна $M\cdot dN\cdot\cos\vartheta$. Следовательно, намагничение тела равно

$$I = \int M\cos\vartheta\cdot dN = cM\int_0^{\pi} e^{a\cos\vartheta}\cos\vartheta\cdot\sin\vartheta\cdot d\vartheta =$$

$$= cM\left(\frac{e^a + e^{-a}}{a} - \frac{e^a - e^{-a}}{a^2}\right),$$

или, по внесении значения c из уравнения (72.5),

$$I = NM\left(\operatorname{cth} a - \frac{1}{a}\right), \tag{72.6}$$

[1]) Абсолютная величина $H_{эф}$ равна абсолютной величине $H + bI$ только в том случае, если вектор $\mathbf{H}$ параллелен $\mathbf{I}$ Хотя ферромагнетики анизотропны и поэтому в них параллельность векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{I}$ имеет место лишь при определенной ориентации этих векторов, однако для простоты мы только этим случаем и ограничимся

где cth означает гиперболический котангенс a, определяемый уравнением

$$\operatorname{cth} a = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}}.$$

3. Совокупность формул (72.4) и (72.6) позволяет определить намагничение I Прежде чем применять их к ферромагнетикам, поучительно применить их к случаю парамагнетизма, характеризуемому отсутствием молекулярного поля. Для этого достаточно в уравнении (72.4) положить постоянную b равной нулю [1]). Формула (72.6) была получена впервые Ланжевеном как раз для этого частного случая и носит его имя, а кривая $\operatorname{cth} a - 1/a$ называется *кривой Ланжевена.*

В случае $a \ll 1$ можно разложить $\operatorname{cth} a$ в ряд по степеням a:

$$\operatorname{cth} a = \frac{1}{a} + \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \dots$$

Внося это в уравнение (72.6), ограничиваясь двумя первыми членами ряда и принимая во внимание уравнение (72.4), получаем при $b = 0$

$$I = NMa = \frac{NM^2}{3kT} H.$$

Следовательно, восприимчивость $\varkappa$ в этом случае равна

$$\varkappa = \frac{NM^2}{3kT},$$

что совпадает с ранее полученной нами формулой (70.4) (закон Кюри). Если a сравнимо с единицей или больше единицы, нужно, конечно, пользоваться не этими приближенными формулами, а точной формулой (72.6) Когда a стремится к бесконечности (сильное магнитное поле при низкой температуре), $\operatorname{cth} a$ стремится к единице и, стало быть, согласно уравнению (72.6), намагничение I асимптотически стремится к предельному значению

$$I_0 = NM, \tag{72.7}$$

соответствующему установке осей всех атомов в одном направлении (*насыщение намагничения*).

4. Возвращаясь к ферромагнетикам ($b \gg 1$), предположим сначала, что магнитное поле H либо совсем отсутствует, либо настолько мало, что в формуле (72.4) им можно пренебречь по сравнению с молекулярным полем bI и положить, пользуясь обозначением (72.7):

$$a = \frac{MbI}{kT} = \frac{NMbI}{NkT} = \frac{bI_0 I}{NkT} = \left(\frac{bI_0^2}{NkT}\right)\frac{I}{I_0}.$$

[1]) Согласно уравнению (72 2) $b = {}^4/_3\pi$ Однако в парамагнетиках членом bI можно пренебречь, ибо в них $I \ll H$

Если ввести обозначение

$$\theta = \frac{bI_0^2}{3Nk}, \tag{72.8}$$

то это соотношение можно записать так:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{T}{3\theta}a. \tag{72.9}$$

Заметим, что величина θ, характеризующая собой свойства ферромагнетика, имеет размерность температуры. С другой стороны, уравнение кривой Ланжевена (72.6) может быть на основании (72.7) записано так:

$$\frac{I}{I_0} = \operatorname{cth} a - \frac{1}{a}. \tag{72.10}$$

Подставляя a из уравнения (72.9) в уравнение (72.10), можно получить (неявную) функциональную зависимость I/I_0 от T/θ. Проще, однако, прибегнуть к графическому методу. На рис. 67 нанесена зависимость I/I_0 от a, причем кривая соответствует уравнению (72.10), а прямая AO — уравнению (72.9) (при определенном значении отношения T/θ). Очевидно, что фактическое относительное намагничение тела I/I_0, соответствующее заданному значению T/θ (т. е. заданному наклону прямой OA), определяется точками пересечения универсальной (не зависящей от свойств и состояния тела) кривой Ланжевена $\operatorname{cth} a - 1/a$ с прямой OA.

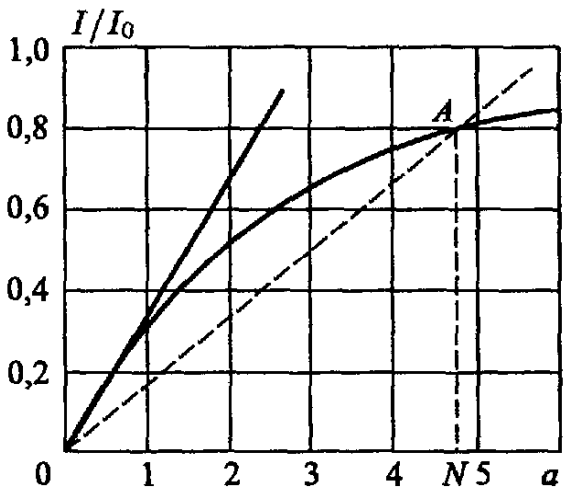

Рис 67

В изображенном на рис. 67 случае таких точек пересечения две: одна соответствует отсутствию намагничения ($I = 0$), другая (точка A) — намагничению примерно до 0,8 насыщения. Чтобы выяснить, каким именно намагничением будет фактически обладать тело при заданном T/θ, необходимо установить, какое из этих двух состояний тела является *устойчивым*. Чтобы объяснить основные свойства ферромагнетиков, необходимо допустить, что устойчивой является точка A, соответствующая намагниченному состоянию тела, тогда как ненамагниченное состояние $I = 0$ неустойчиво и в действительности не реализуется. Это допущение вполне подтверждается квантовомеханическими расчетами, согласно которым намагниченное состояние ферромагнетиков соответствует минимуму их свободной энергии.

Все изложенное остается применимым ко всем значениям отношения T/θ, при которых прямая [уравнение (72.9)] имеет

с кривой Ланжевена [уравнение (72 10)] две общие точки. Начало координат ($I = a = 0$) всегда является такой общей точкой Что же касается второго пересечения прямой (72.9) с кривой Ланжевена, то, как явствует из формы этой кривой, оно будет иметь место только в том случае, если наклон этой прямой к оси абсцисс меньше наклона касательной, проведенной к кривой Ланжевена в начале координат (и нанесенной на наш рисунок). Наклон этой касательной равен

$$\left[\frac{d}{da}\left(\operatorname{cth} a - \frac{1}{a}\right)\right]_{a=0} = \frac{1}{3},$$

а наклон прямой (72.9) равен $T/3\theta$. Следовательно, прямая будет дважды пересекаться с кривой Ланжевена в том случае, если $T/3\theta < 1/3$ и, стало быть, $T < \theta$.

Итак, из изложенной теории вытекает, что если $T < \theta$, то устойчивым является только намагниченное состояние, и следовательно, ферромагнетик должен и в отсутствие внешнего магнитного поля быть намагниченным (спонтанное намагничение), причем намагничение определяется второй точкой пересечения прямой (72.9) с кривой Ланжевена (точка A на рис. 67). Если же $T > \theta$, то при отсутствии внешнего магнитного поля намагничение I должно равняться нулю, т. е. при высокой температуре тело должно терять свойство спонтанно намагничиваться.

Это последнее обстоятельство соответствует тому экспериментальному факту, что при нагревании все ферромагнетики при некоторой определенной температуре теряют свои ферромагнитные свойства и становятся парамагнитными. Эта характерная для каждого ферромагнетика критическая температура (758 °С для железа, 374 °С для никеля и т. д.) носит название «температуры Кюри» или «*точки Кюри*». Таким образом, оказывается, что постоянная θ, определяемая уравнением (72.8), физически соответствует температуре Кюри.

Очевидно, существование точки Кюри, выше которой тело теряет ферромагнитные свойства, обусловливается тем, что при достаточном нагревании обеспорядочивающее влияние теплового движения на ориентацию магнитных осей атомов должно в конце концов стать настолько значительным, чтобы преодолеть силы взаимодействия атомов, стремящиеся установить их магнитные оси параллельно друг другу.

5. Ранее мы обошли молчанием некоторые весьма существенные вопросы. Прежде всего теория Вейсса, как мы видели, приводит к заключению, что при температуре ниже точки Кюри все ферромагнетики должны самопроизвольно намагничиваться и в отсутствие внешнего магнитного поля. Между тем, обычное состояние, например, железа при $T < \theta$ есть, вообще говоря, состояние немагнитное, хотя, конечно, и существуют так называемые постоянные магниты, остаточное намагничение и т. д.

Объясняется это кажущееся противоречие тем, что всякий ферромагнетик распадается в магнитном отношении на ряд чрезвычайно малых микроскопических автономных областей [1]. Каждая такая «*вейссова область*» всегда намагничена до значения, соответствующего теории (точка A на рис. 67). Однако в обычных условиях различные «вейссовы области» намагничены в различных направлениях. Благодаря этому средний магнитный момент всего тела равен нулю, и намагничение отдельных областей остается незаметным [2].

При включении внешнего магнитного поля число и размеры областей, намагничение которых параллельно полю (или близко к параллельности), растут за счет областей, намагниченных в противоположном направлении, и тело в целом намагничивается. Если после этого внешнее поле выключить, то раз возникшая упорядоченность направлений намагничивания отдельных областей частично сохраняется (остаточное намагничение) до тех пор, пока ее не уничтожат какие-либо новые факторы: нагревание, включение поля обратного направления, превышающего известный минимум (носящий название коэрцитивной силы), и т. п.

Исходя из этих общих представлений и учитывая еще ряд других существенных обстоятельств [3], на которых мы здесь

---

[1]) Эти области, которые сейчас принято называть доменами, не нужно смешивать с отдельными микрокристалликами, из которых состоят обычно поликристаллические ферромагнетики Сколь угодно тщательно приготовленный монокристалл железа также распадается в магнитном отношении на такие области

[2]) Намагничение всего ферромагнетика в одном определенном направлении в отсутствие внешнего поля энергетически невыгодно Это вытекает из того, что, согласно квантовой механике, силы взаимодействия между атомами, соответствующие вейссову молекулярному полю, весьма быстро убывают с расстоянием и практически действуют только смежными атомами Поэтому при распадении магнетика на вейссовы области увеличивается потенциальная энергия только тех атомов, которые прилегают к поверхностям раздела вейссовых областей· только у этих атомов появляются по другую сторону поверхности раздела соседи с непараллельно направленным магнитным моментом (силы взаимодействия между смежными атомами стремятся установить их магнитные моменты параллельно друг другу) С другой стороны, при распадении магнетика на вейссовы области уменьшается энергия магнитного поля, возбуждаемого ферромагнетиком, ибо поля различно ориентированных вейссовых областей в значительной мере взаимно компенсируются. Таким образом, дробление вейссовых областей ведет, с одной стороны, к увеличению площади, а стало быть, и потенциальной энергии поверхностей раздела, с другой же стороны — к уменьшению объемной энергии магнитного поля Фактический (средний) размер вейссовых областей определяется минимумом суммарной свободной энергии ферромагнетика

[3]) Магнитную анизотропию, связанную с кристаллической структурой ферромагнетиков и проявляющуюся в том, что в различных направлениях они намагничиваются с различной легкостью, внутренние натяжения и искажения кристаллической решетки, всегда имеющиеся в реальных телах; магнитострикцию и т. д

останавливаться не можем, удается, по крайней мере качественно, а частью и количественно, объяснить все остальные закономерности, наблюдаемые в ферромагнетиках (зависимость I от H, петля гистерезиса и т. д.).

6. Мы принуждены, за недостатком места, ограничиться кратким рассмотрением одного лишь добавочного вопроса. При изложении математической части теории Вейсса мы предположили, что магнитным полем H можно пренебречь, по сравнению с молекулярным полем bI. Каково же это поле? Определив на опыте температуру Кюри θ и намагничение насыщения I_0 [1]), можно по формуле (72.8) вычислить bI. Оказывается, что, например, в железе, при нормальных температурах, bI достигает значений порядка $7 \cdot 10^6$ Гс^2, т. е., действительно, весьма значительно превышает напряженность практически доступных магнитных полей. Для постоянной b получаются при этом значения порядка $4 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^4$.

Это исключительно большая величина молекулярного вейссова поля представляла собою основное затруднение для классической теории ферромагнетизма и обрекала на неудачу все попытки свести это поле к магнитному взаимодействию атомов ферромагнетика Действительно, формула (72.2), относящаяся к квазиупругим диполям и приводящая к значению $b = {}^4/_3\pi$, к ферромагнетикам, конечно, неприменима. Однако и в магнетике, атомы которого обладают постоянным магнитным моментом M, максимально возможная напряженность эффективного поля, обусловленного магнитным взаимодействием атомов, не может по порядку величины существенно превышать напряженность M/R^3 поля диполя M в центре смежного атома (здесь R означает расстояние между смежными атомами ферромагнетика). По порядку величины магнитный момент атомов $M \sim 10^{-20}$ Гс·см^3 и $R \sim 2 \cdot 10^{-8}$ см, так что $M/R^3 \sim 10^3$ Гс, т. е. в тысячи раз меньше напряженности вейссова поля. Все многочисленные попытки обойти это затруднение в рамках классической теории оказались совершенно несостоятельными. Только квантовая механика позволила разрешить вопрос о природе вейссова молекулярного поля.

Вкратце это объяснение сводится к следующему. Если положить в основу обычный кулонов закон взаимодействия зарядов электронов и атомных ядер, но применить к определению движения электронов законы квантовой механики, то результат оказывается таким, какой на основе законов движения классической

[1]) Для последнего, конечно, вовсе нет необходимости достигнуть на опыте полного насыщения, а достаточно определить ряд значений I для сравнительно больших значений a и экстраполировать по кривой Ланжевена к $a = \infty$.

механики получился бы при наличии, помимо кулоновых сил, еще некоторых добавочных сил взаимодействия между электронами. Таким образом, если мы хотим пользоваться представлениями классической физики, то мы должны ввести в рассмотрение соответствующие добавочные силы, которые получили название обменных сил. Роль их в явлениях магнетизма сводится к тому, что при известных условиях, относящихся к электронному строению атомов, структуре кристаллической решетки и т. п., эти обменные силы стремятся установить спины электронов в смежных атомах магнетика параллельно друг другу, т. е. стремятся намагнитить тело, являющееся при выполнении этих условий ферромагнитным. В согласии с этим изучение гиромагнитных эффектов в ферромагнетиках показало (см. § 71), что ферромагнетизм обусловливается спином электронов, а не их орбитальным движением.

Как показывает теоретический расчет, обменное взаимодействие атомов может быть с достаточной точностью учтено введением в рассмотрение некоторого эквивалентного ему «молекулярного» поля bI. Таким образом, формальная вейссова теория ферромагнетизма получает физическое обоснование на основе общих положений квантовой механики, без каких-либо специальных допущений и гипотез.

Конечно, наряду с обменным взаимодействием, вытекающим из закона Кулона, существует также и обычное классическое магнитное взаимодействие атомов, эквивалентное взаимодействию соответствующих магнитных диполей. Однако, как уже указывалось, оно в несколько тысяч раз слабее обменного взаимодействия. Все же именно магнитным взаимодействием атомов обусловливаются в первую очередь такие, например, явления, как магнитная анизотропия и магнитострикция.

§ 73. Уравнения поля в идеализированных ферромагнетиках (обычный вариант). Постоянные магниты

1. Результаты § 60–62 носят совершенно общий характер и применимы к любым магнетикам. Однако в § 63 мы сделали допущение, что намагничение среды $\mathbf{I}$ пропорционально напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$, и тем самым исключили из своего рассмотрения ферромагнетики. Теперь нам предстоит восполнить этот пробел.

Явления гистерезиса в ферромагнетиках означают, что между $\mathbf{I}$ и $\mathbf{H}$ нет однозначного соотношения. Но даже в таких ферромагнетиках, в которых гистерезисом, ввиду его незначительности, можно пренебречь, нелинейный характер зависимости $\mathbf{I}$ от $\mathbf{H}$ чрезвычайно усложняет теорию. Чтобы избежать этих услож-

нений, мы ограничимся рассмотрением так называемых «*идеализированных ферромагнетиков*», или «постоянных магнитов», предположив, что намагничение $\mathbf{I}$ этих магнетиков складывается из суммы *индуцированного намагничения*, являющегося линейной функцией напряженности поля, и *постоянного намагничения* $\mathbf{I}_0$, от напряженности поля вовсе не зависящего. В этом параграфе мы будем исходить из общепринятого допущения, что индуцированное намагничение пропорционально *напряженности* магнитного поля, т. е. положим

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + \varkappa \mathbf{H}, \tag{73.1}$$

где $\mathbf{I}_0$ — заданная функция точки, а $\varkappa$ от $\mathbf{H}$ не зависит. (Несколько иной вариант теории постоянных магнитов будет рассмотрен в следующем параграфе.) Очевидно, что уравнение (73.1) включает в себя в качестве частного случая ($\mathbf{I}_0 = 0$) формулу (63.1), справедливую для пара- и диамагнетиков. Те ферромагнитные тела, в которых $\mathbf{I}_0$ отлично от нуля, мы будем называть *постоянными магнитами*.

Таким образом, зависимость $\mathbf{I}$ от $\mathbf{H}$ в идеализированных ферромагнетиках остается *линейной*, и мы получаем возможность пользоваться принципом суперпозиции полей.

Несмотря на то, что свойства реальных ферромагнетиков весьма существенно отличаются от свойств наших идеализированных ферромагнетиков (как показывает уже самая возможность изготовления постоянных магнитов из немагнитной стали, размагничения магнитов и т. д.), однако в некоторых случаях формула (73.1) все же является известным приближением к действительности. Так, например, она применима к намагниченной почти до насыщения твердой стали при условии, что изменения внешнего поля достаточно малы. Вместе с тем рассмотрение идеализированных ферромагнетиков позволит нам понять старые теории магнетизма, оперировавшие представлениями о магнитных зарядах или полюсах.

Введенное нами представление об идеализированных ферромагнетиках сводится, согласно (73.1), в сущности к замене ферромагнетика совокупностью постоянного магнита (в строгом смысле этого слова) и парамагнетика.

2. На основании (62.9), (73.1) и (63.2)

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I} = \mu\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}_0. \tag{73.2}$$

Так как ранее выведенные дифференциальные уравнения поля (62.7) и (62.8) остаются справедливыми в произвольной среде, то полная система уравнений поля при наличии постоянных магнитов приобретает вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}_0 \tag{73.3}$$

(пограничных условий, однозначно вытекающих из дифференциальных уравнений, для краткости не выписываем). Она отличается от системы уравнений (С) (§ 64, с. 293) только членом $4\pi\mathbf{I}_0$ в последнем уравнении и позволяет *однозначно* определить магнитное поле, если известно распределение электрических токов $\mathbf{j}$ в проводниках, распределение *постоянного* намагничения $\mathbf{I}_0$ в ферромагнетиках и, наконец, значение магнитной проницаемости в каждой точке среды.

В этой однозначности проще всего убедиться, разбив напряженность поля $\mathbf{H}$ на сумму напряженностей вихревого и безвихревого полей:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}'', \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' + \mathbf{B}'', \tag{73.4}$$

и положив

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}' = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B}' = 0, \quad \mathbf{B}' = \mu\mathbf{H}', \tag{73.5}$$

и

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}'' = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B}'' = 0, \quad \mathbf{B}'' = \mu\mathbf{H}'' + 4\pi\mathbf{I}_0. \tag{73.6}$$

Уравнения (73.5) для поля токов $\mathbf{H}'$ полностью совпадают с системой (С) в § 64 и, по доказанному, в том же § 64 однозначно определяют $\mathbf{H}'$, если известны значения $\mathbf{j}$ и μ в каждой точке пространства. Уравнения же (73.6) для поля $\mathbf{H}''$ постоянных магнитов могут быть записаны следующим образом:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}'' = 0, \quad \operatorname{div}\mu\mathbf{H}'' = 4\pi\rho^0_{\text{м}}, \tag{73.7}$$

где нами введено обозначение

$$\rho^0_{\text{м}} = -\operatorname{div}\mathbf{I}_0. \tag{73.8}$$

Величину $\rho^0_{\text{м}}$ принято называть плотностью *постоянных магнитных зарядов*. Этот исторически сложившийся термин весьма удобен, хотя, конечно, и является, с современной точки зрения, совершенно условным.

При такой записи уравнений поля выявляется полная аналогия между магнитным полем $\mathbf{H}''$ постоянных магнитов и электрическим полем $\mathbf{E}$ электрических зарядов: поле $\mathbf{H}''$, будучи безвихревым, обладает, подобно $\mathbf{E}$, однозначным скалярным потенциалом ψ:

$$\mathbf{H}'' = -\operatorname{grad}\psi; \tag{73.9}$$

далее, истоками вектора $\mu\mathbf{H}''$ (отличающегося от магнитной индукции $\mathbf{B}$ на $4\pi\mathbf{I}_0$) являются постоянные магнитные заряды $\rho^0_{\text{м}}$, подобно тому как *свободные* электрические заряды ρ являются истоками вектора $\varepsilon\mathbf{E}$ (равного электрической индукции $\mathbf{D}$). Таким образом, существует полное соответствие между $\mathbf{H}''$ и $\mathbf{E}$, между $\mu\mathbf{H}'' = \mathbf{B}'' - 4\pi\mathbf{I}_0$ и $\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{D}$ и, наконец, между $\rho^0_{\text{м}}$ и ρ;

следовательно, к полю постоянных магнитов применимы все результаты, полученные при изучении диэлектриков (с заменой электрических величин на соответствующие магнитные).

В частности, из результатов § 22 следует, что поле $\mathbf{H}''$ однозначно определяется заданием μ как функции точки и заданием плотности $\rho_{\text{м}}^0$ постоянных магнитных зарядов, которая в свою очередь определяется заданием $\mathbf{I}_0$ как функции точки.

Таким образом, магнитное поле $\mathbf{H}$ может быть *однозначно* представлено как наложение двух независимых полей — поля токов $\mathbf{H}'$ и поля магнитов $\mathbf{H}''$. Поле токов уже было рассмотрено нами ранее, так что мы теперь можем ограничиться рассмотрением поля постоянных магнитов $\mathbf{H}''$.

3. Воспользовавшись соотношением $\mu\mathbf{H}'' = \mathbf{H}'' + 4\pi\varkappa\mathbf{H}''$, можно представить второе из уравнений (73.7) следующим образом:

$$\operatorname{div}\mathbf{H}'' = 4\pi\rho_{\text{м}}^0 - 4\pi\operatorname{div}\varkappa\mathbf{H}''.$$

Таким образом, $\rho_{\text{м}}^0$ соответствует плотности *свободных* электрических зарядов (заданием $\rho_{\text{м}}^0$ *определяется* поле $\mathbf{H}''$), тогда как

$$-\operatorname{div}\varkappa\mathbf{H}'' = \rho'_{\text{м}} \tag{73.10}$$

соответствует плотности связанных электрических зарядов ($\rho_{\text{связн}} = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\operatorname{div}\alpha\mathbf{E}$); $\rho'_{\text{м}}$ можно назвать плотностью *связанных* магнитных зарядов, *индуцированных* в магнетике полем $\mathbf{H}''$ [1]).

Однако в некотором ином отношении $\rho_{\text{м}}^0$ соответствует плотности не свободных, а *связанных* электрических зарядов: в противоположность свободным электрическим зарядам постоянные магнитные заряды не могут быть отделены друг от друга. Действительно, рассмотрим произвольное тело, окруженное со всех сторон неферромагнитной средой. Проведем в этой среде какую-либо замкнутую поверхность S, охватывающую это тело и ограничивающую объем V. Проинтегрировав уравнение (73.8) по этому объему V и воспользовавшись теоремой Гаусса (17*), получим

$$\int\limits_V \rho_{\text{м}}^0\, dV = -\oint\limits_S I_{0n}\, dS = 0, \tag{73.11}$$

ибо на поверхности S, т. е. в неферромагнитной среде, постоянное намагничение $\mathbf{I}_0$ тождественно равно нулю. Таким образом, полный «магнитный заряд» любого постоянного магнита всегда равен нулю.

При наличии в поле поверхностей разрыва векторов $\mathbf{H}''$ и $\mathbf{I}_0$ и магнитной проницаемости μ предшествующие уравнения дол-

[1]) Зная $\rho_{\text{м}}^0$ и μ, можно определить $\mathbf{H}''$, а зная $\mathbf{H}''$, можно определить $\rho'_{\text{м}}$, в частности, если $\rho_{\text{м}}^0 = 0$, то как $\mathbf{H}'' = 0$, так и $\rho'_{\text{м}} = 0$.

жны быть дополнены однозначно вытекающими из них пограничными условиями (ср. § 6 и 49):

$$\begin{gathered}\operatorname{Rot}\mathbf{H}''=0,\quad \operatorname{Div}\mu\mathbf{H}''=\mu_2 H''_{n2}-\mu_1 H'_{1n}=4\pi\sigma^0_{\text{м}},\\ \sigma^0_{\text{м}}=-\operatorname{Div}\mathbf{I}_0=-(I_{0,2n}-I_{0,1n}),\quad \sigma'_{\text{м}}=-\operatorname{Div}\varkappa\mathbf{H}'',\end{gathered}\tag{73.12}$$

где $\sigma^0_{\text{м}}$ и $\sigma'_{\text{м}}$ означают поверхностную плотность постоянных и индуцированных магнитных зарядов; уравнение же (73.11) должно быть дополнено интегралом по поверхностям разрыва S' вектора $\mathbf{I}_0$, лежащего внутри объема V, т. е. суммой поверхностных магнитных зарядов $\sigma^0_{\text{м}}$, находящихся в этом объеме:

$$\int\limits_V \rho^0_{\text{м}}\,dV+\oint\limits_{S'}\sigma^0_{\text{м}}\,dS=0.\tag{73.13}$$

Предположим, что постоянный магнит равномерно намагничен по всему своему объему ($\mathbf{I}_0=\text{const}$). Тогда все постоянные магнитные заряды будут сосредоточены на поверхности магнита ($\rho^0_{\text{м}}=0$). Если, в частности, магнит имеет форму прямого цилиндра и если намагничение $\mathbf{I}_0$ параллельно оси цилиндра, то все постоянные магнитные заряды будут распределены по основаниям цилиндра с поверхностной плотностью

$$\sigma^0_{\text{м}}=\pm I_0\tag{73.14}$$

(ибо на боковой поверхности цилиндра $I_{0n}=0$, а вне магнита $\mathbf{I}_0=0$). Таким образом, такой магнит сечения S можно рассматривать как совокупность двух равных по величине магнитных зарядов:

$$m_0=\pm I_0 S$$

противоположного знака, распределенных по основаниям магнита (так называемые *полюсы магнита*); поле такого магнита можно рассматривать как наложение полей, возбуждаемых каждым из его полюсов в отдельности. Именно поэтому теории XVIII–XIX вв. оперировали понятием магнитных зарядов или полюсов.

Если, однако, разрезать магнит пополам, то каждая поверхность разреза приобретает характер поверхности разрыва вектора $\mathbf{I}_0$, т. е. на ней «появляется» поверхностный магнитный заряд той же плотности $\sigma^0_{\text{м}}=\pm I_0$, так что сумма зарядов каждого отдельного куска оказывается равной нулю.

4. Из установленного выше соответствия между магнитным полем постоянных магнитов и электрическим полем свободных электрических зарядов вытекает, что в *однородном* магнетике ($\mu=\text{const}$) скалярный потенциал ψ для магнитов равен [ср. (23.2)]:

$$\psi=\frac{1}{\mu}\int\frac{\rho^0_{\text{м}}}{R}\,dV+\frac{1}{\mu}\int\frac{\sigma^0_{\text{м}}}{R}\,dS,$$

а напряженность магнитного поля $\mathbf{H}''$ равна

$$\mathbf{H}'' = \frac{1}{\mu}\int \frac{\mathbf{R}}{R^3}\,\rho^0_{\text{м}}\,dV + \frac{1}{\mu}\int \frac{\mathbf{R}}{R^3}\,\sigma^0_{\text{м}}\,dS. \qquad (73.15)$$

Таким образом, *напряженность поля постоянных магнитов в однородной среде* [1]) *обратно пропорциональна проницаемости среды.* В отличие от этого, как мы убедились в § 64, *напряженность магнитного поля токов в однородной среде от проницаемости среды вовсе не зависит.* Причину этого отличия поля магнитов от поля токов мы выясним в следующем параграфе.

5. В теории постоянных магнитов общепринято исходить из допущения, что плотность $\mathbf{f}$ пондеромоторных сил, действующих на постоянные магнитные заряды, по аналогии с электростатикой выражается формулой

$$\mathbf{f} = \rho^0_{\text{м}}\mathbf{H}. \qquad (73.16)$$

Справедливость этой формулы будет доказана нами в § 75. Пока же заметим, что из полной аналогии формул (73.15) и (73.16) с соответствующими формулами электростатики следует, что сила взаимодействия точечных (постоянных) магнитных зарядов в однородной среде определяется *законом Кулона*

$$F = \frac{mm'}{\mu R^2}; \qquad (73.17)$$

при этом, конечно, под «точечным» магнитным зарядом или полюсом нужно, очевидно, понимать заряд достаточно малого объема ΔV постоянного магнита:

$$m = \int_{\Delta V} \rho^0_{\text{м}}\,dV.$$

Именно этот закон Кулона (73.17) и играл роль основного постулата в теориях магнетизма XVIII–XIX вв.

Согласно (73.16) пондеромоторные *силы, испытываемые магнитными зарядами* в магнитном поле, *определяются напряженностью* $\mathbf{H}$ этого поля, тогда как силы, испытываемые электрическими *токами*, согласно (65.1), определяются магнитной *индукцией* $\mathbf{B}$.

Вместе с тем, как только что отмечалось, напряженность поля магнитов в однородной среде обратно пропорциональна проницаемости этой среды μ, тогда как напряженность поля токов в однородной среде от μ не зависит. Сопоставляя эти результаты, мы приходим к следующим выводам: *в однородной магнитной среде* ($\mu = \text{const}$) *пондеромоторные силы взаимодействия постоянных магнитов обратно пропорциональны* μ, *силы взаимодействия между током и постоянным магнитом от* μ *не*

[1]) Однородность среды, строго говоря, означает, что μ имеет одинаковое значение во всех точках поля магнитов, в том числе и внутри того материала, из которого изготовлены сами магниты.

зависят и, наконец, как уже отмечалось в § 65, *силы взаимодействия токов прямо пропорциональны* μ.

Причину этого различия между токами и постоянными магнитами мы выясним в следующем параграфе.

6 Уравнения магнитного поля были получены нами в начале главы из представления, что свойства магнетиков обусловливаются наличием в них молекулярных токов. Не изменяя этих уравнений и лишь введя формально понятие плотности магнитных зарядов, определяемое уравнением (73.8), мы показали, что теория постоянных магнитов может быть представлена в форме, соответствующей представлению о существовании реальных магнитных зарядов в молекулах магнетиков.

Хотя никаких магнитных зарядов в действительности не существует, все же в ряде случаев удобно пользоваться этой формой теории, позволяющей непосредственно использовать в теории магнетизма результаты теории диэлектриков.

Вместе с тем доказанная далеко идущая эквивалентность теории молекулярных токов и теории магнитных зарядов делает понятным успех, которым пользовались теории магнетизма XVIII–XIX вв., оперировавшие понятием магнитных зарядов или полюсов. Действительно, благодаря рассмотренной в § 56 эквивалентности элементарных токов и магнитных диполей все *макроскопические уравнения поля в любых магнетиках*, а не только в постоянных магнитах, могут быть формально интерпретированы как с точки зрения современной электронной теории, так и на основе представлений о существовании в молекулах магнетиков магнитных зарядов [1]. Если, однако, выйти за рамки макроскопической теории, рассматривающей проницаемость μ как заданную характеристику магнетика, и поставить вопросы о механизме намагничивания, о зависимости значения μ от других характеристик тела и т. д., то сразу же выясняется, что старые теории магнетизма не только не совместимы с современными сведениями о строении атомов, но что даже в области макроскопических явлений они совершенно бессильны, например, объяснить диамагнетизм или гиромагнитные явления (см. § 71).

§ 74. Другой вариант уравнений магнитного поля в идеализированных ферромагнетиках. Эквивалентность электрических токов и постоянных магнитов

1. В предыдущем параграфе мы изложили общепринятую теорию постоянных магнитов, согласно которой как активные, так и пассивные характеристики постоянных магнитов (т. е. как

[1]) Если отвлечься от трудности, связанной с тем, что восприимчивость $\varkappa$ диамагнетиков отрицательна

возбуждаемое ими поле, так и силы, испытываемые ими во внешнем магнитном поле) совершенно иначе зависят от магнитной проницаемости среды μ, чем соответствующие магнитные характеристики электрических токов. В настоящем параграфе мы постараемся выяснить смысл и причину этого различия.

Прежде всего нужно отметить, что ряд выводов предыдущего параграфа относился к гипотетическому случаю *строго однородной* в магнитном отношении среды (μ имеет одинаковое значение *во всех* точках поля). Ясно, что этот случай не имеет практического значения.

Действительно, проницаемость материала, из которого изготовлены магниты, вообще говоря, отлична от проницаемости окружающей их среды, и, таким образом, условие постоянства μ во всем поле, вообще говоря, не выполняется. Но даже если бы оно и было выполнено при некотором определенном выборе окружающей магниты среды, то для проверки полученных в § 73 результатов необходимо было бы варьировать проницаемость μ среды и сравнить напряженность поля, пондеромоторные силы и т. д. в средах различной проницаемости. При этом, однако, проницаемость самих постоянных магнитов оставалась бы по необходимости неизменной, т. е. постоянство μ во всем поле нарушалось бы.

Итак, необходимо различать *гипотетический* случай *строго однородной среды* и практически единственно интересный случай *однородности внешней среды* (т. е. среды вне магнитов). Поэтому поставленный в начале параграфа вопрос нужно разбить на два вопроса: 1) чем объясняется установленная в § 73 разница между магнитами и токами в *строго однородной* среде? и 2) как зависит поле магнитов и испытываемые ими силы от проницаемости однородной *внешней* среды?

Рассмотрим эти вопросы по порядку.

2. Установленная в § 73 разница между магнитами и токами *в строго однородной* среде объясняется попросту тем, что мы, следуя исторически сложившейся традиции (о происхождении которой будет сказано ниже), исходили в § 73 из формулы (73.1):

$$\mathbf{I} = \varkappa \mathbf{H} + \mathbf{I}_0,$$

т. е. предположили, что индуцированное намагничение $\mathbf{I}_{\text{инд}}$ постоянных магнитов пропорционально *напряженности* поля в них:

$$\mathbf{I}_{\text{инд}} = \varkappa \mathbf{H}. \tag{74.1}$$

В диа- и парамагнетиках эта формула, очевидно, эквивалентна формуле

$$\mathbf{I}_{\text{инд}} = \frac{\varkappa}{\mu} \mathbf{B}; \tag{74.2}$$

однако в постоянных магнитах $\mathbf{H} \neq \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$, и эквивалентность фор-

мул (74.1) и (74.2) нарушается. Поэтому, пытаясь установить *линейную* систему уравнений поля в идеализированных ферромагнетиках, которая при $\mathbf{I}_0 = 0$ переходила бы в известные уже нам уравнения поля в диа- и парамагнетиках, мы с равным правом могли бы исходить не из (74.1), а из (74.2), т. е. вместо (73.1) положить:

$$\mathbf{I} = \frac{\varkappa}{\mu}\mathbf{B} + \mathbf{I}_0. \tag{74.3}$$

Выбор между (73.1) и (74.3) может быть сделан только на основании более углубленного анализа этих формул, который будет произведен нами несколько позже. Пока же мы рассмотрим вариант уравнений поля, основанный на замене формулы (73.1) формулой (74.3) (мы будем называть его «новым вариантом» в отличие от «обычного варианта»).

Прежде всего в «новом варианте» формула (73.2) заменится формулой

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I} = \mathbf{H} + \frac{4\pi\varkappa}{\mu}\mathbf{B} + 4\pi\mathbf{I}_0,$$

откуда на основании (63.2)

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + 4\pi\mu\mathbf{I}_0. \tag{74.4}$$

Отличие этой формулы от (73.2) сводится к появлению множителя μ в последнем члене справа.

Соответственное изменение должно быть внесено также и в формулы (73.3) и (73 6); далее, в уравнениях (73.8) и (73.12) нужно в новом варианте изменить определение объемной и поверхностной плотности постоянных магнитных зарядов и положить

$$\rho^0_{\text{м}} = -\operatorname{div}\mu\mathbf{I}_0, \quad \sigma^0_{\text{м}} = -\operatorname{Div}\mu\mathbf{I}_0. \tag{74.5}$$

Все же остальные (нумерованные) формулы § 73, за исключением формулы (73 14), как легко убедиться, остаются справедливыми и в новом варианте.

Рассмотрим теперь случай *строго однородной* среды. В этом случае можно в формулах (74.5) вынести μ за знак пространственной производной:

$$\rho^0_{\text{м}} = -\mu\operatorname{div}\mathbf{I}_0, \quad \sigma^0_{\text{м}} = -\mu\operatorname{Div}\mathbf{I}_0. \tag{74.6}$$

Таким образом, в новой формулировке, в отличие от обычной, *плотность постоянных магнитных зарядов* (*при заданном постоянном намагничении* $\mathbf{I}_0$) *пропорциональна проницаемости* μ.

Внося (74.6) в (73.15), убеждаемся, что *напряженность поля постоянных магнитов* (при заданном $\mathbf{I}_0$) *не зависит от проницаемости* (*строго однородной*) *среды*, т. е. что прежнее различие в этом отношении между магнитами и токами в новом варианте отпадает.

Наконец, внося (74.6) в (73.16) и допуская, что проницаемость μ постоянна, если не во всей среде, то хотя бы в тех участках ферромагнетика, в которых $\mathbf{I}_0$ отлично от нуля, получаем

$$\mathbf{f} = \rho_{\text{м}}^0 \mathbf{H} = -\mu \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{I}_0. \qquad (74.7)$$

Таким образом, в новом варианте *силы, действующие на магнитные заряды, определяются* (при заданном $\mathbf{I}_0$) *не напряженностью поля* $\mathbf{H}$, *а вектором* $\mu\mathbf{H}$. Таким образом, ввиду независимости $\mathbf{H}$ от μ, пондеромоторные силы взаимодействия магнитов в *строго однородной* среде, как и силы взаимодействия токов, прямо пропорциональны μ, т. е. и в этом отношении новый вариант устраняет имевшееся в обычном варианте различие между постоянными магнитами и токами.

3. Какой же из вариантов теории постоянных магнитов следует предпочесть?

Обычный вариант теории может быть охарактеризован либо уравнением (73.1), либо эквивалентным ему уравнением (73.8), согласно которому плотность постоянных магнитных зарядов определяется вектором постоянного намагничения $\mathbf{I}_0$, независимо от проницаемости μ вещества магнита. С другой стороны, новый вариант может быть охарактеризован либо уравнением (74.3), либо эквивалентным ему уравнением (74.5), согласно которому $\rho_{\text{м}}^0$, при постоянном $\mathbf{I}_0$, изменяется пропорционально проницаемости μ магнита.

Если бы существовал способ, сохраняя неизменным постоянное намагничение $\mathbf{I}_0$ изменять проницаемость μ вещества, из которого изготовлен данный магнит, то можно было бы экспериментально установить, какой из вариантов теории соответствует действительности. Так как, однако, такого способа нет, то *различие между обоими вариантами является чисто терминологическим*: ведь все отличие второго варианта от первого сводится к замене уравнения (73.2): $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}_0$ уравнением (74.4): $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + 4\pi\mu\mathbf{I}_0$. Так как, по определению, значения $\mathbf{I}_0$ и μ в каждой точке постоянного магнита постоянны во времени, то никакие доступные экспериментальной проверке выводы теории не могут зависеть от того, будет ли разность $\mathbf{B} - \mu\mathbf{H}$ обозначена через $4\pi\mathbf{I}_0$ или через $4\pi\mu\mathbf{I}_0$.

4. Итак, установленная в § 73 разница между зависимостью активных и пассивных характеристик магнитов и токов от проницаемости *строго однородной* среды носит, в сущности, терминологический характер. Терминология обычного варианта теории заимствована из теорий магнетизма XIX в., исходивших из представления о существовании реальных магнитных зарядов в молекулах магнетика и о взаимодействии этих зарядов по закону Кулона, и вполне соответствует этим представлениям. Терминология же «нового варианта» соответствует современным представлениям о природе магнетизма. Сказывается это, во-первых,

в том, что она устраняет неоправданное терминологическое различие между зависимостью от μ активных и пассивных характеристик магнитов и токов; во-вторых, она связывает постоянство намагничения $\mathbf{I}_0$ не с постоянством фиктивных зарядов $\rho^0_м$, а с *постоянством тех молекулярных токов* $\mathbf{j}_{мол}$, которыми это намагничение обусловлено.

Действительно, согласно современным представлениям, постоянное намагничение $\mathbf{I}_0$ должно обусловливаться постоянными молекулярными токами, (средняя) плотность которых связана с $\mathbf{I}_0$ соотношением [см. уравнения (61.9) и (61.10)]:

$$\mathbf{j}^0_{мол} = c \operatorname{rot} \mathbf{I}_0, \quad \mathbf{i}^0_{мол} = c \operatorname{Rot} \mathbf{I}_0. \tag{74.8}$$

Воспользовавшись уравнениями (74.8) и (74.4), получаем

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right) = \operatorname{rot} \mathbf{H} + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{I}_0 = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \mathbf{j}^0_{мол}). \tag{74.9}$$

Следовательно, согласно новому варианту, постоянные молекулярные токи совершенно равноправны токам проводимости $\mathbf{j}$.

Замена же уравнения (74.3) уравнением (73.1), т. е. переход к обычному варианту, нарушает это равноправие, а именно, в этом случае последнее уравнение заменяется следующим:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right) = \operatorname{rot} \mathbf{H} + 4\pi \operatorname{rot} \frac{\mathbf{I}_0}{\mu} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j} + \frac{1}{\mu}\mathbf{j}^0_{мол}\right) + 4\pi\left[\nabla \frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{I}_0\right].$$

Вообще нужно отметить, что хотя и в новом варианте можно оперировать с фиктивной плотностью магнитных зарядов $\rho^0_м$ и $\sigma^0_м$, однако рациональной характеристикой постоянных магнитов в этом варианте, в отличие от обычного, являются не $\rho^0_м$ и $\sigma^0_м$, а распределение постоянных молекулярных токов $\mathbf{j}^0_{мол}$ и $\mathbf{i}^0_{мол}$. Зная это распределение, можно определить магнитное поле постоянного магнита с помощью формулы (74.8) и испытываемые магнитом пондеромоторные силы с помощью формулы:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}[\mathbf{j}^0_{мол}\mathbf{B}].$$

Эквивалентность этого последнего соотношения формуле (73.16), которой мы пользовались до сих пор, будет доказана в следующем параграфе.

5. Тогда как весь вопрос о магнитах и токах в *строго однородной* среде носит чисто формальный характер, вопрос об активных и пассивных характеристиках магнитов и токов в *однородной внешней* среде, к которому мы теперь перейдем, имеет непосредственное физическое содержание, и ответ на него доступен экспериментальной проверке. Отметим, что ответ на этот последний вопрос будет совершенно одинаковым в обычном и в новом варианте теории

Рассмотрим сначала постоянный магнит из однородного материала проницаемости μ_i, помещенный в однородную внешнюю среду проницаемости μ_e. Легко убедиться, что никакой однозначной функциональной зависимости напряженности поля магнита во внешней среде от проницаемости этой среды μ_e не существует и что зависимость эта определяется *геометрической* формой магнита.

Рассмотрим, в частности, равномерно намагниченный ($\mathbf{I}_0 = \text{const}$) эллипсоид — это один из немногих случаев, в которых удается найти замкнутое аналитическое выражение для поля магнита. Для наших целей достаточно рассмотреть эллипсоид вращения, намагниченный параллельно оси симметрии. Обозначим длину главных осей эллипсоида через a, b, c, и пусть $b = c$. Можно показать, что напряженность $\mathbf{H}_e$ поля такого магнита в произвольной точке внешней среды следующим образом зависит от μ_e:

$$\mathbf{H}_e = \frac{\mathbf{h}(x, y, z)}{\mu_i + \left(\frac{1}{u} - 1\right)\mu_e}, \tag{74.10}$$

где вектор $\mathbf{h}(x, y, z)$ от μ_e не зависит, а постоянная u зависит только от отношения a/c осей эллипсоида:

$$u = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d\xi}{(1+\xi)^{3/2}\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\xi\right)}. \tag{74.11}$$

Этот результат легко получить, воспользовавшись решением задачи о поле равномерно намагниченного эллипсоида, которое можно найти в ряде курсов математической физики или теории потенциала [1]). Мы приведем это решение без доказательства. Поместим начало декартовых координат в центр эллипсоида и направим ось x по оси симметрии эллипсоида, т. е. по направлению намагничения. Скалярный потенциал ψ магнитного поля эллипсоида внутри эллипсоида будет равен

$$\psi_i = \alpha x,$$

где α — константа, а потенциал вне эллипсоида равен

$$\psi_e = \frac{\beta x}{2}\int_{\eta/a^2}^\infty \frac{d\xi}{(1+\xi)^{3/2}\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\xi\right)},$$

где β — константа, а η — функция координат x, y, z, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+\eta} + \frac{y^2+z^2}{c^2+\eta} = 1.$$

[1]) См , например· *Франк Ф* , *Мизес Р.* Дифференциальные уравнения математической физики. Т. II. — Л.–М : Гостехиздат, 1957, *Стреттон Дж* Теория электромагнетизма. — М : ИЛ, 1948

Исходя из этого выражения, для ψ_e можно показать, во-первых, что на поверхности эллипсоида

$$\psi_e = \beta u x,$$

где константа u определяется уравнением (74 11), и, во-вторых, что на поверхности эллипсоида производная ψ_e по нормали $\mathbf{n}$ к этой поверхности равна

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial n} = \beta(u-1)\frac{\partial x}{\partial n}.$$

Непрерывность касательных, слагающих напряженности $\mathbf{H}$ магнитного поля на поверхности эллипсоида, эквивалентна непрерывности потенциала ψ на этой поверхности, что дает

$$\alpha = \beta u.$$

Далее непрерывность нормальной слагающей магнитной индукции $\mathbf{B}$ на той же поверхности, ввиду (73.2), выражается уравнением

$$-\mu_e \frac{\partial \psi_e}{\partial n} = -\mu_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n} + 4\pi I_{0n}.$$

Так как $\dfrac{\partial \psi_i}{\partial n} = \alpha \dfrac{\partial x}{\partial n}$ и $I_{0n} = I_0 \dfrac{\partial x}{\partial n}$, то, воспользовавшись приведенным выражением для $\dfrac{\partial \psi_e}{\partial n}$ и сокращая на $\dfrac{\partial x}{\partial n}$, получаем

$$-\mu_e \beta(u-1) = -\mu_i \alpha + 4\pi I_0.$$

Исключая, наконец, из двух полученных уравнений постоянную α, получаем

$$\beta = \frac{4\pi I_0}{\mu_e(1-u)+\mu_i u} = \frac{\text{const}}{\mu_i + \mu_e(1/u-1)}.$$

Так как ψ_e, а стало быть, и $\mathbf{H}_e$ зависят от μ_e только через посредство коэффициента β, то формула (74 10) доказана.

Интеграл (74.11) выражается в элементарных функциях, а именно:

при $\gamma = a/c < 1$

$$u = \frac{1}{1-\gamma^2}\left[1 - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda}\right)\right],$$

где $\lambda = \sqrt{1-\gamma^2}/\gamma$,

при $\gamma = a/c > 1$

$$u = \frac{1}{\gamma^2-1}\left(\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda} - 1\right),$$

где $\lambda = \sqrt{\gamma^2-1}/\gamma$.

Для наших целей достаточно рассмотреть три случая.

1) Эллипсоид вытянут, и его ось симметрии гораздо длиннее двух других осей: $a \gg c$; иными словами, магнит представляет собой длинный тонкий стержень. В этом случае значение u очень мало $\left(u \sim \dfrac{c^2}{a^2}\ln\dfrac{a}{c}\right)$, множитель у μ_e в знаменателе формулы (74.10) очень велик и H_e в первом приближении обратно пропорционально μ_e:

$$H_e \backsim \frac{1}{\mu_e}. \tag{74.12}$$

2) Эллипсоид вырождается в шар: $a = c$; в этом случае (который будет также непосредственно рассмотрен в задаче 34 в конце

этого параграфа) $u = 1/3$, и формула (74.10) принимает вид

$$H_e \sim \frac{1}{\mu_i + 2\mu_e}. \tag{74.13}$$

3) Наконец, эллипсоид сплюснут и его ось симметрии гораздо короче двух других осей $a \ll c$; иными словами, магнит представляет собою плоский диск, намагниченный перпендикулярно плоскости симметрии. В этом случае значение u близко к единице ($u \sim 1 - \pi a/2c$), множитель у μ_e в формуле (74.10) очень мал, и H_e в первом приближении вовсе не зависит от μ_e:

$$H_e \sim \frac{1}{\mu_i}. \tag{74.14}$$

Таким образом, форма магнита играет решающую роль и никакой универсальной зависимости поля магнита от проницаемости μ_e внешней среды не существует. Часто встречающееся утверждение, что *напряженность поля магнита обратно пропорциональна* μ_e, справедливо *только для длинных стержнеобразных магнитов*. Магниты же дискообразные аналогичны электрическим токам в том отношении, что напряженность их поля во внешней среде практически от ее проницаемости μ_e не зависит.

Все сказанное о постоянных магнитах справедливо, очевидно, и для *электромагнитов с магнитным сердечником*, — ведь молекулярные токи, обусловливающие постоянный магнетизм, создают поле по тому же закону, как и токи проводимости, а для применимости предшествующих рассуждений существенно лишь, чтобы проницаемость μ_i материала, по поверхности которого циркулируют токи, оставалась неизменной при изменениях μ_e.

Иначе обстоит дело с полем *линейного контура тока* или полем (открытого) соленоида. В этом случае внешняя среда заполняет пространство между витками тока, и напряженность магнитного поля в ней от ее проницаемости μ_e практически не зависит (как и в случае строго однородной среды). Действительно, в этом случае замкнутые (либо винтообразные — см. § 53) силовые линии магнитного поля в основной своей массе располагаются *целиком в однородной* внешней среде. При намагничении среды магнитные диполи этой среды, ориентируясь по направлению поля, будут образовывать замкнутые (или лишенные начала и конца винтообразные) цепочки, вследствие чего заряды смежных диполей будут взаимно нейтрализоваться. Подобное намагничение среды, очевидно, не вызовет изменения поля.

Напротив, при наличии сердечника практически каждая магнитная силовая линия пересекает поверхность раздела между сердечником и внешней средой. Скачок намагничения на этой поверхности эквивалентен появлению на ней индуцированных

поверхностных магнитных зарядов [см. (73.12)] плотности

$$\sigma'_{\text{м}} = -\operatorname{Div} \varkappa \mathbf{H} = \pm(\varkappa_e H_{en} - \varkappa_i H_{in}),$$

где $\varkappa_e$ и $\varkappa_i$ — восприимчивости внешней среды и магнита. Поле этих индуцированных зарядов, очевидно, видоизменяет результирующее поле тока.

6. Нам остается рассмотреть зависимость пассивных характеристик магнитов и токов от проницаемости однородной внешней среды. В следующем параграфе будет показано, что силы, действующие на источник магнитного поля (магнит и ток) в заданном внешнем магнитном поле индукции $\mathbf{B}$, могут быть однозначно определены, если известно «собственное» поле $\mathbf{H}'$, возбуждаемое этим источником. Поэтому силы при заданной индукции внешнего поля $\mathbf{B}$ изменяются при изменениях μ_e так же, как и собственное поле $\mathbf{H}'$. Таким образом, к пассивным характеристикам магнитов и токов непосредственно применимо все сказанное об их активных характеристиках. В частности, никакой универсальной зависимости как пассивных, так и активных характеристик магнитов и токов от проницаемости μ_e однородной *внешней* среды не существует. Никакой разницы в этом отношении между постоянными магнитами и электромагнитами с *сердечниками* также нет: если эти магниты имеют удлиненную стержнеобразную форму, то действующая на них сила определяется напряженностью внешнего поля $\mathbf{H}$ (т. е. обратно пропорциональна μ_e при заданном $\mathbf{B}$); если же они имеют дискообразную форму, то действующая на них сила определяется индукцией внешнего поля $\mathbf{B}$ (т. е. при заданном $\mathbf{B}$ от μ_e не зависит). Последний случай имеет место также для линейных токов и электромагнитов без сердечника.

Вместе с тем становится понятным обычное утверждение, что, измеряя магнитное поле по величине пары сил, действующих на помещенную в него *магнитную стрелку или же на петлю тока*, мы в первом случае (удлиненный стержень) измеряем *напряженность* поля $\mathbf{H}$, а во втором — его *индукцию* $\mathbf{B}$.

З а д а ч а 34. Определить поле равномерно намагниченного постоянного магнита сферической формы в однородной внешней среде проницаемости μ_e.

§ 75. Пондеромоторные силы, испытываемые постоянными магнитами во внешнем магнитном поле

1. В § 73 и 74 мы применяли для вычисления действующих на магнит сил формулу (73.16), написав ее по аналогии с электростатикой. Теперь мы дадим надлежащее обоснование этой формуле

Строгий вывод выражения для пондеромоторных сил, действующих в магнитном поле, будет дан в § 83. Однако в основу этого вывода будет положено определенное выражение для энергии магнитного поля, справедливое

лишь для неферромагнитных сред. Поэтому результаты § 83 к постоянным магнитам непосредственно неприменимы. Если, однако, мы откажемся от рассмотрения внутренних натяжений, вызываемых в постоянных магнитах внешним магнитным полем, и ограничимся определением, во-первых, равнодействующей **F** сил, приложенных к магниту, и, во-вторых, результирующего момента **N** этих сил, то для однозначного решения этой задачи вполне достаточно результатов § 33 и 84.

Действительно, пондеромоторные силы электромагнитного поля могут быть сведены к натяжениям (см. § 33 и 84). Поэтому слагающие равнодействующей **F** и пары сил **N**, приложенных к магниту, должны равняться [см. (33.2) и (33.9)]:

$$F_x = \oint\limits_S T_{xn}\, dS, \qquad N_x = \oint\limits_S (yT_{zn} - zT_{yn})\, dS, \tag{75.1}$$

где замкнутая поверхность интегрирования S охватывает магнит и прилегает к его поверхности с ее внешней стороны. Другими словами, S расположена целиком в неферромагнитной среде. Следовательно, компоненты тензора натяжений **T** в (75.1) должны определяться формулами, справедливыми для неферромагнитной среды.

В § 84 будет доказано, что компоненты тензора натяжений магнитного поля в неферромагнитной среде равны

$$T_{xx} = \frac{\mu}{4\pi}\left(H_x^2 - \frac{1}{2}H^2\right), \quad T_{xy} = \frac{\mu}{4\pi}H_xH_y, \quad T_{xz} = \frac{\mu}{4\pi}H_xH_z \tag{75.2}$$

и аналогично для T_{yy}, T_{yz} и т. д. [1]). Заметим, что с точки зрения теории, исходящей из представления о существовании магнитных зарядов, формула (75.2) может быть непосредственно получена из соответствующей электростатической формулы (34.2) путем замены **E** на **H** и ε на μ.

Внеся (75 2) в (75.1), можно вычислить равнодействующую **F** и результирующий момент **N** сил, действующих на магнит в магнитном поле **H**.

2. Если, внеся (75.2) в (75 1), преобразовать входящие в (75.1) интегралы с помощью формул (33.3) и (33.7), то мы получим формулы:

$$\mathbf{F} = \int\limits_V \mathbf{f}^{\text{эк}}\, dV, \quad \mathbf{N} = \int\limits_V [\mathbf{R}\mathbf{j}^{\text{эк}}]\, dV, \tag{75.3}$$

где введено обозначение

$$j_x^{\text{эк}} = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}, \tag{75.4}$$

причем предполагается, что компоненты T_{xx}, T_{xy} и т. д. тензора **T** выражаются формулами (75 2), справедливыми для неферромагнитной среды. Определяемый при этом условии формулами (75.4) вектор $\mathbf{f}^{\text{эк}}$ может быть назван *«эквивалентной плотностью»* пондеромоторных сил в постоянном магните. Действительно, из изложенного следует, что мы получим правильное значение равнодействующей **F** и результирующего момента **N** сил, приложенных к магниту, если внесем выражения (75.4) в (75.3) и произведем интегрирование по всему объему магнита. Однако истинное распределение пондеромоторных сил **f** по объему магнита может быть совершенно отлично от распределения «эквивалентных» сил, $\mathbf{f}^{\text{эк}}$, ибо тензор натяжений **T**

[1]) Мы ограничиваемся здесь рассмотрением только максвеллового тензора натяжений, обозначенного в § 84 через $\mathbf{T}'$, и отбрасываем тензор $\mathbf{T}''$, ибо последний изменяет лишь распределение натяжений в среде, но не влияет на **F** и **N**.

выражается формулами (75.2) лишь *вне* магнита, внутри же магнита его компоненты нам неизвестны и могут совсем иначе зависеть от векторов **H** и **B**. Поэтому можно утверждать только, что если фактически приложенные к элементам объема магнита силы **f** заменить силами $\mathbf{f}^{эк}$, то это не изменит ни равнодействующей, ни результирующего момента всех сил, приложенных к магниту.

Таким образом, эквивалентной плотностью сил $\mathbf{f}^{эк}$ можно пользоваться лишь в тех случаях, когда нас не интересует распределение пондеромоторных сил по объему магнита. Зато в этих случаях введение в рассмотрение эквивалентных сил $\mathbf{f}^{эк}$ весьма удобно потому, что, как мы сейчас покажем, $\mathbf{f}^{эк}$ может быть просто выражена через плотность постоянных магнитных зарядов $\rho_м^0$ и плотность токов проводимости **j** в магните.

3 Внеся (75.2) в (75.4) и выполнив дифференцирование, получаем после надлежащей перегруппировки членов.

$$4\pi j_x^{эк} = H_x \operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) + \mu H_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\right) + \mu H_z\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}H^2\frac{\partial \mu}{\partial x}. \tag{75.5}$$

Так как

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \operatorname{rot}_z \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} j_z \quad \text{и} \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \operatorname{rot}_y \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} j_y,$$

то сумма второго и третьего членов равна

$$\frac{4\pi}{c}(j_y \cdot \mu H_z - j_z \cdot \mu H_y) = \frac{4\pi}{c}[\mathbf{j} \cdot \mu\mathbf{H}]_x.$$

Поэтому (75.5) является слагающей по оси x следующего векторного равенства

$$\mathbf{f}^{эк} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) + \frac{1}{c}[\mathbf{j} \cdot \mu\mathbf{H}] - \frac{1}{8\pi}H^2\nabla\mu.$$

Воспользовавшись уравнением (73.7), которое применимо как в обычном, так и в новом варианте теории, получаем окончательное выражение для эквивалентной плотности пондеромоторных сил в постоянном магните:

$$\mathbf{f}^{эк} = \rho_м^0\mathbf{H} + \frac{1}{c}[\mathbf{j} \cdot \mu\mathbf{H}] - \frac{1}{8\pi} \cdot H^2\nabla\mu. \tag{75.6}$$

Первый член справа выражает силу, действующую на постоянные магнитные заряды, и совпадает с формулой (73.16), которую мы, таким образом, доказали.

Второй член отличается от обычного выражения (65.1) силы, действующей на токи проводимости, только заменой вектора **B** вектором $\mu\mathbf{H}$, который отличается от **B** лишь в постоянных магнитах [см. уравнение (73.2)]. Наконец, последний член справа выражает силу, зависящую от неоднородности магнитной проницаемости магнита. Вплоть до указанной замены вектора **B** вектором $\mu\mathbf{H}$ совокупность двух последних членов в (75.6) совпадает с выражением (84.1) для пондеромоторных сил в неферромагнитных средах [1].

4. Формула (75.6) по своему виду соответствует представлению о существовании в постоянных магнитах магнитных зарядов. Можно, однако, получить и другое равносильное выражение для $\mathbf{f}^{эк}$, в котором постоянные магниты характеризуются распределением в них не магнитных зарядов, а постоянных молекулярных токов.

---

[1]) В формулу (84.1), помимо сил $\mathbf{f}'$, входят также и стрикционные силы $\mathbf{f}''$, которые соответствуют отброшенному нами стрикционному тензору $\mathbf{T}''$ (см. примечание к с. 160).

Вместо того чтобы соответствующим образом преобразовывать формулу (75.6), удобнее с этой целью вернуться к исходным формулам (75.2). Воспользовавшись тем, что на поверхности S, по которой производится интегрирование в (75.1), $\mathbf{I}_0 = 0$ и поэтому $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, можно записать уравнения (75.2) в следующей форме:

$$T_{xx} = \frac{1}{4\pi\mu}\left(B_x^2 - \frac{1}{2}B^2\right), \quad T_{xy} = \frac{1}{4\pi\mu}B_xB_y, \quad T_{xz} = \frac{1}{4\pi\mu}B_xB_z. \quad (75.7)$$

Внеся эти выражения в (75.4) и выполнив дифференцирование, после надлежащей перегруппировки членов получим

$$4\pi f_x^{\text{эк}} = \frac{1}{\mu}B_x \operatorname{div}\mathbf{B} + B_y\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B_x}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B_y}{\mu}\right)\right\} + \\ + B_z\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{B_x}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B_z}{\mu}\right)\right\} - \frac{B^2}{2\mu^2}\frac{\partial\mu}{\partial x}.$$

Первый член справа равен нулю, так как $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$. Следующие два члена могут быть преобразованы с помощью формулы (74.9):

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right) = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \mathbf{j}^0_{\text{мол}})$$

совершенно так же, как были преобразованы аналогичные члены в (75.5). В результате получаем следующее выражение для $\mathbf{f}^{\text{эк}}$:

$$\mathbf{f}^{\text{эк}} = \frac{1}{c}[\mathbf{j} + \mathbf{j}^0_{\text{мол}} \cdot \mathbf{B}] - \frac{B^2}{8\pi\mu^2}\nabla\mu. \quad (75.8)$$

Последний член этого выражения соответствует последнему члену прежней формулы (75.6) и совпадает с ним при $\mathbf{I}_0 = 0$. Главный же первый член формулы (75.8) выражает тот факт, что пондеромоторное воздействие внешнего поля $\mathbf{B}$ на постоянные молекулярные токи $\mathbf{j}^0_{\text{мол}}$ такое же, как и на токи проводимости $\mathbf{j}$, и что постоянные магниты вполне характеризуются распределением в них токов $\mathbf{j}^0_{\text{мол}}$.

В заключение сделаем два замечания. Выражения (75.6) и (75.8) для эквивалентной плотности пондеромоторных сил внешнего поля в постоянных магнитах равносильны друг другу в том смысле, что, как явствует из вывода этих выражений, оба они после подстановки в (75.3) приводят к одинаковому значению равнодействующей $\mathbf{F}$ и результирующего момента $\mathbf{N}$ сил, испытываемых магнитом в магнитном поле. Однако эти выражения (75.6) и (75.8) отнюдь не равны друг другу, т. е. соответствуют различным распределениям натяжений и объемных сил по объему магнита. Вовсе нельзя быть уверенным, что хотя бы одно из этих распределений соответствует действительности, ибо использованный нами метод позволяет определить лишь равнодействующую $\mathbf{F}$ и результирующий момент $\mathbf{N}$ приложенных к магниту сил; распределение же этих сил по объему магнита может быть получено только путем гораздо более углубленного анализа всей проблемы в целом.

В этом параграфе мы ограничились для краткости рассмотрением только объемных магнитных зарядов $\rho^0_{\text{м}}$ и объемных молекулярных токов $\mathbf{j}^0_{\text{мол}}$. Выражения для поверхностной плотности пондеромоторных сил, приложенных к поверхностным зарядам и токам $\sigma^0_{\text{м}}$ и $\mathbf{i}^0_{\text{м}}$, получатся, очевидно, из соответствующих членов формул (75.6) и (75.8) путем замены $\rho^0_{\text{м}}$ на $\sigma^0_{\text{м}}$ и $\mathbf{j}^0_{\text{мол}}$ на $\mathbf{i}^0_{\text{мол}}$.

Учет сил, действующих на поверхности разрыва проницаемости μ, также не представляет затруднений.

6. Нам остается доказать сделанное в конце § 74 утверждение, что силы, действующие на источник магнитного поля (магнит) во внешнем магнит-

ном поле заданной индукции $\mathbf{B}^{(в)}$, могут быть определены, если известно «собственное» поле $\mathbf{H}^{(с)}$, возбуждаемое этим источником (магнитом), и что при изменениях проницаемости μ_e внешней среды, окружающей магнит, эти силы изменяются так же, как собственное поле $\mathbf{H}^{(с)}$ магнита.

Ввиду сделанного в § 73 допущения о линейности уравнений магнитного поля результирующее поле во внешней среде равно

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(в)} + \mathbf{H}^{(с)} = \frac{1}{\mu_e}\mathbf{B}^{(в)} + \mathbf{H}^{(с)}.$$

Согласно (75.1) действующие на магнит силы определяются тензором натяжения $\mathbf{T}$ в окружающей неферромагнитной среде. Согласно (75.2) компоненты этого тензора квадратичны относительно $\mathbf{H}$, так что, например,

$$T_{xy} = \frac{\mu_e}{4\pi}\left\{H_x^{(в)}H_y^{(в)} + H_x^{(в)}H_y^{(с)} + H_x^{(с)}H_y^{(в)} + H_x^{(с)}H_y^{(с)}\right\}.$$

Натяжение $\frac{\mu_e}{4\pi}H_x^{(в)}H_y^{(в)}$ определяет силы, которые испытывало бы вещество магнита при отсутствии в нем постоянного намагничения, возбуждающего поле $\mathbf{H}^{(с)}$ Силы эти определяются по формулам, выведенным для неферромагнитных тел, и нас сейчас не интересуют. Натяжения $\frac{\mu_e}{4\pi}H_x^{(с)}H_y^{(с)}$ выражают действие различных элементов постоянного магнита друг на друга и ничего не прибавляют к равнодействующей $\mathbf{F}$ и моменту $\mathbf{N}$ этих сил. Таким образом, силы, действующие на магнит во внешнем поле, определяются натяжением типа

$$T_{xy} = \frac{\mu_e}{4\pi}\left(H_x^{(в)}H_y^{(с)} + H_x^{(с)}H_y^{(в)}\right) = \frac{1}{4\pi}\left\{B_x^{(в)}H_y^{(с)} + H_x^{(с)}B_y^{(в)}\right\},$$

чем и доказывается приведенное утверждение.

Нами не было в предыдущем учтено то обстоятельство, что изменение проницаемости μ_e внешней среды при неизменной проницаемости μ_i магнита неизбежно связано с изменением индукции внешнего поля $\mathbf{B}^{(в)}$ вблизи магнита. Однако нетрудно показать, что если внешняя среда однородна и если внешнее поле тоже однородно вдали от магнита, то это обстоятельство не нарушает правильности доказанного утверждения.

ГЛАВА VI

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 76. Индукция токов в движущихся проводниках

Выяснив основные свойства стационарного электромагнитного поля, напряженность которого от времени не зависит, перейдем к изучению поля переменного. Обращаясь прежде всего к изучению индукции токов, мы изложим предварительно ряд соображений, которые помогут нам уяснить природу этих явлений и связать их с уже известными нам фактами.

1. Пусть замкнутый металлический проводник L, к которому не приложено сторонних ЭДС, движется во внешнем магнитном поле [1]) $\mathbf{H}$ с некоторой скоростью $\mathbf{v}$. Обозначим через $\mathbf{u}$ скорость относительно проводника L какого-либо из «свободных» электронов проводимости этого проводника; тогда полная скорость электрона будет равна $\mathbf{v}'$:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$

и, согласно (45.3), на электрон будет действовать лоренцева сила

$$\mathbf{F}' = \frac{e}{c}[\mathbf{v}'\mathbf{H}] = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}] + \frac{e}{c}[\mathbf{u}\mathbf{H}]. \tag{76.1}$$

Второй член справа перпендикулярен скорости $\mathbf{u}$ электрона относительно проводника, и поэтому соответствующая этому члену сила не будет изменять скорости $\mathbf{u}$, а будет лишь искривлять путь электрона в проводнике. Влияние этой силы на распределение токов и зарядов в проводнике (эффект Холла) было уже рассмотрено в § 45 и нас в дальнейшем интересовать не будет.

Что же касается первого слагающего силы $\mathbf{F}'$:

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}], \tag{76.2}$$

отличного от нуля только в движущихся проводниках, то эта сила $\mathbf{F}$, вообще говоря, не перпендикулярна $\mathbf{u}$ и поэтому может ускорять (и замедлять) движение электронов относительно проводника, т. е. может возбуждать электрические токи. Так, напри-

[1]) В этом параграфе для простоты мы будем предполагать, что магнитная проницаемость проводника $\mu = 1$, т. е. что в нем $\mathbf{H} = \mathbf{B}$

мер, в отрезке проводника L_1 (рис. 68) лоренцева сила, приложенная к отрицательным электронам ($e < 0$), будет гнать их по проводнику *влево*. Следовательно, в проводнике возникает электрический ток. Так как направление тока условно считается обратным направлению движения отрицательных зарядов, то ток этот окажется текущим слева направо. В этом состоит явление *индукции* токов при движении проводника в магнитном поле, которое, таким образом, получает весьма простое истолкование на основе ранее установленных нами законов постоянного поля.

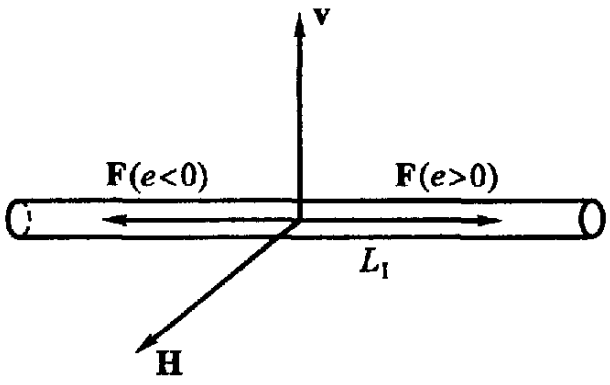

Рис 68

2. Подсчитаем силу индукционного тока. С этой целью заметим, что сила (76.2), испытываемая в магнитном поле $\mathbf{H}$ электроном, движущимся вместе с проводником со скоростью $\mathbf{v}$, равна силе, испытываемой электроном в электрическом поле напряженности $\mathbf{E}'$, если

$$\mathbf{E}' = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]. \tag{76.3}$$

Из второго закона Кирхгофа следует, что под воздействием поля $\mathbf{E}'$, а стало быть, и под воздействием эквивалентного $\mathbf{E}'$ поля $\mathbf{H}$, в замкнутом контуре L должен возникнуть ток, сила которого J определится из уравнения (38.6):

$$JR = \oint_L \mathbf{E}'\, d\mathbf{s} = \mathscr{E}^{\text{инд}}, \tag{76.4}$$

где R — сопротивление контура L, а $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ — циркуляция вектора $\mathbf{E}'$ по контуру L. Эта последняя величина носит название *электродвижущей силы индукции*; согласно (76.3), она равна

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = \frac{e}{c}\oint [\mathbf{vH}]\, d\mathbf{s} = -\frac{e}{c}\oint \mathbf{v}[d\mathbf{s}\,\mathbf{H}],$$

где последнее равенство написано на основании известного тождества векторной алгебры:

$$[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c} = -\mathbf{a}\,[\mathbf{cb}].$$

Чтобы определить значение последнего интеграла, заметим, что $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt$, где $d\mathbf{R}$ — перемещение рассматриваемого элемента $d\mathbf{s}$ контура L за время dt. Стало быть,

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = -\frac{e}{c}\oint \frac{d\mathbf{R}}{dt}\,[d\mathbf{s}\,\mathbf{H}]. \tag{76.5}$$

С другой стороны, из сравнения уравнения (50.3) с выражением для δA, приведенным на с. 229, следует, что

$$\oint \delta\mathbf{R}\,[d\mathbf{s}\,\mathbf{H}] = \delta\Phi = \delta \int H_n\,dS,$$

где $\delta\mathbf{R}$ — виртуальное перемещение элемента $d\mathbf{s}$ контура тока (ранее обозначавшееся через $\mathbf{q}$), а $\delta\Phi$ — обусловленное этим перемещением изменение магнитного потока Φ сквозь этот контур.

Заменяя в последнем уравнении $\delta\mathbf{R}$ на $d\mathbf{R}$ и сравнивая его с уравнением (76.5), получим

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = -\frac{e}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{d}{dt}\int H_n\,dS. \qquad (76.6)$$

Это уравнение выражает собой известный *закон индукции токов* в движущихся проводниках: возникающая в проводнике электродвижущая сила индукции равна скорости (деленной на c) изменения потока магнитного вектора через контур этого проводника. Знак минус в уравнении (76.6) означает, что если магнитный поток через контур проводника численно увеличивается, то направление электродвижущей силы индукции в этом контуре составляет с направлением потока *левовинтовую*, а не правовинтовую систему. Обратно, при уменьшении Φ, направления Φ и $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ составляют правовинтовую систему.

3. Из уравнения (76.6) следует, в частности, что если замкнутый проводник движется в магнитном поле так, что магнитный поток Φ через его контур остается постоянным, то, несмотря на это движение, ток в проводнике все же индуцироваться не будет. К этому же выводу в ряде частных случаев можно прийти непосредственно из уравнения (76.2). Пусть, например, плоский контур L движется в поле $\mathbf{H}$ так, что его плоскость неизменно остается параллельной и $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$. В этом случае Φ неизменно равно нулю и, стало быть, согласно уравнению (76.6), $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ тоже равно нулю. Непосредственно же из уравнений (76.2) следует, что пондеромоторная лоренцева сила направлена перпендикулярно к $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$, т. е. в нашем случае перпендикулярно к плоскости контура, и, стало быть, не может вызвать движения электронов *вдоль* контура, т. е. не может возбудить тока.

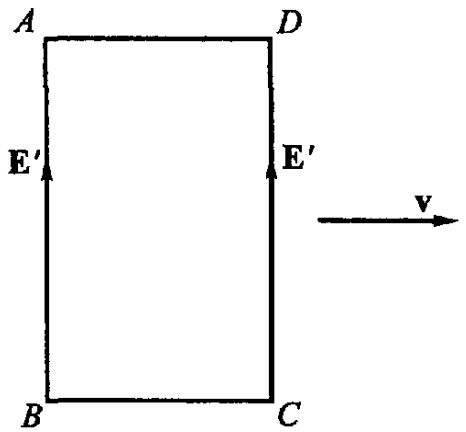

Рис. 69

Рассмотрим, далее, случай *поступательного* движения проводящего контура $ABCD$ (рис. 69) в *однородном* магнитном поле ($\mathbf{H}$ одинаково во всех точках поля); в этом случае все точки контура обладают одинаковой скоростью $\mathbf{v}$. Очевидно, что поток Φ через контур проводника при этих условиях

изменяться не будет и, следовательно, $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ будет равно нулю. Непосредственно же из постоянства векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{v}$ следует, что в параллельных сторонах проводника AB и CD электроны будут испытывать одинаковые по величине и направлению силы $\mathbf{E}'$. Силы эти будут стремиться вызвать циркуляцию электронов (ток) по проводнику во взаимно противоположных направлениях, и действия их взаимно уравновесятся.

4. Покажем теперь, что выражение (44.5) для плотности пондеромоторных сил $\mathbf{f}$, испытываемых в магнитном поле обтекаемым током проводником:

$$\mathbf{f} = \frac{e}{c}[\mathbf{jH}], \tag{76.7}$$

применимо не только к неподвижным, но и к движущимся проводникам. Согласно (76.1) сумма сил, испытываемых в магнитном поле $\mathbf{H}$ всеми электронами проводимости, находящимися в единице объема проводника, равна

$$\mathbf{f}' = \frac{ne}{c}[\mathbf{vH}] + \frac{ne}{c}[\bar{\mathbf{u}}\mathbf{H}],$$

где n — число электронов в единице объема, а $\bar{\mathbf{u}}$ — средняя скорость электронов относительно проводника. Однако магнитное поле действует не только на электроны, но и на положительные ионы, образующие твердый кристаллический скелет проводника и движущиеся, по условию, со скоростью $\mathbf{v}$. Сумма сил, действующих на ионы, находящиеся в единице объема проводника, равна

$$\mathbf{f}_+ = -\frac{ne}{c}[\mathbf{vH}],$$

ибо при условии нейтральности проводника сумма зарядов ионов должна равняться с обратным знаком сумме ne зарядов электронов. Следовательно, равнодействующая всех сил, приложенных к единице объема проводника, равна

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}' + \mathbf{f}_+ = \frac{ne}{c}[\bar{\mathbf{u}}\mathbf{H}].$$

Так как, согласно (45.1), плотность тока $\mathbf{j}$ в проводнике равна $\mathbf{j} = ne\mathbf{u}$ [1], то последняя формула, как и требовалось доказать, равносильна уравнению (44.5) или (76.7).

5. Основываясь на результатах этого параграфа, мы получаем возможность разрешить то кажущееся внутреннее противоречие теории, о котором упоминалось в § 45 Заключалось оно в том, что, согласно уравнению (45.3), сила, испытываемая электрическим зарядом в магнитном поле, перпендикулярна его скорости и потому никакой работы совершать не может, между тем как при движении несущего ток проводника (движущиеся заряды!)

[1]) Это выражение для $\mathbf{j}$ остается справедливым в движущемся *нейтральном* проводнике, ибо перенос заряда через неподвижную относительно наблюдателя единичную площадку внутри проводника (осуществляемый как электронами, так и неподвижными относительно проводника ионами) за единицу времени равняется $\mathbf{j} = ne(\mathbf{v} + \bar{\mathbf{u}}) + (-ne)\mathbf{v} = ne\bar{\mathbf{u}}$

пондеромоторные силы магнитного поля, несомненно, совершают некоторую работу. А именно, если скорость проводника равна $\mathbf{v}$, то пондеромоторные силы магнитного поля, приложенные к единице объема проводника, совершают, согласно (76.7), за время dt работу

$$A = \mathbf{f}\mathbf{v}\,dt = \frac{e}{c}\,[\mathbf{j}\mathbf{H}]\mathbf{v}\,dt \tag{76.8}$$

Объясняется это кажущееся противоречие тем, что работа пондеромоторных сил магнитного поля $\mathbf{f}$ представляет собой лишь часть всей работы, совершаемой магнитным полем. Эта работа исчерпывалась бы выражением (76.8), т е. работой равнодействующей всех сил $\mathbf{f}$, только в том случае, если бы все заряды в проводнике двигались с одинаковой скоростью $\mathbf{v}$ Так как электроны движутся не со скоростью $\mathbf{v}$, а со скоростью $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, то магнитное поле совершает над каждым из них еще дополнительную, не учтенную в (76.8) работу

$$\mathbf{F}\mathbf{u}\,dt = \frac{e}{c}\,\{[\mathbf{v}\mathbf{H}] + [\mathbf{u}\mathbf{H}]\}\mathbf{u}\,dt = \frac{e}{c}\,[\mathbf{v}\mathbf{H}]\mathbf{u}\,dt$$

и, следовательно, над всеми электронами в единице объема дополнительную работу

$$A' = \frac{ne}{c}\,\overline{\mathbf{u}}[\mathbf{v}\mathbf{H}]\,dt = \frac{\mathbf{j}}{c}\,[\mathbf{v}\mathbf{H}]\,dt. \tag{76.9}$$

Таким образом, полная работа сил магнитного поля

$$A + A' = \frac{e}{c}\,[\mathbf{j}\mathbf{H}]\mathbf{v}\,dt + \frac{e}{c}\,\mathbf{j}\,[\mathbf{v}\mathbf{H}]\,dt = 0 \tag{76.10}$$

действительно равна нулю.

Воспользовавшись обозначением (76.3), можно записать выражение (76.9) следующим образом:

$$A' = \mathbf{j}\mathbf{E}'\,dt, \tag{76.11}$$

где $\mathbf{E}'$ — напряженность электродвижущей силы, индуцированной в проводнике при его движении в магнитном поле. Таким образом, A' есть не что иное, как работа, совершаемая электродвижущей силой индукции при прохождении по проводнику тока $\mathbf{j}$ [ср уравнение (35.5)]. В макроскопической теории электродвижущие силы, возбуждающие токи в проводниках, не причисляются к силам пондеромоторным, и пондеромоторная сила определяется как результирующая всех сил поля, действующих на физически бесконечно малый объем тела. Итак, с точки зрения макроскопической теории можно следующим образом резюмировать полученные нами результаты: при движении проводника в магнитном поле *работа* (76.8) *пондеромоторных сил этого поля равна по величине и противоположна по знаку работе* (76.11) *электродвижущих сил, индуцированных* в проводнике его движением в поле. Поэтому полная работа сил магнитного поля равна нулю.

§ 77. Закон электромагнитной индукции. Закон Ома для переменных токов

1. В предшествующем параграфе мы рассмотрели индукцию токов при движении замкнутого проводника L_1 в заданном внешнем магнитном поле $\mathbf{H}$. Предположим теперь, во-первых, что это поле $\mathbf{H}$ возбуждается током, циркулирующим в некотором неподвижном контуре L_2, и, во -вторых, что контур L_1 движется рав-

номерно с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Примем, далее, во внимание, что понятия *покоя и равномерного движения относительны* и что, согласно принципу относительности, взаимодействие двух равномерно движущихся тел (в данном случае контуров L_1 и L_2) может зависеть только от относительной, но не абсолютной скорости этих тел. Отсюда следует, что если, например, контур L_1 неподвижен, а контур L_2 движется с постоянной скоростью, то явления индукции токов в контуре L_1 должны оставаться прежними.

Стало быть, электродвижущая сила индукции, индуцированная в контуре L_1, должна определяться формулой (76.6) и в том случае, если контур этот остается неподвижным, а изменение магнитного потока Φ через него обусловливается *равномерным* движением тока J_2, возбуждающего поле $\mathbf{H}$.

2. Проведем только что изложенное рассуждение в более развернутой форме. Поскольку мы оперируем принципом относительности, нам нужно прежде всего установить, в какой или в каких системах отсчета справедливы изложенные нами в предшествующих главах законы электродинамики.

Законы эти были установлены на основании экспериментов, при которых, как и в большинстве физических экспериментов, отсчет движения производился относительно Земли. Однако более точные измерения [1]) показали, что законы электродинамики, как и законы ньютоновой механики, лишь приближенно справедливы в земной системе отсчета и строго справедливы лишь в так называемых *инерциальных* системах отсчета, т. е. в системах, в которых движение по инерции происходит согласно первому закону Ньютона. В частности, систему отсчета, связанную с «неподвижными» звездами, можно, как известно, с достаточной степенью точности считать системой инерциальной.

Далее, согласно принципу относительности движения, все *равномерно* движущиеся относительно друг друга системы отсчета являются совершенно равноправными, и законы всех физических явлений должны быть одинаковыми при пользовании отсчетами, произведенными в любой из этих систем. Стало быть, помимо системы неподвижных звезд, все равномерно движущиеся относительно нее системы отсчета также являются инерциальными и во всех них должны быть справедливы одни и те же законы электродинамики. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, мы всегда будем предполагать, что измерения электромагнитного поля и отсчет положения зарядов, проводников и т. д. производятся в некоторой определенной *инерциальной* системе K.

---

[1]) Таков, например, опыт Майкельсона 1925 г. (не смешивать с опытом Майкельсона 1881 г.), в котором сравнивалось время, необходимое лучу света (электромагнитные волны) для прохождения замкнутого пути на земной поверхности в двух противоположных направлениях. Опыт этот представляет собой оптический (т. е. электромагнитный) аналог механическому опыту Фуко и дает возможность обнаружить вращение Земли (см., например, *Вавилов С.* Экспериментальные основания теории относительности. — М.: ГИЗ, 1928, или *Зоммерфельд А.* Оптика. — М.: ИЛ, 1953. § 15). Соответствующий эксперимент впервые провел Ж. Саньяк (1913 г.). Его именем сегодня называют эффект появления фазового сдвига встречных волн во вращающемся кольцевом интерферометре. См., например, *Малыкин Г.Б.* // УФН. 2000. Т. 170 С 1325.

После этого отступления вернемся к нашей задаче Нами предполагалось, что в некоторой инерциальной системе K контур L_2, по которому циркулирует постоянный ток J_2, неподвижен, а контур L_1 движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ (первый случай). Далее рассматривался второй случай, когда L_1 неподвижен в системе K, а L_2 движется с постоянной скоростью $-\mathbf{v}$. Пусть инерциальная система K' движется относительно K с той же скоростью $-\mathbf{v}$. Условия второго случая при наблюдении его относительно системы K' идентичны с условиями первого случая относительно системы K. Поэтому явления индукции в L_1 в обоих рассматриваемых случаях должны оказаться совершенно одинаковыми, если в первом случае измерения производятся в системе отсчета K, а во втором — в системе K'. Наконец, результаты, которые получатся при измерении индукции во втором случае относительно системы K, могут быть определены из результатов измерения этого же случая в системе K' путем пересчета по правилам, устанавливаемым в теории относительности. В результате этого пересчета явления индукции в двух рассматриваемых случаях при измерении их в обоих случаях *в одной и той же системе отсчета* K окажутся несколько различными. Однако это различие становится сколько-нибудь существенным лишь при очень больших скоростях v, сравнимых со скоростью света c. При $v \ll c$ этим различием можно вовсе пренебречь, и мы приходим к утверждению, высказанному в начале параграфа.

3. Итак, электродвижущая сила индукции в контуре L_1 должна определяться формулой (76.6) при любом равномерном движении контура L_1 относительно тока J_2, возбуждающего поле $\mathbf{H}$.

Естественно предположить, что уравнение это остается применимым и в том случае, если L_2 движется неравномерно (относительно инерциальной системы). Более того, мы предположим, что формула (76.6) остается справедливой и в том случае, если изменение магнитного потока через контур L_1 обусловливается не только движением L_1 или движением контура L_2, несущего постоянный ток, но также и замыканием и размыканием тока в L_2, изменением его силы J_2 (переменный ток) и т. д.; иными словами, мы предположим, что *формула* (76.6) *применима вне зависимости от характера причин, обусловливающих изменение магнитного потока* Φ. Это предположение вполне соответствует духу теории близкодействия и теории поля вообще, ибо оно, в сущности, сводится к допущению, что все электромагнитные явления в данном теле или в данном участке пространства определяются напряженностью поля (и производными по времени) в этом участке пространства и вовсе не зависят от способа возбуждения поля.

Резюмируем: исходя из выражения для лоренцевой силы (45.3), установленного на основании результатов изучения постоянных токов, мы *вывели* закон индукции токов в контуре, движущемся в постоянном магнитном поле. Обобщая, далее, область применимости этого закона на основании соображений, связан-

ных с принципом относительности и с понятием поля, мы предположили, что формула (76.6) имеет универсальное значение, т. е. что она применима вне зависимости от характера причин, обусловливающих изменение магнитного потока Ф. Опыт показывает, что предположение наше *соответствует действительности.*

4. В предшествующем нами неявно предполагалось, что рассматриваемые проводники находятся в вакууме вдали от других тел; только при этом условии можно утверждать, что явления индукции зависят лишь от относительной скорости проводников, а не зависят, например, от скорости проводников относительно магнитной среды. Отказавшись теперь от этого ограничения, допустим, что окружающее проводники пространство заполнено произвольными магнетиками ($\mu \neq 1$) и что сами проводники тоже способны намагничиваться, и зададимся вопросом, как скажутся эти факторы на форме закона индукции [уравнение (76.6)].

Как выяснилось в предшествующей главе, магнитные свойства вещества обусловливаются наличием в нем молекулярных токов Значит, если закон индукции [уравнение (76.6)] применим в отсутствие магнетиков, то он должен оставаться справедливым и при наличии магнетиков при том, конечно, условии, что при подсчете потока Ф наряду с магнитным полем макроскопических токов в проводниках будет учитываться также и магнитное поле молекулярных токов, циркулирующих в магнетике. Иными словами, входящий в уравнение (76.6) вектор напряженности макроскопического поля $\mathbf{H}$ нужно заменить средним значением напряженности микроскопического магнитного поля $\mathbf{H}_{\text{микро}}$.

В § 62 мы убедились, что среднее значение напряженности микроскопического поля в магнитных средах равно вектору магнитной индукции $\mathbf{B}$ [уравнение (62.6)]:

$$\overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}} = \mathbf{B}.$$

Заменяя поэтому в уравнении (76.6) $\mathbf{H}$ через $\mathbf{B}$ и воспользовавшись обозначением Ψ для потока магнитной индукции [уравнение (65 3)], получим окончательный вид закона индукции токов, применимый в произвольной магнитной среде:

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = -\frac{e}{c}\frac{d}{dt}\int B_n\, dS = -\frac{e}{c}\frac{d\Psi}{dt}. \qquad (77.1)$$

Закон этот гласит. *возбуждаемая в произвольном замкнутом контуре электродвижущая сила индукции численно равна деленной на с скорости изменения потока магнитной индукции* Ψ через этот контур, причем направление $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ составляет с направлением возрастания потока Ψ *левовинтовую систему* [знак минус в формуле (77.1)!].

Опытные исследования вполне подтверждают справедливость формулы (77.1)

5. Обычно электродвижущая сила индукции в замкнутых контурах определяется не путем непосредственного измерения, а косвенно, на основании измерения *силы тока* в них. Определение это основывается на допущении, что законы Ома и Кирхгофа, установленные для токов постоянных, остаются справедливыми и для токов переменных. При этом, конечно, в формулировке этих законов, помимо сторонних электродвижущих сил, обусловленных физико-химическими неоднородностями проводника (контактные, термоэлектрические и прочие электродвижущие силы), необходимо учесть также и электродвижущие силы индукции В частности, если мы здесь в отличие от гл. III *не будем включать электродвижущую силу индукции в понятие сторонних электродвижущих сил*, то сила тока в неразветвленном проводнике выразится, согласно уравнению (38.6), формулой

$$JR = \mathscr{E}^{\text{стр}} + \mathscr{E}^{\text{инд}}, \qquad (77.2)$$

где R — сопротивление контура, а $\mathscr{E}^{\text{стр}}$ и $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ суть циркуляции по контуру испытываемых электрическими зарядами сил «стороннего» и индукционного происхождения [уравнения (38 7) и (76.4)]

Являющаяся одним из исходных пунктов предшествующих рассуждений формула (76.4) представляет собой частный случай формулы (77.2), соответствующий сделанному в начале § 76 предположению, что $\mathscr{E}^{\text{стр}} = 0$

В дальнейшем мы убедимся, что формула (77.2) оказывается непосредственно применимой к переменным токам лишь в том случае, если токи эти удовлетворяют условиям квазистационарности (§ 78 и 96).

6. На основании уравнения (77.1) формула (77 2) может быть записана так:

$$JR = \mathscr{E}^{\text{стр}} - \frac{e}{c}\frac{d\Psi}{dt}. \qquad (77.3)$$

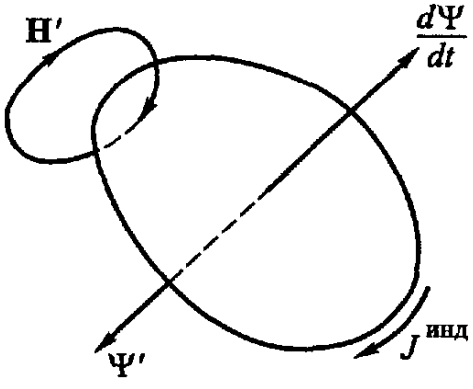

Рис 70

Как уже указывалось, знак минус перед членом $\frac{e}{c}\frac{d\Psi}{dt}$ в уравнениях (77.1) и (77.3) означает, что направление $\mathscr{E}^{\text{инд}}$, а стало быть, и направление индукционного тока $J^{\text{инд}}$ составляют с направлением *возрастания* потока магнитной индукции Ψ *левовинтовую* систему (рис. 70) [1].

[1]) Поток Ψ является скаляром, так что, в сущности, говорить о его направлении нельзя Для краткости мы условно считаем поток Ψ направленным по положительной или отрицательной нормали к плоскости тока в зависимости от того, положителен ли он или отрицателен

Индукционный ток $J^{\text{инд}}$ в свою очередь возбуждает в окружающем пространстве соответствующее его силе магнитное поле $\mathbf{H}'$, направление силовых линий которого составляет с направлением тока *правовинтовую* систему (§ 53). Отсюда следует, что поток Ψ' вектора магнитной индукции $B' = \mu\mathbf{H}'$ этого поля через контур тока направлен в сторону, противоположную возрастанию потока Ψ *внешнего* поля, индуцирующего ток $J^{\text{инд}}$. Стало быть, мы вправе высказать следующее общее положение: *при всяком изменении потока магнитной индукции через замкнутый проводящий контур в нем индуцируются токи в таком направлении, что магнитное поле этих токов стремится компенсировать изменение потока магнитной индукции* через контур проводника, т. е. стремится удержать постоянным поток Ψ.

§ 78. Квазистационарные токи. Дифференциальные уравнения переменных токов

1. Закон электромагнитной индукции (77.1) играет чрезвычайно важную роль для всего учения о переменных токах. Переходя к изучению этих токов, мы во всей этой главе ограничимся рассмотрением токов *квазистационарных.*

Переменные токи называются квазистационарными в том случае, если с достаточной степенью точности можно принять, что *магнитное* поле этих токов [1]), силы пондеромоторного взаимодействия между ними и т. д. в каждый данный момент времени имеют то же значение, какое имели бы эти величины в случае постоянных (стационарных) токов той же силы, как и мгновенная сила переменных токов. Очевидно, что переменные токи могут удовлетворять условиям квазистационарности лишь в том случае, если, подобно токам постоянным, они будут *замкнутыми* и будут обладать одинаковой силой во всех сечениях неразветвленных участков цепи [2]), что для переменных токов вообще не обязательно (§ 88).

Далее, необходимо принять во внимание, что изменения электромагнитного поля, обусловливаемые изменением силы токов и изменением распределения электрических зарядов, распространяются не мгновенно, а с конечной скоростью (§ 97). Поэтому в каждый данный момент t напряженность поля переменных токов, строго говоря, соответствует не мгновенному значению силы этих токов, заряда конденсаторов и т. д., а тем значениям, которыми обладали эти величины в некоторый предшествующий

[1]) Электрическое поле их, вообще говоря, отлично от поля постоянных токов (см. с. 395).

[2]) Очевидно, что эти требования являются также необходимыми условиями применимости закона Ома (77.3).

момент времени $t - \tau$; при этом τ равно времени, необходимому для распространения электромагнитных возмущений от соответствующих участков цепи до рассматриваемой точки поля.

Таким образом, поле переменных токов может удовлетворять условиям квазистационарности лишь в ограниченной области пространства в непосредственной близости от этих токов и притом, очевидно, лишь в том случае, если сила токов, заряды конденсаторов и т. д. не изменяются сколько-нибудь значительно за тот промежуток времени τ, который требуется для распространения электромагнитных возмущений между двумя наиболее удаленными точками рассматриваемой системы токов.

Таким образом, основным условием квазистационарности является достаточная медленность изменений поля, которая, как мы убедимся в § 88, гарантирует также и приближенную замкнутость переменных токов.

Практически те переменные токи, с которыми имеет дело техника сильных токов (десятки, сотни и тысячи периодов в секунду), с достаточной степенью точности удовлетворяют условиям квазистационарности; к быстрым же электрическим колебаниям, применяющимся в радиотехнике, теория квазистационарных токов оказывается, вообще говоря, неприменимой или применимой лишь с известными ограничениями.

2. Чтобы рассмотреть следствия, вытекающие из установленного в предшествующем параграфе закона индукции, нам достаточно будет ограничиться случаем двух замкнутых неразветвленных контуров тока L_1 и L_2, находящихся в диа- или парамагнитной среде; среды ферромагнитной мы пока рассматривать не будем.

Напишем для каждого из контуров тока L_1 и L_2 уравнения (77.2) и (77.3):

$$J_i R_i = \mathscr{E}_i^{\text{инд}} + \mathscr{E}_i^{\text{стр}} = \mathscr{E}_i^{\text{стр}} - \frac{e}{c}\frac{d\Psi_i}{dt}, \qquad i = 1, 2. \tag{78.1}$$

С другой стороны, поток индукции Ψ_1, пронизывающий, например, контур первого тока ($i = 1$), равен сумме среднего потока Ψ_{11}, посылаемого им самим через свой собственный контур [1]), и потока Ψ_{12}, посылаемого через его контур вторым током J_2, причем, согласно уравнению (65.6),

$$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12} = \frac{e}{c} L_{11} J_1 + \frac{e}{c} L_{12} J_2,$$

где L_{11} и L_{12} суть коэффициенты само- и взаимоиндукции. Этими выражениями, выведенными для токов постоянных, мы можем воспользоваться и для токов переменных в случае их квазистационарности.

[1]) О смысле этой величины см. сказанное относительно Φ_{11} на с. 238.

Внося их в уравнение (77.1), получим значение электродвижущей силы индукции в первом контуре

$$\mathscr{E}_1^{\text{инд}} = -\frac{e}{c}\frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{1}{c^2}\left(L_{11}\frac{dJ_1}{dt} + L_{12}\frac{dJ_2}{dt} + J_1\frac{dL_{11}}{dt} + J_2\frac{dL_{12}}{dt}\right) \tag{78.2}$$

и аналогичное уравнение для второго контура. Таким образом, электродвижущая сила индукции в первом контуре будет зависеть как от скорости изменения силы токов J_1 и J_2, так и от скорости изменения коэффициентов индукции L_{11} и L_{12}.

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда контуры L_1 и L_2 находятся в *однородной* внешней диа- или парамагнитной среде [1]. При этом условии значения коэффициентов L_1 и L_2 определяются геометрической конфигурацией контуров [см. уравнение (65.7), а также с. 236], следовательно, значения производных $\frac{dL_{11}}{dt}$ и $\frac{dL_{12}}{dt}$ зависят лишь от изменения этой конфигурации, т. е. от характера перемещения контуров L_1 и L_2. При этом $\frac{dL_{11}}{dt}$ зависит лишь от изменения *формы* первого контура (если контур не деформируется, то L_{11} постоянно) и $\frac{dL_{12}}{dt}$ — от изменения *взаимного расположения* контуров L_1 и L_2.

По внесении уравнения (78.2) и соответствующего выражения для $\mathscr{E}_2^{\text{инд}}$ в уравнения (78.1) мы получим два линейных дифференциальных уравнения для J_1 и J_2, из которых можно определить J_1 и J_2 в функции от времени, если только $\mathscr{E}_1^{\text{стр}}$, $\mathscr{E}_2^{\text{стр}}$, L_{11}, L_{12} и L_{22} суть известные заданные функции времени. В частности, если контуры обоих токов *неподвижны* друг относительно друга и *не подвергаются деформации*, то коэффициенты индукции будут постоянными, и для J_1 и J_2 будет иметь место следующая система линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} J_1R_1 + \frac{1}{c^2}L_{11}\frac{dJ_1}{dt} + \frac{1}{c^2}L_{12}\frac{dJ_2}{dt} &= \mathscr{E}_1^{\text{стр}}, \\ J_2R_2 + \frac{1}{c^2}L_{22}\frac{dJ_2}{dt} + \frac{1}{c^2}L_{12}\frac{dJ_1}{dt} &= \mathscr{E}_2^{\text{стр}}. \end{aligned} \tag{78.3}$$

3. Рассмотрим в заключение частный случай индукции токов в контуре L_1, который без деформации ($L_{11} = \text{const}$) перемещается в *постоянном* магнитном поле, например в поле постоянного тока J_2. Строго говоря, появление индукционного тока в контуре L_1 влечет за собой возбуждение соответствующего маг-

[1] Если внешняя среда неоднородна, то изменения коэффициентов L_{11} и L_{12} могут обусловливаться также и перемещениями этой среды, например вдвиганием внутрь одного из контуров какого-либо сердечника, способного намагничиваться.

нитного поля, что в свою очередь должно возбуждать вторичные индукционные токи в контуре L_2 и т. д. Таким образом, предположение о постоянстве внешнего магнитного поля сводится, в сущности, к предположению, что сила вторичного тока, индуцируемого в контуре L_2, столь мала по сравнению с постоянной слагающей тока J_2, что током этим можно полностью пренебречь. При этом условии формула (78.2) примет вид

$$\mathcal{E}_1^{\text{инд}} = -\frac{1}{c^2}\left(J_2\frac{dL_{12}}{dt} + L_{11}\frac{dJ_1}{dt}\right). \qquad (78.4)$$

4. Формулы (78.2) и (78.3) играют чрезвычайно важную роль в учении о переменных токах вообще и в электротехнике в частности. Область их применения весьма обширна; к ней относится теория динамомашин, трансформаторов, электроизмерительных приборов и т. д. Отсылая читателя за всеми подробностями к специальным сочинениям, мы ограничимся рассмотрением лишь нескольких примеров в § 80 после ознакомления с вопросом о магнитной энергии токов.

§ 79. Преобразование энергии в поле переменных токов. Энергия магнитного взаимодействия токов. Правило Ленца

В главах IV и V мы вовсе не касались вопроса об энергии магнитного взаимодействия токов и об энергии магнитного поля вообще. Объясняется это тем, что рассмотрение этого вопроса, к которому мы теперь перейдем, возможно только на основании учета явлений электромагнитной индукции, с которыми мы познакомились лишь в начале этой главы.

1. Рассмотрим индукционное взаимодействие переменных токов J_1 и J_2 с энергетической точки зрения. При этом необходимо учесть следующие превращения энергии: 1) выделение джоулева тепла Q в цепи токов, 2) работу P сторонних электродвижущих сил, 3) механическую работу A пондеромоторных сил магнитного поля, совершаемую при перемещении контуров тока, и, наконец, необходимо, как мы увидим, принять во внимание 4) энергию магнитного взаимодействия токов $W_{\text{м}}$ и учесть изменение $dW_{\text{м}}$ этой энергии при изменениях как силы токов J_1 и J_2, так и их взаимной конфигурации [1]).

Рассмотрим изменение всех этих видов энергии, совершающееся за некоторый бесконечно малый элемент времени dt. Начнем

[1]) В ряде случаев (например при наличии в цепи конденсатора — см. § 89) необходимо еще принять во внимание и изменение энергии электрической. Однако это не влияет на окончательный результат вычислений Вполне строго все эти вопросы будут заново рассмотрены нами в § 92

с энергии механической. В § 52 и 65 мы установили, что работа A пондеромоторных сил магнитного поля постоянных токов равна убыли потенциальной функции этих токов U [уравнения (65.5) и (65.8)]:

$$A = -(dU)_J, \quad U = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}L_{11}J_1^2 + L_{12}J_1J_2 + \frac{1}{2}L_{22}J_2^2\right).$$

Таким образом, в случае постоянных токов

$$A = -(dU)_J = \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}J_1^2\,dL_{11} + J_1J_2\,dL_{12} + \frac{1}{2}J_2^2\,dL_{22}\right), \quad (79.1)$$

где индекс J у dU означает, что при определении изменения функции U силы токов J полагаются постоянными [1], и где dL_{11}, dL_{12}, dL_{22} суть изменения коэффициентов индукции за время dT. Но, согласно приведенному в начале этого параграфа определению термина «квазистационарный», силы взаимодействия квазистационарных токов в каждый данный момент времени равны силам взаимодействия постоянных токов той же силы J_1 и J_2. Следовательно, формула (79.1) должна оставаться применимой и в случае квазистационарных токов (конечно, при условии выбора элемента времени dt столь малым, чтобы сила этих токов за это время оставалась практически постоянной) [2].

Переходим к определению изменения других видов энергии. Из закона Джоуля [уравнение (39.2)] непосредственно следует, что за время dt в обоих контурах выделяется количество джоулева тепла, равное

$$Q\,dt = (J_1^2R_1 + J_2^2R_2)\,dt.$$

Далее, согласно уравнению (39.3), сторонние электродвижущие силы совершают за это время в обоих контурах работу

$$P\,dt = (J_1\mathscr{E}_1^{\text{стр}} + J_2\mathscr{E}_2^{\text{стр}})\,dt.$$

Если мы, например, предположим, что сторонние электродвижущие силы возбуждаются включенными в контуры гальваническими элементами или аккумуляторами, то $P\,dt$ будет измерять работу, совершаемую в контурах токов за счет химической энергии этих источников электродвижущей силы. Разумеется, при пользовании последней формулой необходимо определенным образом

---

[1] См. с. 232.

[2] Если допустить справедливость формулы типа $A = -dU$ для квазистационарных токов, то непосредственно ясно, что при определении работы A нужно учитывать лишь те изменения значения потенциальной функции U, которые обусловливаются *перемещением* проводников (т. е. изменением коэффициентов индукции), ибо изменение *силы токов* в проводниках с работой пондеромоторных сил поля связано быть не может. Отсюда явствует, что для квазистационарных токов формула $A = -dU$ действительно должна быть уточнена в смысле формулы $A = -(dU)_J$.

выбрать направление положительного обхода каждого из контуров и снабдить величины J_i и $\mathscr{E}_i^{\text{стр}}$ соответствующими знаками. В зависимости от того, имеют ли, например, J_1 и $\mathscr{E}_1^{\text{стр}}$ одинаковые или различные знаки (т. е. направления), работа электродвижущей силы $\mathscr{E}_1^{\text{стр}}$ будет положительной или отрицательной.

2. Итак, за время dt должно иметь место *увеличение* механической энергии (например кинетической энергии движения проводников) на величину A, увеличение тепловой энергии на $Q\,dt$ и *уменьшение* энергии источников сторонних электродвижущих сил (например, химической энергии аккумуляторов) на величину $P\,dt$. Таким образом, общее увеличение Δ всех этих видов энергии равно

$$\Delta = A + (Q - P)\,dt, \tag{79.2}$$

причем, согласно уравнению (77.2),

$$Q - P = J_1(J_1R_1 - \mathscr{E}_1^{\text{стр}}) + J_2(J_2R_2 - \mathscr{E}_2^{\text{стр}}) = J_1\mathscr{E}_1^{\text{инд}} + J_2\mathscr{E}_2^{\text{инд}}. \tag{79.3}$$

Внося это в уравнение (79.2) и выражая $\mathscr{E}^{\text{инд}}\,dt$ и A с помощью уравнения (78.2) и уравнения (79.1), получим

$$\Delta = -\frac{1}{c^2}\Big(L_{11}J_1\,dJ_1 + \frac{1}{2}J_1^2\,dL_{11} + \\ + L_{12}J_1\,dJ_2 + L_{12}J_2\,dJ_1 + J_1J_2\,dL_{12} + L_{22}J_2\,dJ_2 + \frac{1}{2}J_2^2\,dL_{22}\Big),$$

откуда

$$\Delta = -\frac{1}{c^2}\,d\left(\frac{1}{2}L_{11}J_1^2 + L_{12}J_1J_2 + \frac{1}{2}L_{22}J_2^2\right).$$

Таким образом, всякое изменение конфигурации контуров и сил токов в них связано с общим увеличением суммы механической, тепловой и химической энергии на величину Δ. На основании закона сохранения энергии мы должны заключить, что эти процессы должны сопровождаться эквивалентным уменьшением некоторого другого вида энергии. Какого именно? Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно заметить, что с перемещением проводников и изменением сил циркулирующих в них токов *неразрывно* связаны (помимо учтенных уже нами механических, тепловых и химических процессов) лишь изменения сил *магнитного* взаимодействия этих токов. Очевидно, стало быть, что магнитному взаимодействию токов необходимо приписать некоторую определенную энергию $W_{\text{м}}$ и что приращение Δ всех прочих видов энергии должно происходить за счет эквивалентного изменения $dW_{\text{м}}$ энергии магнитной:

$$dW_{\text{м}} = -\Delta = +\frac{1}{c^2}\,d\left(\frac{1}{2}L_{11}J_1^2 + L_{12}J_1J_2 + \frac{1}{2}L_{22}J_2^2\right). \tag{79.4}$$

Следовательно [1]),

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}L_{11}J_1^2 + L_{12}J_1J_2 + \frac{1}{2}L_{22}J_2^2\right). \qquad (79.5)$$

Это выражение можно записать также следующим образом:

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2c^2}\sum_{ik} L_{ik}J_iJ_k \qquad (i,\ k = 1,\ 2). \qquad (79.6)$$

Ясно, что магнитная энергия системы не двух, а произвольного числа n токов выразится формулой такого же вида, в которой, однако, индексы i и k будут пробегать все значения от 1 до n.

3. Сравнивая уравнение (79.6) с уравнением (65.8), получаем

$$W_{\text{м}} = -U. \qquad (79.7)$$

Следовательно, магнитная энергия токов $W_{\text{м}}$ равна взятой с *обратным знаком* потенциальной функции этих токов U. Таким образом, мы вновь убеждаемся, что эта потенциальная функция, как уже нами неоднократно подчеркивалось, вовсе не равна (потенциальной) *энергии* токов.

В уравнении (79.7) с особой ясностью проявляется то обстоятельство, что *смысл величин* $W_{\text{м}}$ и U совершенно различен. Действительно, по определению функции U убыль ее $-(dU)_J$ равняется *механической* работе A, совершаемой пондеромоторными силами магнитного поля; при этом при определении убыли $-(dU)_J$ по формуле (79.1) силу токов нужно полагать постоянной. Между тем убыль магнитной энергии $-dW_{\text{м}}$ равна *сумме* приращений *всех* прочих видов энергии, а не только энергии механической, так что при определении убыли $-dW_{\text{м}}$ по формуле (79.4) нужно учитывать и изменение силы токов. Поэтому a priori нельзя было бы ожидать никакого простого соотношения между величинами U и $W_{\text{м}}$; однако, как показывает формула (79.7), такое соотношение в действительности существует.

В случае постоянных токов в неподвижных проводниках, очевидно, равны нулю как механическая работа A, так и изменение магнитной энергии $dW_{\text{м}}$. В этом случае также $\mathcal{E}^{\text{инд}} = 0$ и, согласно (79.3), $Q = P$, т. е. работа сторонних сил целиком переходит в тепло.

Механическая же работа A может совершаться лишь при перемещении проводников, которое в свою очередь связано с появлением электродвижущих сил индукции, т. е. с нарушением равенства между выделенной теплотой Q и работой сторонних

[1]) Собственно говоря, заданием $dW_{\text{м}}$ значение $W_{\text{м}}$ определяется лишь вплоть до аддитивной постоянной, которую мы положим равной нулю для того, чтобы в отсутствие токов ($J_1 = J_2 = 0$) магнитная энергия оказалась равной нулю.

электродвижущих сил. Избыточная (по сравнению с выделением тепла) затрата энергии источников этих электродвижущих сил (например химической энергии аккумуляторов) оказывается при этом достаточной не только для совершения механической работы A, но и для увеличения магнитной энергии $W_{\text{м}}$.

Действительно, из (79.4) и (79.2) следует:

$$-dW_{\text{м}} = \Delta = A + (Q - P)\,dt, \tag{79.8}$$

что можно записать в следующей форме:

$$(P - Q)\,dt = A + dW_{\text{м}}.$$

4. Предположим в качестве примера, что при перемещении контуров L_1 и L_2 сила токов J_1 и J_2 в этих контурах поддерживается постоянной путем непрерывного изменения сторонних электродвижущих сил, компенсирующего влияние индукции. В этом гипотетическом случае вытекающее из уравнений (79.1) и (79.7) соотношение

$$A = -(dU)_J = +(dW_{\text{м}})_J \tag{79.9}$$

примет вид

$$A = dW_{\text{м}},$$

где $dW_{\text{м}}$ есть полное изменение магнитной энергии во время движения, ибо, по условию, $J_i = \text{const}$. Иными словами, механическая работа A будет равна *приращению* магнитной энергии, и

$$A + dW_{\text{м}} = 2A.$$

С другой стороны, так как, по условию, силы токов остаются постоянными во время движения, то и количество выделяемой теплоты Q остается постоянным. Стало быть, во время движения работа P сторонних электродвижущих сил должна возрасти на (положительную или отрицательную) величину $2A$, причем половина ее будет идти на увеличение магнитной энергии $W_{\text{м}}$. Это возрастание работы P объясняется тем, что для поддержания постоянства сил токов во время движения необходимо изменить сторонние электродвижущие силы так, чтобы компенсировать влияние электродвижущих сил индукции.

Заметим, что перемещение контуров тока при условии $J_i = \text{const}$ с энергетической точки зрения вполне аналогично перемещению обкладок конденсатора при условии $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$. В последнем случае работа пондеромоторных сил электрического поля тоже равна *приращению* энергии этого поля:

$$A = dW_{\text{м}},$$

причем как работа A, так и приращение электрической энергии $dW_{\text{э}}$ совершаются за счет работы (сторонних) электродвижущих сил, поддерживающих постоянство разности потенциалов обкладок конденсатора (см. § 18).

Конечно, в действительности при движении проводников остаются постоянными в большинстве случаев не силы токов в них, а сторонние электродвижущие силы; сила же токов изменяется, что значительно усложняет явление.

5. Рассмотрим в заключение превращения энергии в контуре L_1, к которому не приложены сторонние электродвижущие силы ($\mathscr{E}_1^{\text{стр}} = 0$) и который перемещается в *постоянном* магнитном поле, например в поле постоянного тока J_2. Если при этом L_{11} остается постоянным, то электродвижущая сила индукции в этом контуре выразится формулой (78.4). Помножая формулу (77.2) на J_1, получаем

$$J_1^2 R_1 = J_1 \mathscr{E}_1^{\text{инд}} = -\frac{1}{c^2}\left(J_1 J_2 \frac{dL_{12}}{dt} + L_{11} J_1 \frac{dJ_1}{dt}\right).$$

С другой стороны, из уравнения (79.1) ввиду предполагаемой неподвижности контура L_2 ($L_{22} = \text{const}$) получаем

$$A = \frac{1}{c^2} J_1 J_2 \, dL_{12}.$$

Следовательно,

$$A = -J_1^2 R_1 \, dt - \frac{1}{2c^2} L_{11} dJ_1^2.$$

Если в начале движения тока в проводнике не было, то $dJ_1^2 > 0$. Далее, L_{11} и $J_1^2 R_1 \, dt$ суть величины существенно положительные и, стало быть, $A < 0$. Следовательно, пондеромоторные силы магнитного поля совершают при движении проводника L_1 *отрицательную* работу, т. е. *противодействуют* этому движению. Отсюда вытекает так называемое *правило Ленца*: индукционные токи, возникающие в проводнике при движении его в постоянном магнитном поле, направлены так, что испытываемые этими токами пондеромоторные силы магнитного поля *противодействуют* движению проводника.

§ 80. Простейшие применения теории переменных токов. Трансформатор

1. Прежде чем переходить к применению полученных результатов к конкретным задачам, заметим, что переходом к практической (а также и электромагнитной) системе единиц (§ 59) можно достигнуть устранения из всех формул последних параграфов усложняющего их фактора c. Покажем это на примере формул (78.2) и (79.6).

Пользуясь табл. III (с. 274), можно написать

$$\mathscr{E} = \frac{1}{300}\mathscr{E}', \quad J = 3 \cdot 10^9 J', \quad L = 10^9 L',$$

где $\mathscr{E}'$, J', L' суть выраженные в *практических* единицах (вольт, ампер, генри) значения электродвижущей силы, силы тока и коэффициента индукции, тогда как $\mathscr{E}$, J, L являются значениями тех же величин в *абсолютных* единицах, которыми мы до сих пор и пользовались. Кроме того, практической единицей энергии является джоуль, равный 10^7 эргов; стало быть, в тех же обозначениях

$$W = 10^7 W'.$$

Выражая в формулах (78.2) и (79.6) значения всех величин в практических единицах и внося в них значение коэффициента $c = 3 \cdot 10^{10}$, по сокращении получим

$$\mathscr{E}_1'^{\text{инд}} = -\left(L_{11}'\frac{dJ_1'}{dt} + L_{12}'\frac{dJ_2'}{dt} + J_1'\frac{dL_{11}'}{dt} + J_2'\frac{dL_{12}'}{dt}\right), \tag{80.1}$$

$$W_{\text{м}}' = \frac{1}{2}\sum_{ik} L_{ik}' J_i' J_k'. \tag{80.2}$$

В последующих примерах и задачах мы часто будем пользоваться не абсолютной системой единиц, а практической, обычно применяемой в прикладном учении об электричестве.

Пример 1. *Превращения энергии при замыкании и размыкании тока.* Для уединенной недеформирующейся цепи тока, согласно уравнениям (77.2) и (80.1), можем написать, пользуясь *практической системой единиц*:

$$J'R' = \mathscr{E}'^{\text{стр}} - L'\frac{dJ'}{dt}, \tag{80.3}$$

где $L' = \text{const}$ есть самоиндукция цепи тока. Общее решение этого дифференциального уравнения в случае независимости $\mathscr{E}'^{\text{стр}}$ от времени имеет вид

$$J' = \frac{\mathscr{E}'^{\text{стр}}}{R'} + a\exp\left(-\frac{R'}{L'}t\right),$$

где a — произвольная постоянная интегрирования.

Предположим, что разомкнутая ранее цепь тока замыкается в момент $t = 0$, так что $J' = 0$ при $t = 0$. Чтобы удовлетворить этому условию, необходимо положить

$$a = -\frac{\mathscr{E}'^{\text{стр}}}{R'},$$

откуда

$$J' = \frac{\mathscr{E}'^{\text{стр}}}{R'}\left[1 - \exp\left(-\frac{R'}{L'}t\right)\right].$$

Следовательно, сила тока при замыкании цепи нарастает экспоненциально от нуля до соответствующего закону Ома предельного значения $\mathscr{E}'^{\text{стр}}/R'$.

Умножая исходное уравнение на J', получим

$$J'^2R' = J'\mathscr{E}'^{\text{стр}} - L'J'\frac{dJ'}{dt},$$

или

$$J'\mathscr{E}'^{\text{стр}} = J'^2R' + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L'J'^2\right). \qquad (80.4)$$

Таким образом, работа сторонних электродвижущих $J'\mathscr{E}'^{\text{стр}}$ затрачивается при замыкании цепи не только на преодоление (омического) сопротивления цепи R', т. е. на выделение джоулева тепла J'^2R', но и на приращение магнитной энергии тока $W_{\text{м}} = (1/2)L'J'^2$ (*ср. уравнение* (80.2)]. Этим постепенным накоплением магнитной энергии и обусловливается постепенность нарастания силы тока при замыкании цепи.

Обратно, если в момент $t = 0$ в цепи циркулирует ток J'_0 и если в этот момент выключить из цепи источник электродвижущей силы так, чтобы цепь тока все же оставалась замкнутой (например замкнув источник электродвижущей силы накоротко), то сила тока не сразу упадет до нуля, а будет убывать по экспоненциальному закону:

$$J' = J'_0 \exp\left(-\frac{R'}{L'}t\right).$$

Уравнение энергии в этом случае ($\mathscr{E}'^{\text{стр}} = 0$) примет вид

$$J'^2R' = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L'J'^2\right) = -\frac{dW_{\text{м}}}{dt}.$$

Это значит, что после выключения электродвижущей силы ток в цепи будет все же поддерживаться за счет энергии, запасенной в магнитном поле тока, вплоть до того момента, пока вся эта энергия не перейдет в джоулево тепло.

Соответственно этому скорость нарастания и убывания тока определяется значением R'/L', т. е. соотношением между «энергетической емкостью» магнитного поля тока, определяемой коэффициентом L', и испытываемым током сопротивления или «трения», обусловливающего переход его энергии в тепло. Чем меньше сопротивление и чем больше самоиндукция, тем относительно медленнее происходит изменение силы тока. Таким образом, *коэффициент самоиндукции является мерой* своего рода «электромагнитной *инерции*» тока.

С энергетической точки зрения электрический ток в замкнутом проводнике можно сравнить с вращением вала, несущего маховое колесо и приводимого в движение двигателем. При пуске в ход двигателя (сторонние электродвижущие силы) работа его затрачивается как на преодоление трения в подшипниках (сопротивление проводника), т. е. на выделение тепла (джоулево тепло), так и на сообщение колесу кинетической энергии (энергия магнитного поля тока), благодаря чему возрастание скорости вращения (силы

тока) происходит постепенно. При выключении же двигателя вал продолжает вращаться по инерции, причем кинетическая энергия колеса переходит в тепло, выделяющееся при трении.

Пример 2. *Самоиндукция в цепи переменного тока.* 1. Предположим, что в замкнутую цепь тока включен некоторый источник переменной электродвижущей силы, например динамо-машина. Электродвижущую силу этого источника мы будем рассматривать как некоторую стороннюю (нашей цепи) электродвижущую силу $\mathscr{E}'(t)$, являющуюся заданной функцией времени. Тогда уравнение (80.3) примет вид

$$J'R' + L'\frac{dJ'}{dt} = \mathscr{E}'(t). \tag{80.5}$$

2. При рассмотрении происходящих в цепи явлений, как и в целом ряде дальнейших вопросов, мы ограничимся случаем *периодических* переменных токов, сила которых является *синусоидальной* функцией времени. Эта форма зависимости токов от времени имеет наибольшее практическое значение и легче всего поддается математическому исследованию. Результаты изучения подобных токов могут быть приложены и к более сложным случаям, ибо, как известно, любую периодическую функцию всегда можно разложить в ряд Фурье, каждый член которого является синусоидальной функцией времени.

Как известно, оперирование с периодическими функциями весьма упрощается при пользовании *комплексными* выражениями. В дальнейшем мы всегда будем поэтому выражать синусоидально-периодические величины в комплексной форме. В частности, в рассматриваемом случае мы положим

$$\mathscr{E}'(t) = \mathscr{E}'_0 e^{i\omega t}, \quad J'(t) = J'_0 e^{i\omega t}, \tag{80.6}$$

где *амплитуды* электродвижущей силы и силы тока $\mathscr{E}'_0$ и J'_0 от времени не зависят, а ω есть *циклическая* частота тока и электродвижущей силы [1]. При этом амплитуды $\mathscr{E}'_0$ и J'_0, вообще говоря, будут величинами комплексными. Непосредственное же физическое значение имеет, конечно, лишь вещественная часть этих комплексных выражений. Мы можем, однако, воспользоваться тем обстоятельством, что вещественная часть результатов, получаемых при выполнении *линейных* операций над комплексными выражениями, совпадает с результатами выполнения этих операций над одними лишь вещественными частями исходных выражений. Поэтому переход к вещественной части комплексных выражений, которой мы только и будем приписывать физиче-

[1]) *Циклической частотой* называется число периодов за промежуток времени в 2π секунд, тогда как термин «частота» без прилагательного означает число периодов за 1 с.

ский смысл, может быть совершен как до, так и после выполнения этих операций. Лишь при *нелинейных* операциях (например умножении) необходимо переходить к вещественным частям комплексных выражений до выполнения над ними этих операций (ибо вещественная часть произведения комплексных величин *не равна* произведению их вещественных частей).

3. Внося выражения (80.6) в уравнение (80.5), производя дифференцирование по времени и сокращая затем полученные уравнения на общий множитель $e^{i\omega t}$, получаем

$$R'J'_0 + i\omega L'J'_0 = \mathscr{E}'_0$$

или

$$J'_0 = \frac{\mathscr{E}'_0}{R' + i\omega L'}.$$

Комплексный знаменатель правой части целесообразно преобразовать с помощью известных соотношений

$$R' + i\omega L' = \sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2}\, e^{i\varphi},$$

$$\cos\varphi = \frac{R'}{\sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\omega L'}{\sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L'}{R'}.$$

С помощью этих соотношений и обозначений получаем

$$J'_0 = \frac{\mathscr{E}'_0}{\sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2}}\, e^{-i\varphi};$$

вещественные же части тока J' и электродвижущей силы $\mathscr{E}'$ выразятся, согласно (80.6), формулами (считаем величину $\mathscr{E}'_0$ вещественной)

$$\mathscr{E}'(t) = \mathscr{E}'_0 \cos\omega t, \quad J'(t) = \frac{\mathscr{E}'_0}{\sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2}} \cos(\omega t - \varphi). \qquad (80.7)$$

Таким образом, наличие самоиндукции в цепи переменного тока, во-первых, как бы увеличивает сопротивление цепи: амплитуда тока J'_0 определяется частным от деления $\mathscr{E}'_0$ на «кажущееся» или «эффективное» сопротивление $R'_{\text{эф}}$:

$$|J'_0| = \frac{\mathscr{E}'_0}{R'_{\text{эф}}}, \quad R'_{\text{эф}} = \sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2}, \qquad (80.8)$$

которое всегда больше «омического» сопротивления R'.

Далее, наличие самоиндукции вызывает *отставание* фазы тока от фазы электродвижущей силы, причем *сдвиг фазы* φ, согласно формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L'}{R'}, \qquad (80.9)$$

тем больше, чем больше самоиндукция цепи и частота тока. Причина этого сдвига фазы такова же, как и причина постепенности нарастания силы тока при замыкании цепи постоянного тока (пример 1): сила тока не успевает следовать за изменениями

электродвижущих сил потому, что всякое изменение силы тока должно сопровождаться соответствующим постепенным изменением запаса магнитной энергии.

Потребляемая в цепи тока мощность, т. е. работа источника электродвижущей силы, отнесенная к единице времени, определяется выражением

$$\mathscr{E}'(t)J'(t) = \mathscr{E}'_0 J'_0 \cos\omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi).$$

Так как

$$\cos\omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \cos^2\omega t \cdot \cos\varphi + \cos\omega t \cdot \sin\omega t \cdot \sin\varphi$$

и так как среднее значение $\cos^2\omega t$ и $\cos\omega t \cdot \sin\omega t$ за период равно соответственно $1/2$ и нулю, то средняя за период потребляемая мощность равна

$$\overline{\mathscr{E}'(t)J'(t)} = \frac{1}{2}\mathscr{E}'_0 J'_0 \cos\varphi = \frac{1}{2}\frac{\mathscr{E}'^2_0 \cos\varphi}{\sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2}}. \qquad (80.10)$$

Таким образом, при заданной электродвижущей силе потребляемая в цепи мощность пропорциональна $\cos\varphi$, т. е. тем меньше, чем больше сдвиг фазы φ.

В предельном случае при $\varphi = \pi/2$ потребляемая мощность равна нулю: в течение полупериода источник электродвижущей силы совершает положительную работу ($\mathscr{E}'J' > 0$), за счет которой увеличивается запас магнитной энергии, тогда как за следующий полупериод этот запас энергии вновь возвращается источнику электродвижущей силы, совершающему отрицательную работу ($\mathscr{E}'L' < 0$). Эти преобразования энергии происходят без потери на джоулево тепло, ибо $\operatorname{tg}\varphi = \infty$ при $\varphi = (1/2)\pi$ и, стало быть, согласно уравнению (80.9), в этом предельном случае омическое сопротивление цепи должно равняться нулю (если $\omega L'$ конечно).

Пример 3. *Элементарная теория трансформатора.* Простейшая схема трансформатора состоит из двух контуров тока (индукционных катушек), связанных между собой индукционным взаимодействием. Для увеличения этого взаимодействия (т. е. увеличения коэффициента взаимной индукции L_{12}) обе катушки обычно надеваются на общий железный сердечник, чем достигается значительное повышение магнитной проницаемости среды. Для упрощения мы, однако, предположим, что в поле катушек никаких ферромагнетиков нет.

Обычно одна из катушек или обмоток трансформатора (первичная) питается переменным током, доставляемым извне каким-либо источником энергии, тогда как индукционные токи, возбуждаемые в другой обмотке (вторичной), отводятся к месту потребления электромагнитной энергии. Источник энергии, питающий первичную обмотку, мы будем рассматривать как некоторую стороннюю электродвижущую силу $\mathscr{E}'_1(t)$, являющуюся

заданной функцией времени; стороннюю электродвижущую силу во вторичной обмотке положим равной нулю.

Применяя к трансформатору уравнения (78.3) и переходя к практической системе единиц, получим

$$\begin{aligned} J_1' R_1' + L_{11}'' \frac{dJ_1'}{dt} + L_{12}' \frac{dJ_2'}{dt} &= \mathscr{E}_1'(t), \\ J_2' R_2' + L_{22}' \frac{dJ_2'}{dt} + L_{12}' \frac{dJ_1'}{dt} &= 0. \end{aligned} \tag{80.11}$$

Предположим, что электродвижущая сила $\mathscr{E}_1'(t)$ является синусоидальной функцией времени с циклической частотой ω. Тогда из уравнений (80.11) следует, что и J_1' и J_2' должны быть такими же функциями времени, так что в комплексной форме

$$\mathscr{E}_1'(t) = \mathscr{E}_{10}' e^{i\omega t}, \quad J_i' = J_{i0}' e^{i\omega t} \qquad (i = 1, 2),$$

где $\mathscr{E}_{10}'$ и J_{i0}' от времени не зависят.

Внося эти выражения в уравнение (80.11), производя дифференцирование по времени и сокращая затем полученные уравнения на общий множитель $e^{i\omega t}$, получаем

$$\begin{aligned} J_{10}' R_1' + i\omega L_{11}' J_{10}' + i\omega L_{12}' J_{20}' &= \mathscr{E}_{10}', \\ J_{20}' R_2' + i\omega L_{22}' J_{20}' + i\omega L_{12}' J_{10}' &= 0. \end{aligned} \tag{80.12}$$

Из последнего уравнения получаем

$$\frac{J_{20}'}{J_{10}'} = -\frac{i\omega L_{12}'}{R_2' + i\omega L_{22}'} = -\frac{\omega L_{12}'(\omega L_{22}' + iR_2')}{R_2'^2 + \omega^2 L_{22}'^2} \tag{80.13}$$

или, выполняя обычные преобразования,

$$\frac{J_{20}'}{J_{10}'} = -\frac{\omega L_{12}'}{\sqrt{R_2'^2 + \omega^2 L_{22}'^2}} e^{i\delta}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{R_2'}{\omega L_{22}'}.$$

В частности, в том практически важном случае, когда «индуктивное сопротивление» $\omega L_{22}'$ вторичной обмотки значительно больше ее омического сопротивления:

$$\omega L_{22}' \gg R_2',$$

из уравнения (80.13) получаем приближенно (пренебрегая R_2' по сравнению с $\omega L_{22}'$):

$$\frac{J_{20}'}{J_{10}'} = -\frac{L_{12}'}{L_{22}'}. \tag{80.14}$$

Следовательно, подбирая надлежащим образом индукционные коэффициенты L_{12}' и L_{22}', мы можем с помощью трансформатора в произвольное число раз повысить или понизить силу тока во вторичной цепи по сравнению с цепью первичной.

Конечно, потребление энергии во вторичной обмотке увеличивает расход энергии источника электродвижущей силы, включенной в первичную обмотку. Действительно, из первого уравнения (80.12) следует:

$$J'_{10}\left(R'_1 + i\omega L'_{11} + i\omega L'_{12}\frac{J'_{20}}{J'_{10}}\right) = \mathscr{E}'_{10}.$$

Если вторичная обмотка отсутствует или разомкнута ($R'_2 = \infty$), то $J'_{20} = 0$, и мы возвращаемся к рассмотренному выше примеру уединенной цепи переменного тока. Если же вторичная обмотка включена, то, внося из (80.13) значение J'_{20}/J'_{10} в последнее уравнение, получаем

$$J'_{10}\{[R'_1 + \alpha^2 R'_2] + i\omega[L'_{11} - \alpha^2 L'_{22}]\} = \mathscr{E}'_{10},$$

где

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 L'^2_{12}}{R'^2_2 + \omega^2 L'^2_{22}}.$$

Таким образом, включение вторичной цепи эквивалентно увеличению омического сопротивления и уменьшению самоиндукции первичной цепи. Оба фактора влекут за собой, согласно (80.9) и (80.10), уменьшение сдвига фазы в первичной цепи и увеличение потребления энергии источника электродвижущей силы $\mathscr{E}_1(t)$.

З а д а ч а 35. В постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{H}'$ равномерно вращается недеформирующийся замкнутый плоский контур L сопротивления R' и самоиндукции L', к которому не приложено сторонних электродвижущих сил. Ось вращения перпендикулярна к $\mathbf{H}'$ и лежит в плоскости контура. Число оборотов в секунду равно $n = \omega/2\pi$. Соответственно этому поток магнитной индукции Ψ' *внешнего* поля $\mathbf{H}'$ через контур L определяется выражением $\Psi' = \Psi'_0 \cos\omega t$. Значения всех величин предполагаются выраженными в *практических* единицах (штрихованные буквы).

Показать, что в контуре L должен индуцироваться ток J':

$$J' = \omega\Psi'_0 \frac{1}{\sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2}} \sin(\omega t - \varphi),$$

где φ есть сдвиг фазы тока по отношению к фазе электродвижущей силы индукции $\mathscr{E}'^{\text{инд}}_{\text{внш}}$, возбуждаемой в контуре изменением потока индукции Ψ внешнего поля $\mathbf{H}'$:

$$\mathscr{E}'^{\text{инд}}_{\text{внш}} = -\frac{d\Psi'}{dt} = \Psi'_0\omega \sin\omega t,$$

причем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L'}{R'}.$$

Показать, далее, что для поддержания вращения контура необходима затрата извне механической работы в количестве

$$A = \frac{\omega^2 \Psi_0'^2 R'}{2(R'^2 + \omega^2 L'^2)} = \frac{1}{2} J_0'^2 R' \frac{\text{Дж}}{\text{с}},$$

где через J_0' обозначена амплитуда тока J', причем в контуре L выделяется равное работе A количество джоулева тепла Q.

Если предположить, что замкнутый контур L состоит из двух частей, из которых одна вращается в постоянном магнитном поле (якорь в поле статора), а другая неподвижна (сеть), причем контакт между обеими частями контура во время вращения не нарушается, то мы получим простейшую схему генератора переменного тока, к которой применимы все результаты, получаемые при решении задачи 35 Однако на практике необходимо принимать во внимание, что переменные токи во вращающемся якоре в свою очередь индуцируют токи в обмотке статора, чем нарушается постоянство «внешнего» магнитного поля $\mathbf{H}'$ Далее, в задаче 35 мы ограничились рассмотрением установившегося режима тока, оставив без рассмотрения явления, происходящие при возникновении и прекращении вращения якоря, изменении нагрузки сетки и т д

§ 81. Энергия магнитного поля. Энергетическое значение коэффициентов индукции

1. Полученное нами выражение энергии магнитного взаимодействия токов в отсутствие ферромагнетиков (79.6)·

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2c^2} \sum_{ik} L_{ik} J_i J_k,$$

по своей форме соответствует представлению о магнитном взаимодействии токов на расстоянии. В этом отношении оно вполне аналогично выражению энергии покоящихся электрических зарядов (15.5):

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \sum_{ik} \frac{e_i e_k}{R_{ik}} \qquad (i \neq k).$$

Действительно, входящий в уравнение (79.6) член

$$\frac{1}{c^2} L_{12} J_1 J_2$$

может быть истолкован как энергия магнитного взаимодействия токов J_1 и J_2, а член

$$\frac{1}{2c^2} L_{11} J_1^2$$

как «собственная» энергия тока J_1, т. е. как энергия взаимодействия бесконечно тонких нитей тока, на которые может быть

разложен этот ток. Далее, коэффициент взаимной индукции L_{12} в формуле (79.6) аналогичен коэффициенту $1/R_{12}$ в формуле (15.5), ибо, согласно формуле (51.3),

$$L_{12} = \oint_{L_1}\oint_{L_2} \frac{d\mathbf{s}_1\, d\mathbf{s}_2}{R_{12}},$$

так что L_{12} представляет собой некое среднее расстояние между контурами токов L_1 и L_2.

2 Нетрудно, однако, выразить магнитную энергию токов в форме интеграла по всему объему поля этих токов и тем самым, как и в случае электрического поля (§ 16), получить возможность интерпретировать энергию $W_{\text{м}}$ в духе теории близкодействия как энергию *поля*, а не как энергию *взаимодействия* токов.

С этой целью мы воспользуемся формулами (79.7) и (65.9):

$$W = -U = \frac{1}{2c}\int \mathbf{A}\mathbf{j}\, dV. \tag{81.1}$$

Выражая $\mathbf{j}$, согласно уравнению (62.7), через $\operatorname{rot}\mathbf{H}$, получим

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{H}\, dV.$$

Но, согласно общей формуле векторного анализа (44*),

$$\mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{A} + \operatorname{div}[\mathbf{HA}],$$

причем, согласно уравнению (62.10), $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ можно заменить через $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{HB} + \operatorname{div}[\mathbf{HA}].$$

Внося это выражение под знак интеграла и применив теорему Гаусса [уравнение (17*)], получим

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{HB}\, dV + \frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}[\mathbf{HA}]\, dV = \\ = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{HB}\, dV + \frac{1}{8\pi}\oint_S [\mathbf{HA}]_n\, dS. \tag{81.2}$$

Если мы распространим интегрирование на весь объем полного поля токов, то интеграл по пограничной поверхности этого поля обратится в нуль, и выражение для W примет вид

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{HB}\, dV. \tag{81.3}$$

При этом под *полным* магнитным полем токов в соответствии с определением полного поля электрических зарядов (см § 16) понимается область пространства V, охватывающая все взаимодействующие токи и *все* поле этих токов. Если, как это обычно

бывает, поле токов простирается в бесконечность, то под полным полем можно и нужно понимать все бесконечное пространство при непременном условии (см. § 16), что подынтегральные выражения в интересующих нас интегралах по пограничной поверхности поля (в данном случае $[\mathbf{HA}]$) убывают при удалении этой поверхности в бесконечность быстрее, чем $1/R^2$.

Если все токи расположены в конечной области пространства, то это условие выполнено, ибо при удалении в бесконечность произведение $[\mathbf{HA}]$ убывает не медленнее, чем $1/R^3$ (см. § 46, с. 217).

3. С точки зрения теории поля, формула (81.3) может быть истолкована следующим образом: магнитная энергия локализована в поле и распределена по его объему со вполне определенной плотностью $w_{\text{м}}$, равной

$$w_{\text{м}} = \frac{1}{8\pi}\mathbf{HB}. \tag{81.4}$$

В квазистационарных магнитных полях оба приведенных понимания магнитной энергии (как энергии взаимодействия токов и как энергии поля), разумеется, совершенно равноправны, ибо вытекают они из математически эквивалентных друг другу выражений (79.6) и (81.3) (ср. § 16). Однако при переходе к быстропеременным электромагнитным полям эквивалентность этих выражений нарушается, и мы убедимся в следующей главе, что лишь представление о локализации магнитной энергии в поле может быть согласовано с данными опыта.

4. Заметим, что наша исходная формула (79.7), как неоднократно упоминалось, справедлива лишь при условии *отсутствия в поле ферромагнетиков*. Этим ограничивается, таким образом, и область приложимости всех формул этого параграфа.

Так как в отсутствие ферромагнетиков

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H},$$

то формулы (81.3) и (81.4) могут быть записаны также следующим образом:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mu\mathbf{H}^2\,dV, \quad w = \frac{1}{8\pi}\mu\mathbf{H}^2. \tag{81.5}$$

Таким образом, при заданной напряженности поля энергия единицы его объема пропорциональна магнитной проницаемости среды. В случае поля в вакууме

$$\mu = 1 \quad \text{и} \quad w = \frac{1}{8\pi}\mathbf{H}^2. \tag{81.6}$$

5. Рассмотрим энергию магнитного поля $\mathbf{H}$ двух токов J_1 и J_2, находящихся в произвольной диа- и парамагнитной среде.

Если $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ суть напряженности поля, создаваемого каждым из этих токов в отдельности, то

$$H^2 = (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)^2 = H_1^2 + 2\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 + H_2^2,$$

и общая энергия поля токов будет равна

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mu H^2\, dV = \\ = \frac{1}{8\pi}\int \mu H_1^2\, dV + \frac{1}{4\pi}\int \mu \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\, dV + \frac{1}{8\pi}\int \mu H_2^2\, dV. \quad (81.7)$$

Очевидно, что первый и последний члены правой части этого равенства (обозначим их через W_{11} и W_{22}) могут быть названы *собственной энергией* каждого из токов J_1 и J_2, а второй член — *взаимной энергией* этих токов W_{12}.

Данные в § 65 выражения коэффициентов взаимной индукции и самоиндукции (65.7), как указывалось, применимы лишь в однородной магнитной среде ($\mu = \text{const}$). Сравнивая же выражение (81.7) с выражением энергии (79.5):

$$W = \frac{1}{2c^2}(L_{11}J_1^2 + 2L_{12}J_1J_2 + L_{22}J_2^2),$$

получаем для более общего случая произвольной (но не ферромагнитной) среды:

$$W_{11} = \frac{1}{8\pi}\int \mu H_1^2\, dV = \frac{1}{2c^2}L_{11}J_1^2, \\ W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int \mu \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\, dV = \frac{1}{c^2}L_{12}J_1J_2. \quad (81.8)$$

Так как $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ при заданной конфигурации проводников пропорциональны соответственно J_1 и J_2, то определяемые формулой (81.8) значения индукционных коэффициентов L_{11} и L_{12} зависят лишь от геометрической конфигурации проводников и от магнитной проницаемости среды, но не от силы токов в проводниках. При $\mu = \text{const}$ значения эти должны совпадать со значениями коэффициентов индукции, определяемых формулой (65.7).

Уравнения (81.8) представляют собой *наиболее общее*, годное при $\mu \neq \text{const}$, *определение коэффициентов индукции*. Из этого определения явствует, что коэффициенты индукции являются, в сущности, *мерой энергии магнитного поля токов* (при заданной силе этих токов). С этим наиболее существенным значением коэффициентов индукции, как легко убедиться, неразрывно связана как роль этих коэффициентов в определении пондеромоторных сил, испытываемых токами в магнитном поле (§ 51 и 65), так и роль их в определении электродвижущих сил индукции (§ 78).

Приведем теперь два примера вычисления коэффициента самоиндукции, при решении которых удобнее всего исходить непосредственно из энергетического определения (81.8) этого коэффициента.

Пример 1. *Самоиндукция кругового тока.* Цилиндрический провод радиуса r_0 согнут так, что он образует окружность радиуса R. По нему протекает ток J. Объем проводника обозначим через V'', объем окружающего его пространства через V', а энергию поля тока в V' и в V'' соответственно через W' и W'':

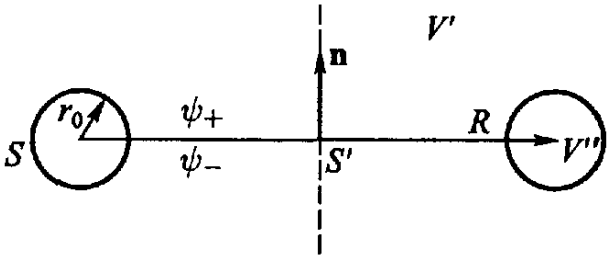

Рис. 71

$$W' = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{V'} \mu H^2\, dV,$$

$$W'' = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{V''} \mu H^2\, dV.$$

Если провести опирающуюся на контур провода условную перегородку S' (рис. 71, на котором изображено сечение провода меридиональной плоскостью), то поле тока вне проводника можно будет считать обладающим потенциалом ψ, причем потенциал этот будет испытывать на перегородке S' скачок $\psi_+ - \psi_- = 4\pi J/c$ [см. уравнение (54.4), остающееся, очевидно, справедливым и в произвольной магнитной среде]. Энергия внешнего поля тока выразится при этом формулой

$$W' = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{V'} \mathbf{BH}\, dV = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{V'} \mathbf{B}\,\mathrm{grad}\,\psi\, dV.$$

Ввиду того, что $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$, получаем на основании уравнения (43_2^*):

$$\mathbf{B}\,\mathrm{grad}\,\psi = \mathrm{div}\,(\psi\mathbf{B}) - \psi\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} = \mathrm{div}\,(\psi\mathbf{B});$$

следовательно, на основании теоремы Гаусса получаем

$$W' = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{V'} \mathrm{div}\,(\psi\mathbf{B})\, dV = -\frac{1}{8\pi}\oint \psi B_n\, dS,$$

причем поверхностный интеграл должен быть распространен, во-первых, по границе объема V', образуемой поверхностью проводника S (интеграл по внешней поверхности *полного* поля равен нулю), и, во-вторых, *по обеим* сторонам поверхности разрыва потенциала. Последний из этих поверхностных интегралов, очевидно, равен

$$\int\limits_{S'} (\psi_- - \psi_+) B_n\, dS = -\frac{4\pi J}{c}\int\limits_{S'} B_n\, dS,$$

где B_n есть слагающая $\mathbf{B}$ по направлению положительной нормали к S' (см. рис. 71).

Таким образом,

$$W' = -\frac{1}{8\pi}\oint\limits_{S} \psi B_n\, dS + \frac{J}{2c}\int\limits_{S'} B_n\, dS.$$

Предположим теперь для определенности, что пространство вне провода заполнено однородным магнетиком проницаемости μ', тогда как проницаемость проводника равна μ''. Предположим, далее, что радиус провода r_0

весьма мал по сравнению с радиусом образуемой им окружности R, и рассмотрим участок провода длины l, удовлетворяющий условию $r_0 \ll l \ll R$. Ввиду того, что $l \ll R$, участок этот можно считать прямолинейным. Так как, кроме того, $r_0 \ll l$, то поле внутри провода и в непосредственной близости от его поверхности будет лишь весьма незначительно отличаться от поля бесконечно длинного прямолинейного тока и с достаточной точностью будет определяться формулами [1]),

$$H' = \frac{2J}{cr}\ (r \geqslant r_0), \qquad H'' = \frac{2Jr}{cr_0^2}\ (r \leqslant r_0),$$

где r есть расстояние рассматриваемой точки поля от оси провода. Таким образом, вне провода на достаточно близком расстоянии от его поверхности ($r \ll R$) поле рассматриваемого нами тока совпадает с полем *линейного* тока той же силы, сосредоточенного на оси провода. С другой стороны, поле тока должно совпадать с полем линейного тока и на больших расстояниях от поверхности провода ($r \gg r_0$), на которых распределение тока по сечению провода сказываться не может. Так как любая точка внешнего пространства V' удовлетворяет хотя бы одному из этих условий (ввиду того, что $r_0 \ll R$, либо $r \gg r_0$, либо $r \ll R$), то при определении поля во всем пространстве V' мы можем считать ток J сосредоточенным на оси провода. Стало быть, входящий в выражение для W' интеграл $\int\limits_{S'} B_n\, dS$ должен равняться потоку индукции Ψ, посылаемому этим *линейным* круговым током радиуса R через концентрическую окружность радиуса $R - r_0$, образованную пересечением внутренней стороны поверхности провода S с плоскостью S'. Следовательно, если обозначить через L_{12} коэффициент взаимной индукции двух концентрических окружностей радиусов R и $R - r_0$, то, согласно уравнению (65.6),

$$\int\limits_{S'} B_n\, dS = \Psi' = \frac{e}{c} JL_{12}.$$

Так как при указанных условиях индукция (и напряженность) магнитного поля у поверхности провода S касательна к этой поверхности, то первый член в выражении для W' равен нулю и, стало быть,

$$W' = \frac{J}{2c} \int\limits_{S'} B_n\, dS = \frac{1}{2c^2} J^2 L_{12}.$$

Обращаясь к выражению для W'' и внося в него приведенное выше значение напряженности H'', получим

$$W'' = \frac{1}{8\pi} \int\limits_{V''} \mu H^2\, dV = \frac{\mu''}{8\pi} \int\limits_0^{2\pi R} \int\limits_{r=0}^{r=r_0} \frac{4J^2 r^2}{c^2 r_0^2} \cdot 2\pi r\, dr\, dl = \frac{\pi \mu'' R J^2}{2c^2}.$$

Итак, общая энергия поля тока равна

$$W = W' + W'' = \frac{1}{2c^2} J^2 (L_{12} + \pi \mu'' R),$$

откуда на основании (81.8) следует:

$$L_{11} = \pi \mu'' R + L_{12}.$$

[1]) Формулы эти были выведены в § 47, задача 30, в предположении, что $\mu = 1$. Однако доказательство их основывалось лишь на уравнении (47.4), остающемся справедливым в произвольной среде, и на учете аксиальной симметрии поля прямолинейного тока.

Величина $\pi\mu'' R$ является мерой энергии W'', запасенной внутри провода, и может быть названа его «внутренней» самоиндукцией, а величина L_{12}, являющаяся мерой энергии W', может быть названа «внешней» самоиндукцией провода Обозначая внешнюю и внутреннюю самоиндукции через L' и L'', можем написать

$$L' = L_{12}, \quad L'' = \pi\mu'' R, \quad L_{11} = L' + L''.$$

Таким образом, при упомянутых выше условиях внутренняя самоиндукция L' провода радиуса r_0, образующего окружность радиуса R, пропорциональна его длине $2\pi R$, а его внешняя самоиндукция L' равна коэффициенту *взаимной* индукции L_{12} двух концентрических окружностей радиусов R и $R - r_0$. Этот коэффициент L_{12} может быть вычислен с помощью общей формулы (65.7) (см. пример определения коэффициента L_{12} для двух квадратов — § 51). Чтобы не загромождать изложения чисто математическими выкладками, приведем здесь лишь окончательные результаты (для случая $r_0 \ll R$):

$$L_{12} = 4\pi\mu R\left(\lg\frac{8R}{r_0} - 2\right).$$

Пример 2. *Самоиндукция единицы длины кабеля.* Рассмотрим проводник, состоящий из двух концентрических полых цилиндров, длина которых весьма велика по сравнению с их радиусами r_1 и r_2. На обоих концах проводника внутренний и внешний его цилиндры соединены между собой, так что совокупность обоих цилиндров составляет замкнутую проводящую цепь, по которой циркулирует ток J. При этом направление тока во внешнем цилиндре, разумеется, обратно направлению его во внутреннем цилиндре. Подобную цепь тока мы будем *условно* называть здесь и в § 106 и 107 *кабелем*, хотя термин этот имеет, конечно, более широкое значение.

Если длина кабеля достаточно велика по сравнению с его радиусом, то вблизи средней его части поле протекающего по кабелю тока будет такое же, как и в случае кабеля бесконечной длины. Понятие самоиндукции *бесконечного* кабеля, разумеется, смысла не имеет, ибо при увеличении длины кабеля общая энергия его поля, а стало быть, и самоиндукция кабеля L_{11} растут до бесконечности. Целесообразно, однако, ввести в рассмотрение *самоиндукцию единицы длины* бесконечного кабеля, понимая под этим меру той доли энергии его поля, которая заключается между двумя перпендикулярными кабелю плоскостями, находящимися на единичном расстоянии друг от друга. Если мы условимся отмечать звездочкой все величины, относящиеся к единице длины кабеля, то по аналогии с уравнением (81.8) можно написать

$$W_{11}^* = \frac{1}{2c^2} L_{11}^* J^2.$$

Физический смысл величины L_{11}^* сводится, очевидно, к тому, что при увеличении длины достаточно длинного кабеля на единицу самоиндукция его L_{11} увеличивается на L_{11}^* единиц.

Предположим для простоты, что обкладки кабеля (т. е. образующие кабель цилиндрические проводники) обладают столь малой толщиной (по сравнению с r_1 и r_2), что в первом приближении их можно считать бесконечно тонкими поверхностями.

Поле тока, равномерно распределенного по поверхности цилиндра, равно нулю внутри этого цилиндра; во внешнем пространстве оно таково, как если бы ток был сосредоточен на оси цилиндра (задачи 29 и 30). Стало быть, поле кабеля внутри цилиндра r_1 равно нулю, между цилиндрами r_1 и r_2 совпадает с полем линейного тока силы J и, наконец, вне цилиндра r_2 также равно нулю (ибо по внутренней и по внешней обкладкам кабеля протекают токи равной величины и противоположного направления). Следовательно, энергия W_{11}^*, приходящаяся на единицу длины кабеля, сосредоточена в пространстве между его обкладками, т. е. в полом цилиндре длины 1, внутренний и внешний радиусы которого равны r_1 и r_2. Итак,

$$W^* = \frac{1}{8\pi}\int \mu H^2\, dV = \frac{\mu}{8\pi}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{2J}{cr}\right)^2 2\pi r\, dr = \frac{\mu J^2}{c^2}\ln\frac{r_2}{r_1},$$

где μ означает проницаемость среды, заключенной между обкладками кабеля. Сравнивая это с предыдущим уравнением, получим окончательно:

$$L_{11}^* = 2\mu \ln\frac{r_2}{r_1}. \tag{81.9}$$

§ 82. Преобразование энергии при намагничении пара- и диамагнетиков. Свободная энергия магнитного поля

1. Выше мы показали, что величина $W_м$, определяемая уравнением (79.6) или эквивалентным ему уравнением (81.3), испытывает *при перемещениях несущих ток проводников* приращение, равное убыли при этих перемещениях всех прочих видов энергии (механической, тепловой и химической) [1]. На основании этого мы пришли к выводу, что эта величина $W_м$ равна энергии магнитного поля.

Для полноты доказательства этого последнего положения следовало бы еще показать, что изменения величины $W_м$ *при перемещениях магнетиков* в магнитном поле также удовлетворяют закону сохранения энергии [см. уравнения (79.2) и (79.4)]:

$$dW_м = -\Delta = -A - (Q - P)\, dt.$$

[1] Относительно электрической энергии см. примечание на с 362, а также § 89.

Однако общее доказательство этого положения было бы весьма сложным и требовало бы точного знания пондеромоторных сил, испытываемых магнетиками в магнитном поле; последние могли бы быть определены только на основе специальных допущений об атомистическом строении и свойствах магнетика. Поэтому в макроскопической теории поля задача оборачивается: выражение энергии магнитного поля в форме (81.3) принимается как один из основных *постулатов* теории, а пондеромоторные силы, испытываемые магнетиками, определяются на основании соображений, базирующихся на законе сохранения энергии и на выражении (81.3) для магнитной энергии.

2. Мы отложим определение этих сил до § 83 и остановимся здесь еще на одном вопросе, связанном с выражением (81.3) для магнитной энергии. Из (81.3) или из (81.4) следует, что плотность магнитной энергии в вакууме равна

$$w_{\text{м}} = \frac{1}{8\pi} H^2.$$

Можно было бы ожидать, что при одинаковой напряженности поля энергия этого поля должна быть одинаковой как в вакууме, так и в том случае, если в вакуум вкраплены атомы и молекулы магнетика. Иными словами, можно было бы ожидать, что и при наличии магнетиков плотность энергии магнитного поля должна равняться

$$w'_{\text{м}} = \frac{1}{8\pi} [\overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}}]^2 = \frac{1}{8\pi} B^2, \tag{82.1}$$

где мы воспользовались формулой (62.6). Между тем, согласно (81.4), она равна

$$w_{\text{м}} = \frac{1}{8\pi} \mathbf{BH} = \frac{1}{8\pi\mu} B^2. \tag{82.2}$$

Разница между (82.1) и (82.2) обусловливается тремя причинами. Во-первых, среднее макроскопическое значение энергии магнитного поля в собственном смысле этого слова определяется *квадратом средней* напряженности истинного микроскопического поля $\mathbf{H}_{\text{микро}}$, вообще говоря, отличным от среднего квадрата этой напряженности:

$$w'_{\text{м}} = \frac{1}{8\pi} \overline{\mathbf{H}^2_{\text{микро}}} \neq \frac{1}{8\pi} [\overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}}]^2.$$

Во-вторых, при намагничении магнетика возникает ларморова прецессия электронов, входящих в состав магнетика (см. § 68), а с этой прецессией связано *изменение кинетической энергии электронов*. Так как в макроскопической теории под энергией магнитного поля понимается вся энергия, которую нужно затратить на возбуждение поля, то полная энергия $W_{\text{м}}$ поля в магнетике определяется суммой собственно магнитной энергии $W'_{\text{м}}$ и кинетической энергии прецессирующих электронов $W_{\text{кин}}$.

Наконец, намагничение парамагнетиков связано, кроме того, и с изменением их энтропии и *поглощением тепла* (ср. поляризацию диэлектриков с твердыми диполями, § 31). Действительно, как мы убедились в § 70, намагничение, например, газообразных парамагнетиков, т. е. установка магнитных моментов молекул этих парамагнетиков по направлению внешнего поля, происходит благодаря соударениям между молекулами. При этих соударениях происходит обмен между энергией поступательного теплового движения молекул и внутримолекулярной кинетической энергией прецессии электронов, зависящей от ориентации магнитного момента молекулы относительно магнитного поля; в результате этого и происходит выделение тепла [1], которое также учитывается при подсчете энергии $W_{\text{м}}$, затрачиваемой на возбуждение магнитного поля.

При подсчете превращений энергии, происходящих при перемещениях несущих ток проводников, мы в § 79 предполагали, что магнитная проницаемость μ среды при этих перемещениях не изменяется. Стало быть, наши подсчеты относятся к случаю *изотермических* процессов, при которых от парамагнетиков отводится все тепло, выделяющееся в них при связанных с перемещением проводников изменениях их намагничения; в противном случае при изменениях температуры парамагнетика изменялась бы и его восприимчивость $\varkappa$ [см. уравнение (70.5)]. Далее работа, совершаемая при изотермическом процессе, определяется изменением *свободной энергии* системы Ψ. Стало быть, величина $W_{\text{м}}$, определяемая формулой (79.6) или эквивалентной ей формулой (81.3), является не «внутренней», а *свободной энергией* магнитного поля (ср. § 31); именно это утверждение и является точной формулировкой того основного постулата теории, о котором была речь в начале этого параграфа.

Плотность «внутренней» энергии магнитного поля совпадает с плотностью его свободной энергии и выражается той же формулой (81.4) или (82.2) только в том случае, когда магнитная проницаемость магнетика μ не зависит от температуры T (при постоянном объеме магнетика), что имеет место в диамагнетиках. Это явствует из известной формулы термодинамики

$$E = \Psi - T\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_V,$$

связывающей «внутреннюю» энергию системы E с ее свободной энергией Ψ.

[1] В физике низких температур большую роль играет следующий «магнитный способ» охлаждения. Находящиеся во внешнем магнитном поле парамагнетики охлаждаются обычными способами до возможно низкой температуры; затем магнитное поле выключается, парамагнетик размагничивается и при этом поглощает тепло как из окружающих тел, так и из собственного запаса тепловой энергии. В результате температура его и окружающих тел понижается.

3. Иллюстрацией изложенных соображений может служить следующий, правда не строгий, расчет плотности магнитной энергии в *диамагнетиках*. Обусловленное ларморовой прецессией изменение кинетической энергии электронов в атоме ΔT определяется формулой (70.2) и слагается из двух членов. Первый из них, согласно (70.3), равен $-\mathbf{MH}$ и отличен от нуля только в парамагнетиках. Таким образом, в диамагнитных атомах

$$\Delta T = \frac{m}{2}\sum \Delta v_i^2 = \frac{m}{2}\sum [\mathbf{o}\mathbf{R}_i]^2,$$

где $\mathbf{o}$ есть угловая скорость ларморовой прецессии:

$$\mathbf{o} = -\frac{e}{2mc}\mathbf{H}$$

[см. (68.2)], m — масса электрона, e — его заряд, $\mathbf{R}_i$ — расстояние i-го электрона от ядра атома, и суммирование производится по всем электронам атома. Пусть магнитное поле направлено по оси z, тогда

$$[\mathbf{H}\mathbf{R}_i]^2 = H^2(x_i^2 + y_i^2).$$

Если число электронов в атоме равно Z, а число атомов в единице объема равно N, то кинетическая энергия прецессии электронов, находящихся в единице объема магнетика, равна

$$w_{\text{кин}} = \frac{NZe^2}{8mc^2} H^2\overline{(x^2 + y^2)},$$

где черта сверху означает усреднение по всем электронам. Далее,

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} + \frac{1}{3}\overline{R^2},$$

где $\overline{R^2}$ есть средний квадрат расстояния электронов от ядра атома, и, стало быть,

$$w_{\text{кин}} = \frac{NZe^2\overline{R^2}}{12mc^2} H^2.$$

Внося сюда выражение (69.3) для вектора намагничения диамагнетиков, получаем

$$w_{\text{кин}} = -\frac{1}{2}\mathbf{IH}.$$

Вспомним, наконец, что при рассмотрении намагничения диа- и парамагнетиков в § 70 и 71 мы считали, что на атомы магнетика действует поле $\mathbf{H}$, тогда как правильнее было бы считать, что на них действует поле $\overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}} = \mathbf{B}$. Сделав соответствующую замену в последнем уравнении, получаем окончательно

$$w_{\text{кин}} = -\frac{1}{2}\mathbf{IB}. \qquad (82.3)$$

Сумма этой плотности кинетической энергии прецессии электронов и приближенного выражения (82.1) для плотности энергии магнитного поля, в собственном смысле этого слова [1], равна [см. уравнение (62.5)]:

$$w = \frac{1}{8\pi}\mathbf{B}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{IB} = \frac{1}{8\pi}\mathbf{B}(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{I}) = \frac{1}{8\pi}\mathbf{BH},$$

т. е., как и требовалось доказать, равна микроскопической плотности магнитной энергии (82.2).

§ 83. Определение пондеромоторных сил магнитного поля из выражения энергии [2]

1. В § 66 мы определили пондеромоторные силы, испытываемые магнетиками в магнитном поле, исходя из определенных представлений о молекулярном строении магнетиков. Теперь мы дадим более общий вывод выражения пондеромоторных сил магнитного поля, исходя из выражения магнитной энергии (81.3) и рассматривая изменение этой энергии δW при бесконечно малом виртуальном перемещении $\mathbf{q}$ находящихся в поле тел. Если при этих виртуальных перемещениях оставлять силу токов проводимости постоянной, то, согласно уравнению (79.9), изменение магнитной энергии при этих перемещениях δW будет равно работе A механических сил:

$$(\delta W)_J = A.$$

С другой стороны, работа эта, очевидно, равна

$$A = \int \mathbf{qf}\, dV,$$

где $\mathbf{f}$ есть плотность пондеромоторных сил. Следовательно,

$$(\delta W)_J = \int \mathbf{qf}\, dV. \qquad (83.1)$$

Вычислив $(\delta W)_J$ из этого соотношения, можно, очевидно, определить и искомое значение плотности сил $\mathbf{f}$.

Энергия магнитного поля может быть выражена одним из следующих уравнений (81.3) и (81.1):

$$W_1 = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{HB}\, dV = \frac{1}{8\pi}\int \frac{1}{\mu} B^2\, dV, \quad W_2 = W_1 = \frac{1}{2c}\int \mathbf{Aj}\, dV.$$

Эти выражения энергии, как неоднократно указывалось, справедливы лишь *при отсутствии ферромагнетиков*; следовательно, все наши выводы будут применимы лишь к диа- и парамагнитным средам.

---

[1] В этом выражении не учитывается разница между $(\overline{H}_{\text{микро}})^2$ и $\overline{H^2}_{\text{микро}}$.

[2] При первом чтении параграф этот может быть опущен.

Все дальнейшие выкладки весьма аналогичны вычислениям, проведенным нами при определении пондеромоторных сил электрического поля. В частности, мы предположим, что поверхностей разрыва в поле нет и что объем интегрирования охватывает полное поле, так что все поверхностные интегралы, с которыми мы будем встречаться в дальнейшем, обратятся в нуль.

2. Изменение энергии поля при произвольном бесконечно малом перемещении $\mathbf{q}$ находящихся в нем тел равно

$$\delta W_1 = \frac{1}{8\pi}\int B^2\delta\left(\frac{1}{\mu}\right)dV + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{\mu}\mathbf{B}\,\delta\mathbf{B}\,dV,$$

или

$$\delta W_2 = \delta W_1 = \frac{1}{2c}\int \mathbf{A}\,\delta\mathbf{j}\,dV + \frac{1}{2c}\int \mathbf{j}\,\delta\mathbf{A}\,dV,$$

где $\delta\left(\frac{1}{\mu}\right)$, $\delta\mathbf{j}$, $\delta\mathbf{A}$ суть изменения соответствующих величин, обусловленные перемещением $\mathbf{q}$.

Так как $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, то $\delta\mathbf{B} = \delta\operatorname{rot}\mathbf{A}$. Порядок выполнения операций дифференцирования и варьирования может быть изменен без нарушения результата, так что

$$\delta\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}(\delta\mathbf{A}).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\mu}\mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{B} = \mathbf{H}\operatorname{rot}(\delta\mathbf{A}).$$

Далее, на основании (44*) и (62.7)

$$\mathbf{H}\operatorname{rot}(\delta\mathbf{A}) = \operatorname{div}[\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{H}] + \operatorname{rot}\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{A} = \operatorname{div}[\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{H}] + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\cdot\delta\mathbf{A}.$$

Внося это в выражение для δW_1 и воспользовавшись теоремой Гаусса (17*), получаем

$$\delta W_1 = \frac{1}{8\pi}\int B^2\delta\left(\frac{1}{\mu}\right)dV + \frac{1}{4\pi}\oint[\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{H}]_n\,dS + \frac{1}{c}\int\mathbf{j}\cdot\delta\mathbf{A}\,dV.$$

Согласно условиям, сформулированным в начале параграфа, поверхностный интеграл в этом выражении обращается в нуль. Наконец, ввиду того, что $\delta W_1 = \delta W_2$, приращение энергии δW можно, очевидно, представить также в следующей форме:

$$\delta W = 2\delta W_2 - \delta W_1 = \frac{e}{c}\int\mathbf{A}\,\delta\mathbf{j}\cdot dV - \frac{1}{8\pi}\int B^2\delta\left(\frac{1}{\mu}\right)dV.$$

Таким образом, вычисление δW сведено нами к определению изменения плотности токов проводимости $\mathbf{j}$ и магнитной проницаемости среды μ при виртуальном перемещении $\mathbf{q}$ находящихся в поле тел.

3. Локальное изменение $1/\mu$ выразится, очевидно, формулой, аналогичной выражению для $\delta\varepsilon$ [см. § 32, формулу (32.9′)]:

$$\delta\frac{1}{\mu} = -\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\mu}\right)\cdot\tau\,\mathrm{div}\,\mathbf{q} - \mathbf{q}\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{\mu},$$

где τ означает плотность среды (массу единицы объема) [1].

Что касается виртуального изменения плотности тока $\delta\mathbf{j}$, то оно может быть определено из того отмеченного в начале параграфа условия, что при виртуальном перемещении $\mathbf{q}$ сила тока через произвольную поверхность должна оставаться постоянной (если только эта поверхность перемещается *вместе* со средой).

Пусть через произвольную поверхность S до смещения $\mathbf{q}$ протекает ток J:

$$J = \int_S j_n\,dS = \int_S \mathbf{j}\,d\mathbf{S}.$$

При смещении $\mathbf{q}$ может, во-первых, измениться на $\delta\mathbf{j}$ плотность тока в различных точках поверхности S и, во-вторых, может деформироваться контур L этой поверхности, благодаря чему увеличится или уменьшится ее общая площадь. Если $d\mathbf{s}$ означает элемент контура L, то при смещении $\mathbf{q}$ этот элемент опишет площадку $\delta\mathbf{S} = [\mathbf{q}\,d\mathbf{s}]$ (см. § 50, в частности рис. 50). Приращение охватываемой контуром площади $\mathbf{S}$ сводится к сумме площадок $\delta\mathbf{S}$, описанных всеми его элементами $d\mathbf{s}$. Следовательно, долженствующее обращаться в нуль полное изменение тока J через произвольную испытывающую деформацию поверхность S равно

$$\delta J = \int_S \delta j_n\,dS + \oint_L \mathbf{j}\,[\mathbf{q}\,d\mathbf{s}] = 0.$$

Преобразуя последний интеграл по теореме Стокса [уравнение (27*)], получаем

$$\oint_L \mathbf{j}\,[\mathbf{q}\,d\mathbf{s}] = \oint_L [\mathbf{j}\mathbf{q}]\,d\mathbf{s} = \int_S \mathrm{rot}_n\,[\mathbf{j}\mathbf{q}]\,dS.$$

Внося это в предшествующее равенство ввиду произвольности поверхности S, получаем окончательно.

$$\delta\mathbf{j} = -\,\mathrm{rot}\,[\mathbf{j}\mathbf{q}]. \tag{83.2}$$

4. Внося приведенные значения $\delta\frac{1}{\mu}$ и $\delta\mathbf{j}$ в выражение для δW, получаем

$$\delta W = -\frac{1}{c}\int \mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,[\mathbf{j}\mathbf{q}]\,dV + \frac{1}{8\pi}\int B^2\left\{\frac{\partial(1/\mu)}{\partial\tau}\,\tau\,\mathrm{div}\,\mathbf{q} + \mathbf{q}\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{\mu}\right\}dV.$$

[1] Как и в случае диэлектриков, мы для простоты пренебрегаем зависимостью восприимчивости μ твердых магнетиков от деформаций, не связанных с изменением плотности среды.

На основании уравнения (44*)

$$\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,[\mathbf{jq}] = \mathrm{div}\,[[\mathbf{jq}]\mathbf{A}] + [\mathbf{jq}]\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A},$$

причем последний член может быть преобразован следующим образом:

$$[\mathbf{jq}]\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = [\mathbf{jq}]\mathbf{B} = -\mathbf{q}\,[\mathbf{jB}].$$

Далее,

$$B^2\frac{\partial(1/\mu)}{\partial\tau}\,\tau\,\mathrm{div}\,\mathbf{q} = \mathrm{div}\left(B^2\frac{\partial(1/\mu)}{\partial\tau}\,\tau\mathbf{q}\right) - \mathbf{q}\,\mathrm{grad}\left(B^2\frac{\partial(1/\mu)}{\partial\tau}\,\tau\right).$$

Внося эти значения в выражение для δW и принимая во внимание, что объемный интеграл дивергенции может быть преобразован в интеграл по поверхности и поэтому, согласно нашему условию, обращается в нуль, получаем

$$\delta W = \int \mathbf{q}\left\{\frac{1}{c}\,[\mathbf{jB}] - \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{grad}\left(B^2\frac{\partial(1/\mu)}{\partial\tau}\,\tau\right) + \frac{1}{8\pi}\,B^2\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{\mu}\right\}dV.$$

Сравнивая это выражение с выражением (83.1) и приняв во внимание, что $\mathbf{q}$ является произвольной функцией точки, получаем следующее выражение для плотности пондеромоторных сил:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}\,[\mathbf{jB}] - \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{grad}\left(B^2\frac{\partial(1/\mu)}{\partial\tau}\,\tau\right) + \frac{1}{8\pi}\,B^2\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{\mu}. \qquad (83.3)$$

Таким образом, пондеромоторные силы слагаются из сил плотности $\mathbf{f}^{(1)} = \frac{1}{c}\,[\mathbf{jB}]$, действующих на обтекаемые током проводники и совпадающих с прежней формулой (65.1), и из сил плотности

$$\mathbf{f}^{(2)} = \frac{1}{8\pi}\,B^2\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{\mu} - \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{grad}\left(B^2\frac{\partial(1/\mu)}{\partial\tau}\,\tau\right), \qquad (83.4)$$

действующих на находящиеся в поле магнетики.

5. Нетрудно показать, что плотность сил $\mathbf{f}^{(2)}$ совпадает с ранее выведенным выражением (66.6). Последнее выражение, как отмечалось в § 66, справедливо лишь для слабо намагничивающихся магнетиков (ср. § 32). В этом случае, согласно (69.5) и (70.4), величина $\varkappa/\mu$ пропорциональна числу молекул в единице объема среды, т. е. пропорциональна плотности среды τ. Стало быть,

$$\frac{\varkappa}{\mu} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu} = c\tau,$$

где c есть некоторая постоянная, от плотности среды не зависящая. Следовательно,

$$\frac{1}{\mu} = 1 - 4\pi c\tau$$

и

$$\tau\frac{\partial(1/\mu)}{\partial\tau} = -4\pi c\tau = \frac{1}{\mu} - 1.$$

Внося это в уравнение (83.4), получаем

$$\mathbf{f}^{(2)} = -\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left\{B^2\left(\frac{1}{\mu}-1\right)\right\} + \frac{1}{8\pi}B^2\operatorname{grad}\frac{1}{\mu} = \\ = \frac{1}{8\pi}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\operatorname{grad}B^2 = \frac{\mu-1}{8\pi\mu}\nabla B^2,$$

что действительно полностью сорпадает с уравнением (66.6).

6. Если в формуле (83.4) заменить $\mathbf{B}$ на $\mu\mathbf{H}$ и выполнить простые преобразования, то она принимает вид

$$\mathbf{f}^{(2)} = \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(H^2\tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\right) - \frac{1}{8\pi}H^2\operatorname{grad}\mu, \qquad (83.5)$$

совершенно аналогичный выражению (32.12) пондеромоторных сил, испытываемых диэлектриками в электрическом поле: формула (83.5) получается из (32.12) заменой $\mathbf{E}$ на $\mathbf{H}$ и ε на μ.

В этом обстоятельстве проявляется отмеченный в конце § 73 факт, что благодаря эквивалентности элементарных токов и магнитных диполей вся *макроскопическая* теория магнетиков может быть одинаково успешно интерпретирована как на основе современной теории, так и с точки зрения старых теорий магнетизма, исходивших из предположения о существовании в магнетиках реальных магнитных зарядов (диполей), т. е. из предположения о полном соответствии между электрическими свойствами диэлектриков и магнитными свойствами магнетиков. Именно, с точки зрения этих теорий существует соответствие между векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и между величинами ε и μ, тогда как в действительности вектору $\mathbf{E}$ соответствует не вектор $\mathbf{H}$, а вектор $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}}$, а диэлектрической проницаемости ε соответствует не μ, а $1/\mu$.

Отметим, что Максвелл и ряд других авторов (например, Абрагам, Кон и др.) не принимали во внимание зависимости магнитной восприимчивости от плотности среды, благодаря чему выражение пондеромоторных сил в магнетиках, которым они пользовались, отличалось от (83.5) отсутствием первого члена, т. е. стрикционных сил:

$$\mathbf{f}'' = \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(H^2\tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\right). \qquad (83.6)$$

Впрочем, совершенно так же, как и в случае диэлектриков (см. § 32 и 34), можно показать, что неучитывавшаяся Максвеллом слагающая $\mathbf{f}''$ плотности сил $\mathbf{f}^{(2)}$ сказывается лишь на *распределении* пондеромоторных сил по объему магнетика, тогда как равнодействующая $\mathbf{F}$ и результирующий момент $\mathbf{N}$ стрикционных сил $\mathbf{f}''$, приложенных ко всем элементам объема какого-либо тела, либо равны нулю (если это тело находится в вакууме), либо уравновешиваются гидростатическим давлением, возникающим под воздействием магнитного поля в окружающей тело жидкой или газообразной среде (см. также § 84).

§ 84. Тензор натяжения магнитного поля

1. Пондеромоторные силы магнитного поля совершенно так же, как и пондеромоторные силы поля электрического, могут быть сведены к эквивалентной этим силам системе натяжений, характеризуемой некоторым тензором натяжения $\mathbf{T}$.

Соответствующие вычисления совершенно аналогичны вычислениям § 34. Мы представим общее выражение пондеромоторных сил (83.3) как сумму двух слагаемых:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{f}' + \mathbf{f}'', \\ \mathbf{f}' &= \frac{e}{c}[\mathbf{jB}] - \frac{1}{8\pi} H^2 \operatorname{grad} \mu, \\ \mathbf{f}'' &= \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad}\left(H^2 \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau}\right) \end{aligned} \tag{84.1}$$

[ср. уравнение (83.5)]. Тензор натяжений $\mathbf{T}$ мы также представим как сумму двух тензоров $\mathbf{T}'$ и $\mathbf{T}''$:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}' + \mathbf{T}'' \tag{84.2}$$

так, чтобы $\mathbf{T}'$ соответствовало $\mathbf{f}'$, а $\mathbf{T}''$ соответствовало $\mathbf{f}''$, т. е. чтобы были удовлетворены уравнения

$$f'_x = \frac{\partial T'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T'_{xz}}{\partial z}, \quad f''_x = \frac{\partial T''_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T''_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T''_{xz}}{\partial z} \tag{84.3}$$

и аналогично для f'_y, f''_y и т. д. [ср. уравнение (33.7)].

2. Рассмотрим сначала силы $\mathbf{f}'$ и тензор $\mathbf{T}'$. Выражая плотность токов $\mathbf{j}$ через $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ [уравнение (62.7)], мы можем написать

$$\frac{e}{c}[\mathbf{jB}] = \frac{1}{4\pi}[\operatorname{rot}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}] = \frac{\mu}{4\pi}[\operatorname{rot}\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}].$$

Далее, на основании (47*)

$$[\operatorname{rot}\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}] = \mathbf{H}\nabla\cdot\mathbf{H} - \frac{1}{2}\operatorname{grad} H^2$$

и, стало быть,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}' = \frac{\mu}{4\pi}\mathbf{H}\nabla\cdot\mathbf{H} - \frac{\mu}{8\pi}\operatorname{grad} H^2 - \frac{1}{8\pi}H^2\operatorname{grad}\mu = \\ = \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{H} - \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}(\mu H^2). \end{aligned}$$

Рассмотрим слагающую плотности сил $\mathbf{f}'$ по оси x:

$$f'_x = \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\nabla\cdot H_x - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}(\mu H^2).$$

Легко убедиться [см. (43^*_2), где φ соответствует в нашем случае H_x], что

$$\mathbf{B}\nabla\cdot H_x = \mathbf{B}\cdot\nabla H_x = \operatorname{div}(\mathbf{B}H_x) - H_x\operatorname{div}\mathbf{B},$$

или ввиду того, что $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$,

$$\mathbf{B}\nabla \cdot H_x = \operatorname{div}(\mathbf{B}H_x) = \frac{\partial}{\partial x}(B_x H_x) + \frac{\partial}{\partial y}(B_y H_x) + \frac{\partial}{\partial z}(B_z H_x).$$

Внося это в предшествующее выражение для f'_x, убеждаемся, что оно совпадает по форме с уравнением (84.3), если положить

$$T'_{xx} = \frac{1}{4\pi}\left(\mu H_x^2 - \frac{\mu H^2}{2}\right), \quad T'_{xy} = \frac{\mu}{4\pi} H_x H_y, \quad T'_{xz} = \frac{\mu}{4\pi} H_x H_z.$$

Аналогично определяются и остальные компоненты тензора $\mathbf{T}'$, совокупность которых может быть представлена в форме таблицы типа (33.6):

$$4\pi\mathbf{T}' = \left\{ \begin{array}{lll} \mu\left(H_x^2 - \dfrac{H^2}{2}\right) & \mu H_x H_y & \mu H_x H_z \\ \mu H_y H_x & \mu\left(H_y^2 - \dfrac{H^2}{2}\right) & \mu H_y H_z \\ \mu H_z H_x & \mu H_z H_y & \mu\left(H_z^2 - \dfrac{H^2}{2}\right) \end{array} \right\}. \quad (84.4)$$

Таким образом, тензор натяжений магнитного поля $\mathbf{T}'$ может быть получен из соответствующего тензора $\mathbf{T}'$ электрического поля [формула (34.2)] простой заменой $\mathbf{E}$ на $\mathbf{H}$ и ε на μ [1]. То же самое относится и к тензору натяжений $\mathbf{T}''$, эквивалентному силам f'', ибо выражение плотности этих сил в магнитном поле (84.1) получается из выражения плотности сил f'' в электрическом поле (34.1) заменой $\mathbf{E}$ на $\mathbf{H}$ и ε на μ. Поэтому по аналогии (34.3)

$$T''_{xx} = T''_{yy} = T''_{zz} = \frac{1}{8\pi} H^2 \frac{\partial \mu}{\partial \tau}\tau, \quad (84.5)$$

тогда как недиагональные компоненты тензора $\mathbf{T}''$ (T''_{xy}, T''_{xz} и т. д.) равны нулю

3. Итак, эквивалентность объемных сил (84.1) системе натяжений (84.4) и (84.5) нами доказана (заметим, что оба тензора $\mathbf{T}'$ и $\mathbf{T}''$ симметричны).

Ввиду отмеченной аналогии натяжений магнитного поля с натяжениями электрического поля все результаты, полученные нами в § 34, непосредственно применимы и к натяжениям магнитного поля. Так, например, система натяжении в магнитном

[1]) Тот же результат получится и при замене в (34.2) $\mathbf{E}$ на $\mathbf{B}$ и ε на $1/\mu$, например $\varepsilon E_x E_y \to (1/\mu) B_x B_y = \mu H_x H_y$. С точки зрения современных представлений о поле в магнетиках, именно последняя замена имеет непосредственный физический смысл (ввиду соотношений $\mathbf{E} = \overline{\mathbf{E}}_{\text{микро}}$, $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}}$, $\mathbf{D} = \varepsilon\overline{\mathbf{E}}_{\text{микро}}$, $\mathbf{H} = (1/\mu)\,\overline{\mathbf{B}}_{\text{микро}}$).

поле сводится к *тяге* $\frac{\mu+\tau\,\partial\mu/\partial\tau}{8\pi}H^2$ *по направлению поля* **H** и к *давлению* $\frac{\mu-\tau\,\partial\mu/\partial\tau}{8\pi}H^2$ по направлению, перпендикулярному к **H** [см. уравнение (34.6) и (34.7)].

Далее, так же как и в § 34, можно показать, что равнодействующая **F** и результирующий момент **N** сил, испытываемых в магнитном поле каким-либо телом, полностью определяются *максвелловым тензором натяжений* $\mathbf{T}'$ и не зависят от неучитывавшегося Максвеллом тензора $\mathbf{T}''$, так что стрикционные натяжения $\mathbf{T}''$ влияют лишь на *распределение* пондеромоторных сил по объему тела, а также обусловливают возникновение в окружающей тело жидкой или газообразной среде уравновешивающего их гидростатического давления [см. уравнение (34.4)]

$$p=-\frac{1}{8\pi}H^2\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\tau. \tag{84.6}$$

4. Хотя полученнме в § 81–83 выражения для плотности энергии и плотности объемных сил магнитного поля, как неоднократно отмечалось, применимы лишь в неферромагнитных средах, однако сведение объемных сил к натяжениям позволяет, как было показано в § 75, определить также равнодействующую **F** и результирующий момент **N** сил, действующих на ферромагнетики (но не распределение сил по объему ферромагнетика).

§ 85. Вихри электрического поля

1. В § 76 мы вывели законы индукции токов в движущихся проводниках, основываясь на том, что, согласно § 45, на электрические заряды действует лоренцева сила (45.4):

$$\mathbf{F}=e\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right\},$$

второй член которой пропорционален скорости заряда и напряженности магнитного поля **H**. Затем, основываясь на принципе относительности движения, мы показали, что индукция токов должна иметь место и в *неподвижных* проводниках при изменениях магнитного поля, причем

$$\mathscr{E}^{\text{инд}}=-\frac{1}{c}\frac{d\Psi}{dt}=-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int B_n\,dS,$$

где интегрирование может быть распространено по любой поверхности, опирающейся на контур проводника. Для случая *неподвижных* [1]) проводников поверхность эта тоже может быть

[1]) Неподвижных относительно инерциальной системы, в которой производятся измерения поля (см. § 77)

выбрана неподвижной, причем в этом случае дифференцирование по времени может быть выполнено под знаком интеграла:

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial B_n}{\partial t}\, dS. \tag{85.1}$$

Знак полной производной по времени заменен нами знаком частной производной (круглое ∂) для того, чтобы отметить, что $\partial B_n/\partial t$ есть скорость изменения во времени величины B_n в *фиксированной* точке пространства.

Итак, мы приходим к заключению, что изменение магнитного поля должно вызывать в неподвижных проводниках появление сил, действующих на электрические заряды, причем циркуляция этих сил по контуру проводника, обозначаемая нами через $\mathscr{E}^{\text{инд}}$, определяется формулой (85.1).

2. В § 2 напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ была определена нами как сила, действующая на единичный положительный пробный заряд. Однако в § 45 мы убедились, что и в отсутствие электрического поля *движущийся* заряд может испытывать силу

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}].$$

Это обстоятельство ведет к необходимости уточнить определение напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ в том смысле, что $\mathbf{E}$ равно силе, действующей на *неподвижный* единичный положительный заряд. Действительно, из уравнения (45.4) следует при $v = 0$:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{e}\mathbf{F}$$

(предполагаем, что сторонние электродвижущие силы химического и термического происхождения отсутствуют).

Исходя из этого определения электрического поля, мы на основании относящейся к *неподвижным* проводникам формулы (85.1) должны заключить, что *при изменениях магнитного поля в этих проводниках возбуждается поле электрическое*, циркуляция напряженности которого по контуру проводника L равна

$$\oint_L E_s\, ds = \mathscr{E}^{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial B_n}{\partial t}\, dS = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{85.2}$$

Таким образом, явления индукции токов в проводниках, *движущихся* в постоянном магнитном поле, истолковываются нами как результат воздействия *магнитного* поля (лоренцева сила), тогда как индукция в *неподвижных* проводниках при изменениях магнитного поля истолковывается совершенно иным образом — как результат воздействия *электрического* поля, возбуждаемого изменениями поля магнитного. Между тем, как мы убедились в § 76, никакой объективной разницы между этими

двумя видами индукции нет, ибо понятие движения относительно. Первая из посвященных теории относительности работ Эйнштейна начинается указанием на необходимость устранения этой принципиальной разницы в истолковании двух явлений, объективно неотличимых друг от друга. Теория относительности эту задачу разрешила, о чем вкратце будет рассказано в § 115.

3. Так как, согласно уравнению (7.3), циркуляция электрического вектора поля стационарных зарядов равна нулю, то формула (85.2) останется справедливой и в том случае, если мы условимся во всем дальнейшем понимать под $\mathbf{E}$ *общую напряженность электрического поля вне зависимости от того, возбуждается ли это поле* (полностью или частично) *стационарными электрическими зарядами* (кулоново поле) *или же изменениями поля магнитного.*

При выводе уравнения (85.2) предполагалось, что контур интегрирования L совпадает с контуром линейного проводника. Естественно, однако, предположить, что если изменения магнитного поля возбуждают электрическое поле в проводниках, то они возбуждают его также и вне проводников. Иными словами, естественно предположить, что уравнение (85.2) применимо к *любому* замкнутому неподвижному контуру интегрирования *вне зависимости* от того, проходит ли этот контур по проводникам, по диэлектрикам или по вакууму, и что отличие проводящего контура от непроводящего сказывается лишь в том, что только в проводниках возбуждение поля ведет к появлению тока.

Итак, мы допустим, что уравнение (85.2) применимо к любому замкнутому неподвижному контуру интегрирования L. Предполагая, что на опирающейся на контур L поверхности S нет точек разрыва сплошности вектора $\mathbf{E}$, мы можем преобразовать левую часть этого уравнения с помощью теоремы Стокса [уравнение (27*)]:

$$\oint\limits_L E_s\, ds = \int\limits_S \operatorname{rot}_n \mathbf{E}\, dS = -\frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial B_n}{\partial t}\, dS.$$

Это уравнение должно оставаться справедливым при любом выборе контура L и поверхности интегрирования S, что может иметь место лишь в том случае, если

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{85.3}$$

Таким образом, явления индукции приводят с необходимостью к заключению, что *электрическое поле может возбуждаться не только электрическими зарядами, но и изменениями магнитного поля* (впрочем, магнитное поле в свою очередь возбуждается движением электрических зарядов).

Уравнение (85.3), связывающее значение вихря электрического вектора с производной по времени от магнитной индукции, представляет собой одно из *основных* уравнений электромагнитного поля. Очевидно, что, повторяя рассуждения в обратном порядке, из дифференциального уравнения (85.3) можно вывести исходное интегральное соотношение (85.2).

4. Так как дивергенция ротора равна нулю [уравнение (42_2^*)], то из уравнения (85.3) следует, что

$$\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{85.4}$$

Стало быть, из (85.3) вытекает, что в каждой точке пространства $\operatorname{div}\mathbf{B}$ должна иметь постоянное значение, которое ни при каких физических процессах изменяться не может. Достаточно допустить, что при отсутствии токов и магнетиков магнитная индукция $\mathbf{B}$ (а стало быть, и $\operatorname{div}\mathbf{B}$) во всем пространстве обращается в нуль, чтобы из (85.4) в свою очередь получить одно из фундаментальных уравнений электромагнитного поля, а именно уравнение (62.8): $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$.

§ 86. Зависимость электрического напряжения от пути интегрирования. Напряжение переменного тока

1. В § 48 мы убедились, что необходимое и достаточное условие того, чтобы вектор обладал (однозначным) скалярным потенциалом, состоит в равенстве нулю его ротора во всех точках пространства или, что сводится к тому же, в равенстве нулю его циркуляции по произвольному контуру [см. также § 7, в частности уравнение (7.6)]. Из уравнений (85.2) и (85.3) следует, что для электрического вектора $\mathbf{E}$ это условие удовлетворяется только в стационарных полях ($\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$) и что, следовательно, *электрический вектор* $\mathbf{E}$ *переменного электромагнитного поля* ($\partial\mathbf{B}/\partial t \neq 0$) (однозначным) *скалярным потенциалом* φ *не обладает.*

2. В связи с этим целый ряд понятий, введенных нами при изучении обладающего потенциалом стационарного электрического поля, теряет в переменном поле непосредственный физический смысл. Так, например, в § 35 мы ввели понятие электрического *напряжения* $\mathscr{E}_{12}$, существующего между двумя произвольными точками поля *1* и *2*, определив его как линейный интеграл напряженности поля E *по произвольному пути*, соединяющему точки *1* и *2* [уравнение (35 3)]:

$$\mathscr{E}_{12} = \int_1^2 E_s\, ds.$$

В случае обладающего потенциалом стационарного поля, согласно уравнению (35.2), имеем

$$\mathscr{E}_{12} = \int_1^2 E_s\, ds = \varphi_2 - \varphi_1,$$

так что напряжение $\mathscr{E}_{12}$ равно разности потенциалов точек *1* и *2* и *однозначно* определяется положением этих точек. В случае же переменного поля, лишенного потенциала, значение интеграла $\int_1^2 E_s\, ds$ существенно зависит от выбора пути интегрирования, так что можно говорить лишь о *напряжении* $\mathscr{E}_{12}$, существующем между данными точками *1* и *2 вдоль данного пути.*

3. Недостаточное внимание к этому чрезвычайно важному отличию поля переменного от поля стационарного может привести к грубейшим ошибкам.

Пусть, например, *1* и *2* суть две произвольные точки некоторого замкнутого проводника L, к которым параллельно L приключен гальванометр G (рис. 72). Если R_0 есть общее сопротивление гальванометра и подводящих проводов, соединяющих его

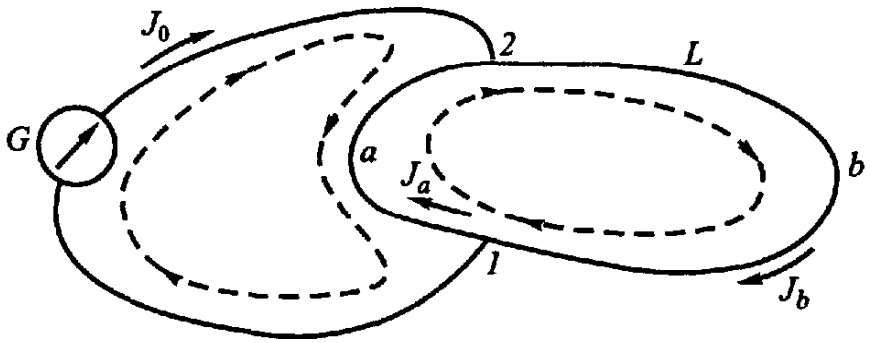

Рис 72

с точками *1* и *2*, то сила тока J_0 в цепи гальванометра, согласно закону Ома [уравнение (35.4) или (38.4)], будет равна

$$J_0 = \frac{1}{R_0}\mathscr{E}_{12} = \frac{1}{R_0}\int_1^2 E_s\, ds.$$

В стационарном электромагнитном поле значение последнего интеграла от пути интегрирования не зависит. В переменном же поле *формула* (38.4), выражающая закон Ома, *остается справедливой*, как явствует из ее вывода, приведенного в § 38, *лишь в том случае*, если под $\int_2^1 E_s\, ds$ понимать *линейный интеграл вектора* **E** от точки *1* до точки *2*, взятый *вдоль того именно*

проводника, по которому течет ток J_0. Так как значение этого интеграла в переменном поле существенно зависит от положения и формы пути интегрирования, то, стало быть, показания гальванометра J_0 будут существенно зависеть от расположения подводящих проводов.

Предположим, что в рассматриваемых проводниках сторонние электродвижущие силы отсутствуют. Пусть R_a и R_b суть соответственно сопротивления, а J_a и J_b — силы токов в участках *1a2* и *2b1* контура L. Пусть, далее, Ψ есть поток магнитной индукции через контур L, а Ψ_0 — поток ее через контур, образованный цепью гальванометра *1G2* и участком *2a1* контура L (см. рис. 72). Выберем, наконец, определенным образом направление положительного обхода этих контуров, например так, как указано штриховой линией на рисунке. Применяя второй закон Кирхгофа к контуру *1G2a1*, мы на основании уравнений (38.4) и (85.2) можем написать

$$J_0R_0 - J_aR_a = \oint\limits_{1G2a1} E_s\,ds = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_0}{\partial t}.$$

(Знак минус перед J_a введен потому, что, согласно рисунку, направление положительного обхода контура противоположно направлению тока J_a.) Аналогичным образом для контура L получим

$$J_aR_a + J_bR_b = \oint\limits_{1a2b1} E_s\,ds = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Применяя, наконец, первый закон Кирхгофа к точкам разветвления цепи *1* и *2*, получим

$$J_b = J_0 + J_a.$$

Исключая из этих уравнений J_a и J_b, найдем

$$J_0\{R_0(R_a + R_b) + R_aR_b\} = -\frac{1}{c}\left\{R_a\frac{\partial\Psi}{\partial t} + (R_a + R_b)\frac{\partial\Psi_0}{\partial t}\right\}.$$

Таким образом, показания гальванометра J_0 действительно существенно зависят от скорости изменения потока Ψ_0 через контур *1G2a1*, в свою очередь зависящего от расположения цепи гальванометра.

4. Предположим, например, что собственным магнитным полем токов J_a, J_b и J_0 можно пренебречь по сравнению с «внешним» полем переменного тока J' заданной силы и периода, который циркулирует по соленоиду AB (рис. 73), охватываемому контуром L.

Допустим, далее, для упрощения, что магнитное поле соленоида можно с достаточной степенью точности считать сосредоточенным внутри соленоида, т. е. что вне соленоида $\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$

(см. пример в § 49). Пусть, наконец, $R_a = R_b$. При этих условиях легко показать [1]), что в двух различных положениях цепи гальванометра, обозначенных на рисунке соответственно сплошной и штриховой линиями, ток в цепи гальванометра *1G2* будет иметь одинаковую силу, но *противоположное направление* (например, *1G2* в первом и *2G1* во втором случае). Стало быть, если пользоваться термином «напряжение» между точками *1* и *2*, без указания пути интегрирования, то мы должны сказать, что переброска цепи гальванометра слева направо влечет за собой изменение знака напряжения $\mathscr{E}_{12}$, приложенного к конечным точкам этой цепи *1* и *2*.

5. Однако и в случае переменных токов при известных условиях и при соблюдении некоторой осторожности бывает иногда удобно пользоваться понятием напряжения.

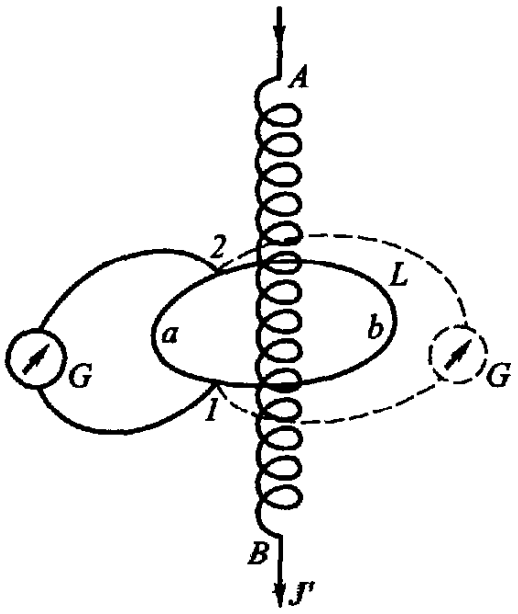

Рис 73

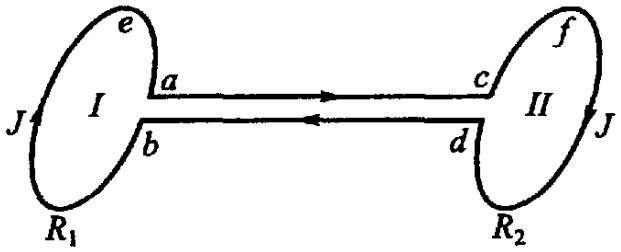

Рис 74

Рассмотрим в виде примера наиболее простую схему сети центральной электростанции переменного тока, состоящую из двух почти замкнутых контуров *I* и *II*, концы которых соединены двумя близко расположенными друг к другу проводами *ac* и *bd* (рис. 74). Участок *I* включает в себя генераторную установку электростанции, а участок *II* — потребителей тока.

Пренебрегая потоком индукции через полоску, ограниченную проводами *ac* и *bd*, можем считать, что поток индукции Ψ через контур всей цепи равен сумме потоков Ψ_1 и Ψ_2 через петли *I* и *II*; при вычислении потоков Ψ_1 и Ψ_2 условимся считать петли эти дополненными до замкнутости прямолинейными отрезками *ab* и *cd*. В этом случае, согласно уравнению (77.2),

$$J(R_1 + R_2) = \mathscr{E}_1^{\text{стр}} + \mathscr{E}_2^{\text{стр}} - \frac{1}{c}\frac{d\Psi_1}{dt} - \frac{1}{c}\frac{d\Psi_2}{dt},$$

где R_1 — общее сопротивление участка *I* вплоть до точек *c* и *d*, R_2 — сопротивление участка *II*, а $\mathscr{E}_1^{\text{стр}}$ и $\mathscr{E}_2^{\text{стр}}$ суть сторонние электродвижущие силы в этих участках.

[1]) Предоставляем сделать это читателю в виде упражнения.

Перепишем последнее уравнение в виде

$$JR_2 - \mathscr{E}_2^{\text{стр}} + \frac{1}{c}\frac{d\Psi_2}{dt} = -\left(JR_1 - \mathscr{E}_1^{\text{стр}} + \frac{1}{c}\frac{d\Psi_1}{dt}\right) = \mathscr{E}_{cd}, \qquad (86.1)$$

где $\mathscr{E}_{cd}$ означает величину каждого из членов равенства.

Если петли I и II достаточно удалены друг от друга, то их взаимной индукцией можно пренебречь и положить

$$\Psi_1 = \frac{1}{c}L_{11}J, \qquad \Psi_2 = \frac{1}{c}L_{22}J,$$

где L_{11} и L_{22} суть самоиндукции петель I и II. Существенно, что для определения величины $\mathscr{E}_{cd}$ в этом случае достаточно знать значения величин J, R_1, $\mathscr{E}_1^{\text{стр}}$, L_{11}, относящихся лишь к одному «генерирующему» участку I. Обратно, если $\mathscr{E}_{cd}$ известно, то сила тока в цепи может быть определена в зависимости от значения величин R_2, $\mathscr{E}_2^{\text{стр}}$, L_{22}, относящихся к одному лишь «потребляющему» участку II, причем $\mathscr{E}_{cd}$ играет роль добавочной сторонней электродвижущей силы, приложенной к почти замкнутому контуру II.

Эта именно величина $\mathscr{E}_{cd}$ и называется *напряжением, приложенным к «потребляющему» участку цепи II и возбуждаемым «генерирующим» участком цепи I.*

6. Применим закон Ома к участку II:

$$JR_2 = \mathscr{E}_2^{\text{стр}} + \int\limits_{cfd} E_s\, ds.$$

Так как, с другой стороны,

$$-\frac{1}{c}\frac{d\Psi_2}{dt} = \oint\limits_{cfdc} E_s\, ds,$$

то

$$\mathscr{E}_{cd} = JR_2 - \mathscr{E}_2^{\text{стр}} + \frac{1}{c}\frac{d\Psi_2}{dt} = \int\limits_{cfd} E_s\, ds - \oint\limits_{cfdc} E_s\, ds = \int\limits_{c}^{d} E_s\, ds,$$

где последний интеграл, согласно данному выше определению величины Ψ_2, должен быть взят по кратчайшему пути, соединяющему точки c и d. Таким образом, *напряжение* $\mathscr{E}_{cd}$ равно линейному интегралу напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ по этому пути:

$$\mathscr{E}_{cd} = \int\limits_{c}^{d} E_s\, ds \qquad (86.2)$$

и, стало быть, *может быть измерено по силе тока в гальванометре, включенном между точками c и d.* При этом цепь

гальванометра может отклоняться от прямой cd лишь в таких (впрочем, на практике довольно широких) пределах, чтобы это отклонение не сказалось сколько-нибудь существенно на значении интеграла $\int_c^d E_s\,ds$.

7. Полагая для простоты, что контур тока не деформируется, так что самоиндукции L_{11} и L_{22} петель I и II постоянны во времени, получаем на основании уравнения (81.8):

$$\frac{1}{c}J\frac{d\Psi_1}{dt}=\frac{1}{c^2}JL_{11}\frac{dJ}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2c^2}L_{11}J^2\right)=\frac{dW_1}{dt},$$

где W_1 есть магнитная энергия поля тока в участке цепи I. Аналогичное соотношение справедливо и для участка II. Стало быть, умножив уравнение (86.1) на J, можем написать

$$\left(J^2R_2-J\mathscr{E}_2^{\text{стр}}+\frac{dW_2}{dt}\right)=-\left(J^2R_1-J\mathscr{E}_1^{\text{стр}}+\frac{dW_1}{dt}\right)=J\mathscr{E}_{cd}. \tag{86.3}$$

Так как J^2R равно выделяемому током теплу, а $J\mathscr{E}^{\text{стр}}$ равно работе сторонних электродвижущих сил (в единицу времени), то, следовательно, $J\mathscr{E}_{cd}$ равно общей убыли энергии участка I цепи и вместе с тем равно приращению энергии участка II. Иными словами, *$J\mathscr{E}_{cd}$ равно энергии, передаваемой за единицу времени генерирующим участком I потребляющему участку II*

Таким образом, при условии достаточной близости проводов ac и bd и достаточной удаленности друг от друга участков I и II действительно оказывается весьма целесообразным вводить в рассмотрение определяемую уравнениями (86.1) и (86.2) величину $\mathscr{E}_{cd}$, называемую в технике *напряжением переменного тока.*

§ 87. Уравнение непрерывности

1. До сих пор мы предполагали, что переменные токи, подобно токам постоянным, являются *замкнутыми.* Как мы убедились в § 37, необходимым условием замкнутости линий тока является требование, чтобы в каждой точке проводника удовлетворялось соотношение (37.4)

$$\operatorname{div}\mathbf{j}=0.$$

Из соотношения (37.4), в частности, следует, что в неразветвленном проводнике сила тока в каждый данный момент одинакова во всех его сечениях и что в точках разветвления проводников удовлетворяется первый закон Кирхгофа (37.1).

Однако формула (37.4) и следующие из нее выводы, в сущности, неприменимы к переменным токам, или, точнее говоря,

применимы с известным приближением лишь к определенному классу переменных токов (замкнутые квазистационарные токи, см. дальше). Вообще же говоря, переменные токи могут протекать по не замкнутым контурам (цепь с конденсатором, между обкладками которого находится диэлектрик; токи в антенне и т. п.), сила их может быть различна в различных сечениях проводника и т. д. Напомним, что само уравнение (37.4) было получено нами в § 37 из более общего «уравнения непрерывности» (37.2)

$$\oint_S j_n\, dS = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

(e — заряд, находящийся в ограниченном поверхностью S объеме V) на том основании, что в поле постоянных токов распределение электрических зарядов должно оставаться постоянным. В случае же токов переменных это условие, вообще говоря, не выполняется, и уравнение непрерывности (37.2) не сводится к уравнению (37.4)

2. Для дальнейшего нам удобно будет преобразовать уравнение непрерывности (37.2) следующим образом. Если в ограничиваемом поверхностью S объеме V нет ни поверхностных зарядов, ни разрывов сплошности плотности тока $\mathbf{j}$ (разрывы эти могут иметь место лишь на поверхностях раздела различных сред), то

$$e = \int_V \rho\, dV,$$

где ρ — объемная плотность электрических зарядов, и

$$\oint_S j_n\, dS = \int_V \operatorname{div}\mathbf{j}\, dV$$

[согласно теореме Гаусса, уравнение (17*)]. Следовательно, уравнение (37.2) принимает вид

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{j}\, dV = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV,$$

где изменение порядка интегрирования по V и дифференцирования по t возможно при условии неподвижности рассматриваемого нами объема V (поэтому здесь дан знак *частной* производной по времени, см. с. 393). Ввиду произвольности объема V из последнего равенства следует:

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \qquad (87.1)$$

3. Уравнение (87.1) и представляет собой дифференциальную форму *уравнения непрерывности*. На поверхностях разрыва вектора $\mathbf{j}$ оно должно быть, конечно, заменено уравнением

$$\operatorname{Div}\mathbf{j} = j_{2n} - j_{1n} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}, \tag{87.2}$$

в чем можно убедиться либо непосредственно из уравнения (37.2), либо на основании уравнения (6.8). В частности, на границе проводника и непроводящей среды $j_{2n} = 0$ (если нормаль $\mathbf{n}$ направлена от проводника наружу) и, следовательно, имеет место соотношение

$$j_n = \frac{\partial\sigma}{\partial t}, \tag{87.3}$$

гласящее, что количество электричества j_n, притекающее за единицу времени к единице поверхности проводника, равно приращению заряда σ этого участка поверхности (в единицу времени).

Уравнения (87.1) и (87.2) дают возможность, зная плотность токов, определить вызываемое этими токами изменение распределения зарядов.

§ 88. Токи смещения

1. Обратим теперь внимание на то чрезвычайно существенное обстоятельство, что при $\partial\rho/\partial t \neq 0$ уравнение непрерывности (87.1) *несовместимо* с уравнением магнитного поля токов (62.7):

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi j}{c}.$$

Действительно, согласно последнему уравнению, $\mathbf{j}$ пропорционально вихрю вектора $\mathbf{H}$. Но дивергенция вихря всегда равна нулю [уравнение (42_2^*)], тогда как, согласно уравнению (87.1), $\operatorname{div}\mathbf{j}$, вообще говоря, нулю не равна.

Подобно этому, эквивалентное уравнению (62.7) или (47.3) уравнение (47.5)

$$\oint_L H_s\,ds = \frac{4\pi J}{c} = \frac{4\pi}{c}\int_S j_n\,dS$$

неприложимо к токам переменным уже по одному тому, что сила *незамкнутых* токов, протекающих через опирающуюся на контур L поверхность S, существенно зависит не только от контура L, но и от формы и расположения поверхности S. В частности, в случае незамкнутых токов нередко можно провести поверхность S так, чтобы она вовсе не пересекала несущих ток проводников (рис. 75, где изображена цепь переменного тока, включающая в себя конденсатор C).

Итак, уравнения магнитного поля постоянных токов, полученные нами в гл. IV, вообще говоря, неприложимы к переменным токам и нуждаются в видоизменениях и дополнениях.

2. Основываясь на убеждении в справедливости уравнения непрерывности (87.1), можно попытаться путем чисто формальных математических рассуждений определить простейший вид поправки, внесение которой в формулу (62.7) устранит указанное противоречие между этой формулой и формулой (87.1).

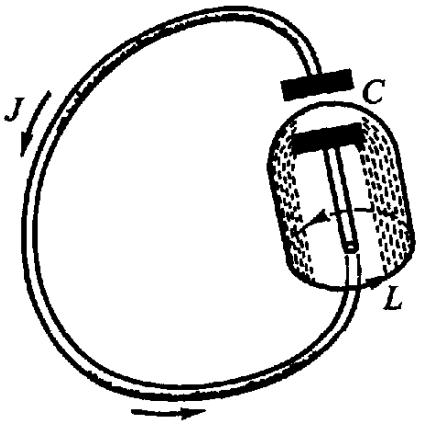

Рис. 75

До сих пор мы исходили из того, что электрические токи представляют собой движение электрических зарядов по проводникам и что плотность их, согласно уравнению (38.1), определяется значением коэффициента электропроводности проводника λ: $\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}})$.

Будем отныне называть эти токи *токами проводимости* и допустим, что помимо них [1]) могут существовать также и токи некоторого иного рода, которые мы будем называть *токами смещения* (смысл этого названия выяснится в дальнейшем). Плотность полного тока $\mathbf{j}_{\text{пл}}$ будет, стало быть, равна сумме плотностей тока проводимости $\mathbf{j}$ и тока смещения $\mathbf{j}_{\text{см}}$:

$$\mathbf{j}_{\text{пл}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}. \tag{88.1}$$

Предположим при этом, что истинная зависимость вектора $\mathbf{H}$ от $\mathbf{j}$ отличается от уравнения (62.7) только в том отношении, что $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ пропорционален не $\mathbf{j}$, а плотности *полного* тока $\mathbf{j}_{\text{пл}}$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{пл}} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}). \tag{88.2}$$

Иными словами, предположим, что в магнитном отношении *токи смещения* эквивалентны токам проводимости, т. е. *возбуждают магнитное поле по тем же законам, что и токи проводимости.*

Взяв дивергенцию от обеих частей последнего уравнения, мы на основании (42_2^*) получим

$$\operatorname{div}\mathbf{j}_{\text{пл}} = \operatorname{div}\mathbf{j} + \operatorname{div}\mathbf{j}_{\text{см}} = 0. \tag{88.3}$$

Таким образом, поле полного тока должно быть лишено истоков, т. е. *линии полного тока* не могут нигде ни начинаться, ни кон-

[1]) И помимо молекулярных токов в магнетиках. Молекулярные токи не причисляются к макроскопическим токам, о которых здесь идет речь, а учитываются вектором намагничения $\mathbf{I}$ [см. уравнения (61 9) и (61.10)], который в свою очередь однозначно определяется векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ (см. уравнение (62.9)].

чаться и *должны быть замкнутыми либо уходить в бесконечность* (либо, наконец, должны всюду плотно заполнять некоторую поверхность, см. § 53). Следовательно, там, где обрываются линии тока проводимости, к этим линиям должны непосредственно примыкать продолжающие их линии тока смещения.

Далее, из последнего равенства на основании уравнения (87.1) следует:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{см}} = -\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Но, согласно уравнению (22.2),

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right).$$

3. Самый простой, хотя, конечно, и не единственный, способ удовлетворить этому равенству состоит в том, чтобы положить

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{88.4}$$

т. е. положить, что плотность тока смещения в каждой точке поля пропорциональна скорости изменения вектора электрической индукции $\mathbf{D}$. Согласно этому определению ток смещения может иметь место не только в проводниках, но и в диэлектриках и даже в вакууме, однако в стационарном поле ток этот всегда будет равен нулю. Уравнение же (88.2) примет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \lambda (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{88.5}$$

При $\partial \mathbf{D}/\partial t = 0$ (88.5) совпадает с уравнением (62.7), так что все результаты, полученные нами ранее из уравнений (62.7) и (47.3), остаются в силе для полей стационарных.

Итак, вводя чисто формальным образом гипотезу о существовании токов смещения, мы можем устранить противоречие между уравнениями (87.1) и (62.7), не внося при этом никаких видоизменений в законы стационарного электрического поля.

Опыт полностью подтверждает справедливость как этой гипотезы, так и уравнения (88.5), являющегося одним из основных уравнений электродинамики. Как мы увидим в дальнейшем, наиболее убедительным доказательством этого уравнения является самый факт распространения электромагнитных волн.

4. Чтобы уяснить физический смысл уравнений (88.4) и (88.5), рассмотрим случай, когда полный ток сводится к току смещения, т. е. когда ток проводимости равен нулю (непроводящая среда, $\lambda = 0$).

В этом случае уравнение (88.5) примет вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (\lambda = 0). \tag{88.6}$$

Это уравнение вполне аналогично уравнению (85.3) $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

Из уравнения (88.6) следует, что, подобно тому как электрическое поле может возбуждаться не только электрическими зарядами, но и изменениями поля магнитного (т. е. изменениями вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$), так в свою очередь и *магнитное поле может возбуждаться* не только движениями зарядов (токи проводимости), но и *изменениями поля электрического* (вектора электрической индукции $\mathbf{D}$) [1].

Исходя из этой аналогии между уравнениями (85.3) и (88.6), величину $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ можно было бы назвать плотностью *магнитного тока смещения.*

Заметим, что правые части уравнения (88.6) и (85.3) имеют различные знаки. Обусловливается это отличие тем, что силовые линии магнитного поля $\mathbf{H}$, возбуждаемого токами смещения $\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, составляют с направлением этих токов правовинтовую систему [2], тогда как направления векторов $\mathbf{E}$ и $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ находятся в обратном соотношении (рис. 76; ср. рис. 70 на с. 357).

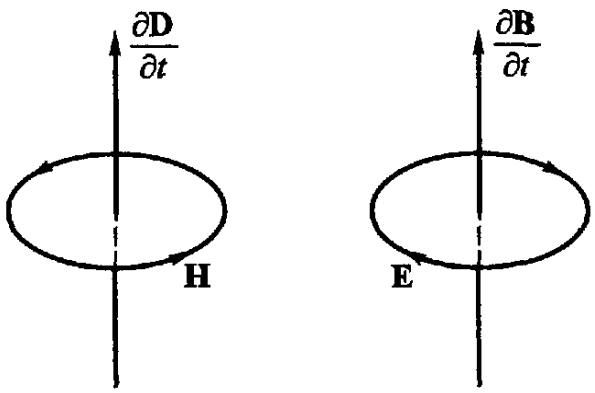

Рис. 76

5. Отметим в заключение, что с современной точки зрения [3], *токи проводимости*, с одной стороны, и *токи смещения* в вакууме, с другой стороны, несмотря на сходство названий, представляют собой, в сущности, *совершенно различные физические понятия. Единственная* общая их характеристика за-

[1] Разумеется, изменение электрического поля в *конечном счете* обусловливается тем же движением зарядов. Более того, с электронной точки зрения некоторая часть (*но только часть*) плотности токов смещения в диэлектриках (но не в вакууме) *непосредственно* сводится к движению «связанных» зарядов среды (см. ниже).

[2] Это следует из эквивалентности токов смещения токам проводимости и из результатов § 53.

[3] В отличие от первоначальных представлений Максвелла, впервые установившего существование токов смещения и давшего им это название.

ключается в том, что они одинаковым образом возбуждают магнитное поле, т. е. одинаковым образом входят в правую часть уравнения (88.5). Во всех же остальных отношениях эти токи резко отличаются друг от друга.

Самое существенное отличие заключается в том, что токи проводимости соответствуют движению электрических зарядов, тогда как «чистый» ток смещения — *ток смещения в вакууме — соответствует лишь изменению напряженности электрического поля и никаким движением электрических зарядов* или каких-либо других частиц вещества *не сопровождается.* Действительно, в вакууме $\mathbf{D} = \mathbf{E}$, и уравнение (88.4) принимает вид

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

При наличии диэлектрика, на основании уравнений (20.6) и (22.1) уравнение (88.4) принимает вид

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sum e_i \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial t}. \qquad (88.7)$$

Таким образом, ток смещения в диэлектрике складывается из «чистого» тока смещения $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, с движением зарядов не связанного, и из члена $\sum e_i \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial t} = \sum e_i \mathbf{v}_i$, учитывающего движение зарядов, связанных с молекулами диэлектрика, и с микроскопической точки зрения являющегося, в сущности, составной частью тока проводимости [ср., например, уравнение (40.1)]; $\mathbf{v}_i$ в последнем из наших равенств означает скорость движения заряда e_i.

Упомянем еще о том, что токи смещения, в отличие от токов проводимости, *не сопровождаются выделением джоулева тепла.* В случае токов смещения в вакууме это самоочевидно. Как будет доказано в § 92, это положение строго справедливо также в применении к токам смещения в диэлектриках, диэлектрическая проницаемость которых не зависит от температуры (квазиупругие диполи). Что же касается диэлектриков с постоянными диполями, то, как указывалось в § 31, изменение поляризации диэлектриков этого класса сопровождается некоторым выделением или поглощением тепла. Стало быть, и токи смещения в них сопровождаются тепловыми эффектами. В переменных полях высокой частоты это влечет за собой выделение заметных количеств теплоты в диэлектрике, которое, однако, подчиняется совершенно иным закономерностям, чем выделение джоулева тепла в проводниках.

6. Обратимся теперь к вопросу о том, в какой мере существование токов смещения нарушает правильность тех заключений, к которым мы пришли в предшествующих параграфах этой главы. Заметим, прежде всего, что внутри проводников, в частности

внутри металлов, плотность токов смещения обычно настолько мала по сравнению с плотностью токов проводимости:

$$j_{\text{см}} \ll j,$$

что без ущерба для точности вычислений ими можно вообще пренебречь.

Предположим, например, что мы имеем дело с периодическим током частоты ν, так что

$$E = E_0 \sin 2\pi\nu t \quad \text{и} \quad j_{\text{см}} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon\nu}{2} E_0 \cos 2\pi\nu t.$$

В этом случае условие $j_{\text{см}} \ll j = \lambda E$ эквивалентно требованию

$$\varepsilon\nu \ll \lambda. \tag{88.8}$$

Для ртути $\lambda = 9{,}57 \cdot 10^{15}$ абс. ед. (с^{-1}), проводимость чистых твердых металлов в 10–50 раз больше: для них $\lambda \approx 10^{17}$ абс. ед.

Ввиду столь большого значения λ условие (88.8) выполняется в металлах для всех частот, применяемых в технике (в том числе и в радиотехнике), и нарушается лишь в области частот, соответствующих инфракрасной части спектра. Однако при этих частотах начинает играть существенную роль зависимость материальных констант ε и λ от частоты поля (дисперсия), так что уравнения Максвелла, не учитывающие возможности такой дисперсии, перестают быть применимыми [1].

Совершенно иной характер имеет вопрос о том, можно ли пренебречь по сравнению с током проводимости теми токами смещения, которые возникают в окружающей проводник непроводящей среде. В большинстве технически интересных случаев это оказывается допустимым при условии, что проводники образуют собой замкнутую цепь. Если же в проводящей цепи тока имеются разрывы, например, если в нее включен конденсатор (см. рис. 75), то током смещения в пространстве между обкладками конденсатора пренебречь никак нельзя. Действительно, полный ток всегда лишен истоков и стоков [уравнение (88.3)]; поэтому общая сила тока смещения, протекающего через конденсатор, равна силе тока в подводящих к нему проводах. Впрочем, в случае включенного в цепь конденсатора электрическое поле тока,

[1] Заметим, что понятие диэлектрической проницаемости металлов может быть определено лишь в применении к переменным полям, ибо в статических полях поляризация проводников, если она и существует, полностью маскируется явлениями проводимости (токами). Значения ε для металлов в быстропеременных полях могут быть определены путем изучения отражения и преломления электромагнитных волн в металлах. Так, например, в § 102 будет показано, что коэффициент отражения волн от металлической поверхности зависит, в частности, от диэлектрической проницаемости металла [ср. формулы (102.2), (102.3) и (102.8)].

а стало быть, и ток смещения концентрируются между обкладками конденсатора. Поэтому с известным приближением цепь с конденсатором можно уподобить *замкнутой проводящей цепи*; иными словами, вычисление самоиндукции цепи, магнитного поля тока и т. д. можно вести так, как если бы между обкладками конденсатора циркулировал ток проводимости такой же силы, как и в подводящих к нему проводах (ибо в магнитном отношении ток смещения эквивалентен току проводимости). Таким образом, наличие конденсатора в цепи переменного тока непосредственно сказывается лишь на электрическом, но не на магнитном поле тока (см. § 89).

Иное дело, если мы имеем совершенно разомкнутую проводящую цепь, например прямолинейный проводник конечной длины (антенна). В этом случае токи смещения будут, вообще говоря, распределены по всему окружающему проводник пространству, и о замкнутости цепи говорить не приходится. Наконец, при достаточно быстрых электрических колебаниях и достаточной длине проводника (сравнимой с длиной электрической волны) сила тока проводимости может оказаться неодинаковой в различных сечениях проводника (даже если этот проводник замкнут и лишен разветвлений). Если, несмотря на это, при известных условиях и окажется возможным при определении магнитного поля пренебречь полем токов смещения, то все же подобные токи проводимости постоянным токам уподоблены быть не могут и условиям квазистационарности не удовлетворяют.

Во всяком случае, достаточная медленность изменений поля является необходимым условием того, чтобы можно было пренебречь токами смещения (сила которых пропорциональна быстроте изменения поля) и считать токи проводимости замкнутыми.

§ 89. Конденсатор в цепи квазистационарного тока. Электрические колебания

1. До сих пор мы рассматривали лишь квазистационарные токи в замкнутых проводящих контурах; теперь в качестве примера мы несколько подробнее рассмотрим цепь с включенным в нее конденсатором.

Пусть C — емкость конденсатора, R — сопротивление цепи, соединяющей его обкладки, а L — самоиндукция той замкнутой цепи тока, которая получается из данной путем замыкания обкладок конденсатора отрезком помещенного между ними провода [1]).

[1]) Если расстояние между этими обкладками достаточно мало, то в известных пределах сечение замыкающего их провода на значении коэффициента L сказываться не будет.

Предположим, что сила тока J одинакова во всех сечениях цепи (в проводах это ток проводимости, между обкладками конденсатора — ток смещения), и выберем определенным образом положительное направление тока (стрелка на рис. 77). Пусть e_1 и e_2 суть заряды обкладок конденсатора, причем $e_1 = -e_2$. Допустим, что емкость конденсатора настолько превышает емкость остальной цепи, что последней можно вовсе пренебречь, и что общая энергия электрического поля практически равна энергии того участка этого поля, который заключается между обкладками конденсатора. Если поле удовлетворяет условиям квазистационарности, то в каждый данный момент значение этой энергии должно находиться в той же зависимости от мгновенного значения заряда конденсатора, как и в статическом случае; аналогичное положение будет применимо и к зависимости магнитной энергия от силы тока в цепи. Стало быть, общая электромагнитная энергия системы должна быть равна [уравнения (15.9) и (79.6)]:

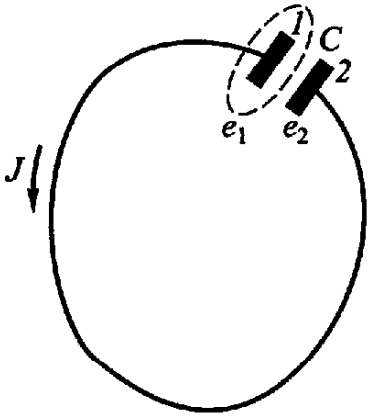

Рис. 77

$$W = \frac{1}{2}\frac{e_1^2}{C} + \frac{1}{2c^2}LJ^2. \tag{89.1}$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение, определяющее силу тока при разряде конденсатора, примем во внимание, что количество выделяющегося в цепи тока джоулева тепла должно равняться убыли электромагнитной энергии системы:

$$J^2R = -\frac{dW}{dt} = -\left(\frac{e_1}{C}\frac{de_1}{dt} + \frac{1}{c^2}LJ\frac{dJ}{dt}\right).$$

С другой стороны, применяя уравнение непрерывности (37.2) к замкнутой поверхности, охватывающей одну из обкладок конденсатора (см. рис. 77), легко убедиться, что при сделанном нами выборе положительного направления тока сила этого тока J должна равняться убыли заряда e_1 первой пластины конденсатора и приращению заряда e_2 второй его пластины:

$$J = -\frac{de_1}{dt} = \frac{de_2}{dt}. \tag{89.2}$$

Внося это в предшествующее уравнение и сокращая его затем на J, получим

$$RJ = \frac{e_1}{C} - \frac{1}{c^2}L\frac{dJ}{dt}. \tag{89.3}$$

Дифференцируя это уравнение по t и применяя вновь уравнение (89.2), получим окончательно

$$\frac{1}{c^2}L\frac{d^2J}{dt^2} + R\frac{dJ}{dt} + \frac{J}{C} = 0. \tag{89.4}$$

Если же мы выразим значение электромагнитных величин не в абсолютных, а в практических единицах, то фактор $1/c^2$ исчезнет (ср. § 80), и мы получим

$$L'\frac{d^2J'}{dt^2}+R'\frac{dJ'}{dt}+\frac{J'}{C}=0. \tag{89.5}$$

2. Уравнение (89.5) имеет хорошо известный вид уравнения затухающих периодических колебаний; его общее решение выражается формулой

$$J'=Ae^{k_1t}+Be^{k_2t},$$

где A и B — произвольные постоянные интегрирования, а k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения

$$L'k^2+R'k+\frac{1}{C'}=0,$$

т.е.

$$k=-\frac{R'}{2L'}\pm\sqrt{\left(\frac{R'}{2L'}\right)^2-\frac{1}{L'C'}}.$$

Если подкоренное выражение не отрицательно, то оба числа k_1 и k_2 вещественны и *отрицательны* (ибо абсолютное значение корня меньше значения первого члена), так что разряд конденсатора будет апериодическим. Если же подкоренное выражение отрицательно, то k_1 и k_2 комплексны. Введя обозначение

$$\omega_0^2=\frac{1}{L'C'}-\left(\frac{R'}{2L'}\right)^2, \tag{89.6}$$

получим в этом случае

$$k=\frac{R'}{2L'}\pm i\omega_0$$

и

$$J'=Ae^{k_1t}+Be^{k_2t}=\exp\left(-\frac{R'}{2L'}t\right)(Ae^{i\omega_0t}+Be^{-i\omega_0t}).$$

Выражая $e^{\pm i\omega_0t}$ через тригонометрические функции, легко привести вещественную часть этого выражения к виду

$$J'=a\exp\left(-\frac{R'}{2L'}t\right)\sin(\omega_0t-\varphi),$$

где a и φ — некоторые новые постоянные, значение которых зависит от A и B. Стало быть, в этом случае в цепи циркулирует периодический затухающий ток циклической частоты ω_0. Период колебаний этого тока, т. е. промежуток времени между последовательными моментами прохождения силы тока через нуль в одинаковом направлении (т. е., например, от отрицательных значений J' к положительным), равен

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}.$$

При условии

$$R'^2 \ll \frac{4L'}{C'}$$

вторым членом выражения (89.6) можно пренебречь, так что последнее равенство сводится к известной формуле Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{L'C'}. \tag{89.7}$$

Быстрота затухания силы тока определяется отношением $R'/(2L')$: за время одного полного периода сила тока уменьшается в $\exp\left(\frac{R'}{2L'}T\right)$ раз. Логарифм этого множителя

$$\delta = \frac{R'}{2L'}T = \frac{R'\pi}{L'\omega_0} \tag{89.8}$$

носит название *логарифмического декремента колебаний.*

3. Электрические колебания в цепи с конденсатором вполне аналогичны колебаниям тела, удерживаемого около положения равновесия упругими силами. Заряжая конденсатор, или выводя тело из положения равновесия, мы сообщаем системе известный запас потенциальной энергии (электрической или упругой). При разряде конденсатора и при колебаниях тела эта потенциальная энергия переходит соответственно в «электрокинетическую» энергию магнитного поля и в кинетическую энергию движущегося тела. Однако, когда заряд конденсатора становится равным нулю (тело проходит через положение равновесия), ток не спадает сразу до нуля (тело не останавливается), а благодаря своего рода электромагнитной инерции (мерой которой является коэффициент самоиндукции, ср. с. 368) продолжает в течение некоторого времени течь в прежнем направлении. Благодаря этому конденсатор перезаряжается (тело удаляется от положения равновесия), после чего процесс разряда повторяется в обратном направлении. Сопротивление цепи, которым обусловливается затухание электрических колебаний, конечно, вполне аналогично трению.

Учение об электрических колебаниях играет чрезвычайно важную роль в целом ряде отраслей электротехники и в связи с этим настолько развилось, что представляет собой, в сущности, особый отдел общего учения об электричестве. Не имея возможности входить в подробное изложение этих вопросов, мы принуждены отослать читателя к специальным сочинениям.

4. В заключение покажем, что уравнение (89.4), выведенное нами на основании энергетических соображений, может быть получено также и из закона Ома [уравнение (35.4)]. Применяя уравнение (35.4) к соединяющему обкладки конденсатора проводу *1a2*, по которому циркулирует ток проводимости J (см. рис. 77),

получим

$$JR = \int\limits_{1a2} E_s\, ds.$$

Но

$$\int\limits_{1a2} E_s\, ds = \oint\limits_{1a2b1} E_s\, ds - \int\limits_{2b1} E_s\, ds = \mathscr{E}^{\text{инд}} + \int\limits_{1b2} E_s\, ds,$$

ибо циркуляция электрического вектора по замкнутому контуру равна электродвижущей силе индукции. Здесь *2b1* означает отрезок, дополняющий до замкнутости контур *1a2*. Что же касается последнего интеграла, то *в электростатическом поле* он равнялся бы разности потенциалов обкладок конденсатора $\varphi_1 - \varphi_2$. В переменном поле, как мы убедились в § 86, понятие потенциала теряет смысл, ибо к потенциальному кулонову полю электрических зарядов присоединяется вихревое поле индукции.

Однако предположение о квазистационарности поля тока, циркулирующего в конденсаторной цепи, включает в себя, в частности, предположение, что электрическое поле вблизи конденсатора находится в той же зависимости от мгновенного значения его заряда, как и в случае статическом. Иными словами, предполагается, что по крайней мере *между обкладками* конденсатора напряженность вихревого поля, индуцированного изменениями поля магнитного, исчезающе мала по сравнению с напряженностью кулонова поля зарядов конденсатора. С другой стороны, из смысла последнего уравнения явствует, что входящий в него интеграл $\int\limits_{1b2} E_s\, ds$, должен быть взят по кратчайшему пути, соединяющему обкладки конденсатора, т. е. по пути, лежащему *между* этими обкладками. Следовательно, в случае квазистационарного тока интеграл этот можно положить равным той разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, которая существовала бы между обкладками конденсатора в статическом случае. Стало быть,

$$JR = \mathscr{E}^{\text{инд}} + \varphi_1 - \varphi_2. \tag{89.9}$$

Выразив в этом уравнении $\varphi_1 - \varphi_2$ через заряд и емкость конденсатора [уравнение (9.1)], а $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ через L и dJ/dt, мы вновь придем к уравнению (89.4).

Заметим, что уравнение (89.9) вполне аналогично закону Ома для постоянных токов [уравнение (38.5)], причем $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ играет роль «сторонних» электродвижущих сил.

З а д а ч а 36. К концам c и d почти замкнутого «потребляющего» участка цепи II (см. рис. 74, с. 398) приложено извне заданное переменное напряжение $\mathscr{E}'_{cd} = \mathscr{E}'_0 \cos \omega t$ (пользуемся практической системой единиц). Сторонних электродвижущих сил в этом участке цепи нет, но в него включен конденсатор

емкости C'. Показать, что сила тока J' в цепи равна

$$J' = J'_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

причем амплитуда тока J'_0 равна

$$J'_0 = \frac{\mathscr{E}'_0}{\sqrt{R'^2 + (\omega L' - 1/(\omega C'))^2}},$$

а сдвиг фазы тока по отношению к фазе напряжения определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L' - 1/(\omega C')}{R'}.$$

Примечание 1. Эти соотношения остаются справедливыми и в случае замкнутой цепи, ток в которой возбуждается периодическими изменениями потока магнитной индукции внешнего магнитного поля; чтобы перейти к этому случаю, достаточно в приведенных формулах заменить $\mathscr{E}_{cd}$ на $\mathscr{E}^{\text{инд}}_{\text{внш}}$:

$$\mathscr{E}'^{\text{инд}}_{\text{внш}} = -\frac{d\Psi'_{\text{внш}}}{dt}.$$

Примечание 2. Из выражения для J'_0 явствует, что при заданном $\mathscr{E}'_0$ амплитуда тока достигает максимума при $\omega L' = 1/(\omega C')$, т. е. при

$$\omega^2 = \frac{1}{L'C'}.$$

Если логарифмический декремент собственных колебаний цепи мал, то это условие соответствует приближенному равенству (циклической) частоты ω внешних возбуждающих сил и частоты собственных колебаний цепи ω_0 [уравнения (89.6) и (89.7)]. Таким образом, цепь с конденсатором и самоиндукцией, как и всякая система с собственным периодом колебаний, обнаруживает при возбуждении ее внешними периодическими силами явление резонанса. Как известно, этими явлениями *резонанса* широко пользуются в электротехнике вообще и радиотехнике в частности.

§ 90. Скин-эффект

Выше мы вовсе не входили в рассмотрение вопроса о распределении переменных токов по сечению проводников. Между тем этот вопрос важен не только с теоретической, но и с технической точки зрения. Как мы сейчас покажем, даже в однородном квазилинейном проводнике (§ 38) переменный ток в отличие от постоянного не распределяется равномерно по сечению проводника, а, вообще говоря, концентрируется на его поверхности [1]. Это

[1] В некоторых случаях возможно обратное явление, т. е. осевая концентрация тока; см. *Либин З.* // Журнал прикладной физики. 1927. Т. IV. Вып. 3. С. 45.

явление, получившее название *скин-эффекта* (английское слово «скин» значит кожа; ток концентрируется на «коже» проводника), в свою очередь влечет за собой изменение эффективного сопротивления и самоиндукции проводника.

1. При изложении теории скин-эффекта проводников мы будем исходить из основных уравнений электромагнитного поля (85.3) и (88.5):

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi\lambda}{c}\mathbf{E} + \frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

(предполагаем, что $\mathbf{E}^{\text{стр}} = 0$ и что μ от времени не зависит).

Как указывалось в § 88, плотность токов смещения в проводниках или по крайней мере в металлах исчезающе мала по сравнению с плотностью токов проводимости. Поэтому в последнем уравнении мы можем пренебречь вторым членом и положить [ср. уравнение (47.3)]:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi\lambda}{c}\mathbf{E}.$$

Рассмотрим однородный проводник, на протяжении которого ε, λ и μ суть величины постоянные. В этом случае, образовав вихрь уравнения (85.3) и внеся в него приведенное значение $\operatorname{rot}\mathbf{H}$, получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\mathbf{H}) = -\frac{4\pi\mu\lambda}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

С другой стороны, на основании уравнения (42_3^*)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \nabla^2\mathbf{E},$$

причем, если внутри проводника нет объемных зарядов ($\rho = 0$), то ввиду постоянства ε из уравнения (22.4) следует:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon\operatorname{div}\mathbf{E} = 0.$$

Стало быть, дифференциальное уравнение электрического поля внутри однородного проводника может быть записано так:

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{90.1}$$

Подобным же способом легко получить аналогичное уравнение и для магнитного вектора $\mathbf{H}$:

$$\nabla^2\mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{90.2}$$

2. Ограничимся рассмотрением переменных полей, напряженность которых является *синусоидальной* функцией времени, и будем выражать их напряженность в *комплексной* форме (ср. § 80, с. 369):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y, z)e^{i\omega t}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(x, y, z)e^{i\omega t}, \tag{90.3}$$

где амплитуды $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ могут быть комплексными векторами [1]), но от времени не зависят.

Внося уравнение (90.3) в уравнение (90.1) и сокращая его затем на временной фактор $e^{i\omega t}$, получим следующее уравнение для амплитуды электрического вектора:

$$\nabla^2\mathbf{E}_0 = \frac{4\pi\mu\lambda i\omega}{c^2}\mathbf{E}_0 = 2ip^2\mathbf{E}_0, \tag{90.4}$$

где нами введено обозначение

$$p^2 = \frac{2\pi\mu\lambda\omega}{c^2}. \tag{90.5}$$

3. Рассмотрим сначала следующий простейший случай. Пусть бесконечный однородный проводник занимает полупространство $z > 0$, так что его поверхность совпадает с плоскостью $z = 0$. Предположим, что электрическое поле, а стало быть, и ток направлены по оси x параллельно граничной поверхности ($E_y = E_z = 0$) (рис. 78). Предположим, далее, что напряженность поля зависит только от расстояния z рассматриваемой точки проводника от его поверхности, но не зависит от x и y.

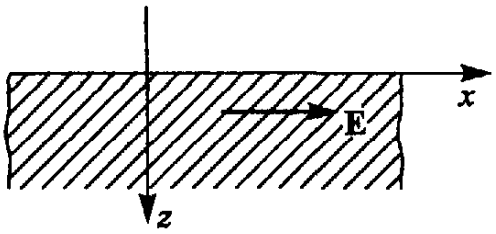

Рис. 78

При этих условиях уравнение (90.4) поля внутри проводника (т. е. при $z > 0$) принимает вид

$$\nabla^2 E_{0x} = \frac{\partial^2 E_{0x}}{\partial z^2} = 2ip^2 E_{0x}.$$

Общее решение этого линейного уравнения, как известно, имеет вид

$$E_{0x} = Ae^{kz} + Be^{-kz},$$

где A и B — постоянные интегрирования, а k — корень уравнения

$$k^2 = 2ip^2,$$

т. е.

$$k = p\sqrt{2i} = p(1+i).$$

Таким образом,

$$E_{0x} = Ae^{pz}e^{ipz} + Be^{-pz}e^{-ipz},$$

[1]) Не смешивать комплексных векторов с комплексными числами, изображаемыми векторами на плоскости. Всякий комплексный вектор $\mathbf{a}$ может быть представлен в виде суммы $\mathbf{b} + i\mathbf{c}$, где $i = \sqrt{-1}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ суть обычные вещественные векторы в пространстве.

причем, согласно уравнению (90.5), p есть величина вещественная. Так как поле в проводнике ограничено тонким поверхностным слоем, то постоянную интегрирования A нужно положить равной нулю, ибо в противном случае при увеличении z, т. е. при удалении от поверхности в глубь проводника, E_{0x} росло бы до бесконечности. Переходя, кроме того, от амплитуды электрического вектора к его полному комплексному выражению, получим

$$E_x = E_{0x}e^{i\omega t} = Be^{-pz}e^{i(\omega t - pz)}. \tag{90.6}$$

Отбрасывая мнимую часть, получаем окончательно

$$E_x = Be^{-pz}\cos(\omega t - pz). \tag{90.6'}$$

Соответственно этому плотность тока выражается формулой

$$j_x = \lambda E_x = j_0 e^{-pz}\cos(\omega t - pz), \tag{90.7}$$

где через $j_0 = \lambda B$ обозначена амплитуда плотности тока на поверхности проводника.

Таким образом, по мере проникновения в глубь проводника фаза электрического вектора и плотности тока изменяется линейно, а их амплитуды Be^{-pz} и λBe^{-pz} убывают по экспоненциальному закону. При этом основную часть тока можно считать сосредоточенной в поверхностном слое толщиной в $1/p$ см, ибо на этой глубине плотность тока уже в e раз (т. е. примерно в 2,7 раза) меньше плотности тока у поверхности проводника.

Чтобы оценить толщину этого слоя, рассмотрим конкретный пример. Для меди можно положить

$$\mu = 1,\ \lambda = 6\cdot 10^{-4}\ \text{эл.-маг. ед.} = \text{с}^2\cdot 6\cdot 10^{-4}\ \text{абс. (эл.-стат.) ед.}$$

Циклическая частота равна

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

где ν — число периодов в секунду. При 1000 периодах из уравнения (90.5) следует:

$$p = \sqrt{\frac{2\pi\mu\lambda\omega}{c^2}} \sim 5\ \text{см}^{-1}.$$

При 10^5 периодах в секунду, что соответствует сравнительно медленным радиотелеграфным колебаниям (длина волны 3000 м), получаем

$$p \sim 50\ \text{см}^{-1}.$$

Таким образом, в первом случае ток практически сосредоточен в слое толщиной в 1/5 см = 2 мм, а во втором — в слое всего лишь 1/50 см = 0,2 мм толщины.

В случае постоянных токов $\omega = 0$ и, следовательно, $p = 0$, так что напряженность поля и плотность тока сохраняют постоянное значение во всей толще проводника.

4. Результаты, полученные при рассмотрении бесконечного проводника, остаются качественно применимыми и к практически наиболее интересному случаю *цилиндрических проводников.* И в этом случае переменный ток концентрируется на поверхности проводника тем сильнее, чем больше частота тока. Концентрация тока на поверхности влечет за собой изменение сопротивления и самоиндукции проводника; таким образом, для переменных токов эти величины уже не являются постоянными, а зависят от частоты тока. Так, например, если весь ток концентрируется в поверхностном слое цилиндрического провода, то сопротивление провода должно стать равным сопротивлению *полого* цилиндра, обладающего стенками соответствующей толщины. По мере увеличения частоты толщина проводящего ток слоя уменьшается, и сопротивление проводника должно увеличиваться.

Введем цилиндрическую систему координат z, r, α, ось которой совпадает с осью цилиндрического провода, и допустим, что в рассматриваемом участке провода поле $\mathbf{E}$ направлено по оси провода, причем его напряженность $E = E_z$ зависит только от координаты r, но не зависит ни от z, ни от α.

При этих условиях уравнение (90.4) принимает вид [1])

$$\frac{d^2E_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dE_0}{dr} - 2ip^2E_0 = 0. \tag{90.8}$$

Уравнения этого типа носят название уравнений Бесселя. Коэффициент $1/r$ при dE_0/dr в этом уравнении обращается при $r = 0$ (т. е. на оси провода) в бесконечность, поэтому и решения уравнения Бесселя при $r = 0$, вообще говоря, тоже обращаются в бесконечность. Существует только одно вполне определенное (с точностью до произвольного постоянного множителя) решение уравнения (90.8), которое остается конечным на оси провода; это решение носит название бесселевой функции нулевого порядка от аргумента $pr\sqrt{-2i}$ и обозначается символом $J_0(pr\sqrt{-2i})$ (не смешивать символа бесселевой функции J_0 с обозначением силы тока). Так как E_0 должно обладать конечным значением во всей толще провода, то из (90.8) следует:

$$E_0 = \text{const} \cdot J_0(pr\sqrt{-2i}). \tag{90.9}$$

[1]) Действительно, ввиду того, что вектор $\mathbf{E}$ направлен по оси z, уравнение (90.4) равносильно уравнению $\nabla^2 E_{0z} - 2ip^2E_{0z} = 0$, или, так как $E_{0z} = E_0$, уравнению $\nabla^2 E_0 - 2ip^2E_0 = 0$. Величина E_0 является скаляром, по условию зависящим только от r. Поэтому

$$\text{grad}_r E_0 = \frac{\partial E_0}{\partial r}, \quad \text{grad}_z E_0 = \text{grad}_\alpha E_0 = 0.$$

Далее

$$\nabla^2 E_0 = \text{div grad}\, E_0.$$

Поэтому, приравнивая в (22*) вектор $\mathbf{a}$ вектору $\text{grad}\, E_0$, получаем

$$\nabla^2 E_0 = \frac{\partial^2 E_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_0}{\partial r}.$$

В теории бесселевых функций доказываются следующие две формулы:

при $pr \ll 1$

$$J_0(pr\sqrt{-2i}) = 1 + \frac{i(pr)^2}{2} - \frac{(pr)^4}{16} + \ldots, \tag{90.10}$$

при $pr \gg 1$

$$J_0(pr\sqrt{-2i}) = \frac{\exp[pr - i(pr - \pi/8)]}{2^{1/4}\sqrt{2\pi pr}}. \tag{90.11}$$

Мы ограничимся рассмотрением двух предельных случаев: $pr_0 \ll 1$ и $pr_0 \gg 1$, где r_0 — радиус провода. В первом случае (малая частота ω, тонкий провод) можно на протяжении всего сечения провода ограничиться первыми членами разложения (90.10). Напряженность поля E и плотность тока j будут в этом случае лишь незначительно изменяться на протяжении сечений: с помощью (90.10) легко показать, что амплитуда действительной части плотности тока будет возрастать при удалении от оси тока приблизительно пропорционально $1 + (pr)^4/16$.

В случае же больших частот ω и толстых проводов $pr_0 \gg 1$, и на бóльшей части сечения провода $J_0(pr\sqrt{-2i})$ может быть заменено приближенным выражением (90.11), так что

$$E_0 = \frac{\text{const}}{\sqrt{r}} \exp\left[pr - i\left(pr - \frac{\pi}{8}\right)\right].$$

Переходя от амплитуды E_0 напряженности поля к ее полному комплексному выражению $E_0 e^{i\omega t}$ и отбрасывая затем мнимую часть, получаем

$$E_z = \frac{a}{\sqrt{r}} e^{pr} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8} - pr\right),$$

$$j_z = \lambda E_z = \frac{\lambda a}{\sqrt{r}} e^{pr} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8} - pr\right) = \frac{be^{-p(r_0 - r)}}{\sqrt{r}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8} - pr\right), \tag{90.12}$$

где a и $b = \lambda a e^{pr_0}$ суть постоянные

Таким образом, в этом случае плотность тока экспоненциально убывает по мере удаления от поверхности $r = r_0$ в глубь проводника; основная часть тока сосредоточивается, как и в рассмотренном выше бесконечном проводнике, в поверхностном слое толщины $1/p$ см.

Ввиду этого при определении, например, полной силы тока в проводнике мы можем проинтегрировать выражение (90.12) для j_z по всему сечению проводника; хотя в глубине проводника при $pr \ll 1$ это выражение и перестает быть справедливым и даже обращается в бесконечность на оси проводника, все же внутренние области проводника (при условии $pr_0 \gg 1$) практически ничего не привносят в полную силу тока.

Итак, полная сила тока в проводнике при $pr_0 \gg 1$ равна

$$J = \int_0^{r_0} j_z \cdot 2\pi r\, dr = 2\pi b \int_0^{r_0} \sqrt{r}\, e^{-p(r_0 - r)} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8} - pr\right) dr.$$

Ввиду того, что подынтегральное выражение весьма быстро спадает при удалении от поверхности проводника, можно приближенно заменить $\sqrt{r}$ его значением на поверхности:

$$J = 2\pi b\sqrt{r_0} \int_0^{r_0} e^{-p(r_0 - r)} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8} - pr\right) dr.$$

Выполняя интегрирование и пренебрегая членом порядка e^{-pr_0}, получаем

$$J = \frac{\pi b\sqrt{r_0}}{p}\left[\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right)\right].$$

Наконец, среднее за период значение квадрата силы тока равно

$$\overline{J^2} = \frac{\pi^2 b^2 r_0}{p^2} \tag{90.13}$$

Определим, наконец, количество джоулева тепла, выделяющегося в единице длины провода за единицу времени:

$$Q = \int \frac{\overline{j_z^2}}{\lambda}\cdot 2\pi r\,dr = \frac{2\pi b^2}{\lambda}\int_0^{r_0} e^{-2p(r_0-r)}\overline{\cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{8} - pr\right)}\,dr.$$

Так как среднее за период значение квадрата косинуса равно $1/2$, то

$$Q = \frac{\pi b^2}{\lambda}\int_0^{r_0} e^{-2p(r_0-r)}\,dr = \frac{\pi b^2}{2p\lambda}(1 - e^{-2pr_0}),$$

или, пренебрегая членом e^{-2pr_0} по сравнению с единицей, получаем

$$Q = \frac{\pi b^2}{2p\lambda}. \tag{90.14}$$

5. Если Q есть среднее количество джоулева тепла, выделяемого в проводнике за единицу времени переменным током силы J, то сопротивлением проводника переменному току целесообразно назвать отношение значения Q к среднему за период значению квадрата силы переменного тока $\overline{J^2}$:

$$R = \frac{Q}{\overline{J^2}}. \tag{90.15}$$

В технике эту величину R принято называть *омическим или ваттным сопротивлением* проводника.

Для постоянного тока $\overline{J^2} = J^2$, так что приведенное выражение совпадает с законом Джоуля [уравнение (35.7)].

Для случая квазистационарного переменного тока в цепи с самоиндукцией, рассмотренного в § 80, определяемое этим выражением значение ваттного сопротивления совпадает с обычным сопротивлением цепи постоянному току. Действительно, внося в уравнение (80.10), выражающее величину потребляемой в цепи мощности (которая, очевидно, равна выделяющемуся в цепи теплу), значение среднего квадрата силы тока из уравнения (80.7), получаем

$$Q = \frac{1}{2}\frac{\mathscr{E}_0'^2\cos\varphi}{\sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2}} = \overline{J^2}\cos\varphi\sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2} = R\overline{J^2}.$$

В случае же быстропеременных токов, когда ток сосредоточивается в тонком поверхностном слое проводника ($pr \gg 1$), из (90.13)

и (90.14) следует, что ваттное сопротивление единицы длины провода равно

$$R = \frac{Q}{\overline{J^2}} = \frac{p}{2\pi r_0 \lambda}. \tag{90.16}$$

Таким образом, проводник оказывает переменному току циклической частоты ω такое же сопротивление, какое он оказывал бы постоянному току, если бы ток был сосредоточен в поверхностном слое проводника сечения $2\pi r_0/p$, т. е. толщины δ [1]:

$$\delta = \frac{1}{p} = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\mu\lambda\omega}}. \tag{90.17}$$

6. В отличие от сопротивления самоиндукция проводника уменьшается по мере увеличения частоты тока. Действительно, самоиндукция проводника, согласно определению, пропорциональна энергии магнитного поля тока, циркулирующего по этому проводнику [уравнение (81.8)]. С другой стороны, известно, что если ток сосредоточен, например, на поверхности цилиндрического проводника, то магнитное поле внутри проводника равно нулю (см. задачу 29 на с. 209); поле же вне цилиндра от распределения тока по его сечению не зависит (поскольку распределение это сохраняет аксиальную симметрию). Следовательно, по мере концентрации тока на поверхности проводника уменьшается энергия его поля, а стало быть, и самоиндукция проводника, причем последняя стремится к пределу L', равному внешней самоиндукции проводника (см. с. 386).

К тому же выводу можно прийти, приняв во внимание, что магнитное поле в проводниках определяется дифференциальным уравнением (90.2) того же вида, как и электрическое поле, и что, стало быть, как электрическое, так и магнитное поле быстропеременных токов в глубь проводников не проникает.

---

[1]) Формула (90 17) справедлива лишь в случае так называемого нормального скин-эффекта, имеющего место, когда глубина скин-слоя δ значительно превосходит длину свободного пробега электронов l. Действительно, лишь в этом случае можно в каждой точке скин-слоя пользоваться дифференциальной формой закона Ома (36.5). С ростом частоты ω глубина проникновения поля δ при нормальном скин-эффекте уменьшается (см. (90 17)) и при $\delta \lesssim l$ наступает аномальный скин-эффект В области ярко выраженного аномального скин-эффекта, когда $\delta \ll l$ — толщина скин-слоя $\delta_{\text{ан}} \sim (c^2 l/(2\pi\mu\lambda\omega))^{1/3}$, это выражение получается из (90.17), если ввести эффективную проводимость, равную $\lambda\delta_{\text{ан}}/l$, т е если в выражении (41.1) для проводимости λ заменить длину свободного пробега l на толщину скин-слоя $\delta_{\text{ан}}$. Об аномальном скин-эффекте см., например: *Займан Дж* Принципы теории твердого тела — М · Мир, 1974 Гл 8, § 7. (*Примеч. ред.*)

ГЛАВА VII

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЕ И ЕГО РАСПРОСТРАНЕНИЕ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 91. Система максвелловых уравнений макроскопического электромагнитного поля

1. В предшествующих главах изложение носило индуктивный характер: мы шаг за шагом обобщали эмпирически найденные закономерности и формулировали их в виде отдельных законов. Теперь же задача нахождения основных законов электромагнитного поля (по крайней мере в том смысле, как эти законы понимаются в классической теории макроскопического поля) может считаться разрешенной, и полученные результаты могут быть сведены в *полную* систему уравнений электромагнитного поля. Если система этих уравнений верна и действительно является *полной*, то из нее должны *однозначно* вытекать *все* свойства поля — как уже изученные, так и не изученные нами.

Таким образом, система основных уравнений представляет собой, в сущности, математическую формулировку основных постулатов или «аксиом» классической электродинамики, играющих в ней ту же роль, какую в классической механике играют аксиомы Ньютона. Дальнейшая задача теории заключается в раскрытии содержания этих уравнений, в применении их к отдельным вопросам и в сравнении вытекающих из них следствий с данными опыта.

В настоящей главе мы ограничимся установлением системы основных уравнений *макроскопического* электромагнитного поля при следующих упрощающих допущениях: 1) все находящиеся в поле материальные тела *неподвижны*; 2) в каждой точке поля значения величин ε, μ и λ, характеризующих свойства среды, остаются *постоянными*, т. е. не меняются со временем, не зависят от напряженности поля и считаются величинами заданными; 3) постоянные магниты и ферромагнетики в поле отсутствуют. Лишь в § 108 мы рассмотрим некоторые вопросы, относящиеся к теории ферромагнетиков.

Заметим, что второе ограничение обозначает, в частности, что мы либо пренебрегаем зависимостью ε и μ от температуры,

либо ограничиваемся рассмотрением изотермических процессов. Мы будем считать в дальнейшем ε и μ не зависящими от температуры, что позволит нам пренебречь также выделением и поглощением тепла при поляризации и намагничении среды. Вместе с тем в этом приближении устраняется различие между свободной и «внутренней» энергией электромагнитного поля (§ 31 и 82). Как уже отмечалось, эффекты, связанные с выделением тепла в диэлектриках и магнетиках, в большинстве случаев играют совершенно второстепенную роль, так что их действительно можно не учитывать.

2. Система дифференциальных уравнений классической электродинамики, к изложению которой мы переходим, носит название *уравнений Максвелла*. Максвелл впервые сформулировал эти уравнения в шестидесятых годах прошлого столетия (в частности, он впервые ввел понятие тока смещения) и раскрыл их физический смысл. Впрочем, окончательная общепринятая ныне формулировка уравнений электродинамики принадлежит Герцу.

К основным уравнениям Максвелла принадлежит, прежде всего, уравнение (88.5), определяющее зависимость вихря магнитного поля от плотности токов проводимости и токов смещения:

$$\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{H}, \tag{I}$$

и уравнение (85.3), выражающее закон индукции электрического поля при изменении поля магнитного:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{II}$$

Из этих уравнений *вытекают* при некоторых добавочных предположениях два других уравнения, обыкновенно причисляемых к основным уравнениям поля. Так, в § 85 уже было показано, что из уравнения (II) следует независимость дивергенции вектора $\mathbf{B}$ от времени [уравнение (85.4)]. В остальном же вид функции $\operatorname{div}\mathbf{B} = f(x, y, z)$ при решении системы уравнений (I) и (II) остается неопределенным, так что функция эта играет роль *начальных* условий интегрирования. Полагая, что эта функция равна нулю во всех точках пространства, получим третье основное уравнение Максвелла

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{III}$$

совпадающее с уравнением (62.8).

Образовав дивергенцию от обеих частей уравнения (I) и приняв во внимание равенство нулю дивергенции вихря [уравнение (42_2^*)], получим (изменив порядок дифференцирования по пространственным координатам и по времени)

$$4\pi \operatorname{div}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{D} = 0.$$

Если обозначить $\operatorname{div}\mathbf{D}$ через $4\pi\rho$:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{IV}$$

то предшествующее уравнение примет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{IVa}$$

что совпадает по форме с уравнением непрерывности (87.1), выражающим собой закон сохранения количества электричества. Таким образом, *определяемую* уравнением (IV) величину ρ можно толковать как плотность электрических зарядов.

В фарадей-максвелловой теории величина ρ действительно носила характер вспомогательного *обозначения*, а понятие заряда — характер вспомогательного термина, ибо, с точки зрения фарадей-максвелловой концепции поля, электрические заряды представляют собой не особого рода субстанцию, а лишь «узлы» силовых линий поля, характеризующих деформацию упругого эфира, так что термин «электрический заряд» представляет собой лишь условное название истоков вектора $\mathbf{D}$, т. е. тех участков поля, в которых $\operatorname{div}\mathbf{D} \neq 0$. Рассмотрение этой вспомогательной величины оправдывается тем, что величина заряда, находящегося внутри проведенной в непроводящей среде замкнутой поверхности, не изменяется во времени, т. е. является первым интегралом уравнений поля.

К основным максвелловым уравнениям необходимо причислить также и соотношения, связывающие между собой значения основных векторов электромагнитного поля:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}). \tag{V}$$

Характеризующие свойства среды величины ε, μ и λ считаются при этом заданными функциями точки, от времени не зависящими, сторонние же электродвижущие силы $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ считаются заданными функциями точки и времени. Существование этих сил сказывается непосредственно лишь на плотности тока проводимости, а косвенно также и на распределении электрических зарядов. В частности, для установления электростатического равновесия ($\mathbf{j} = 0$) необходимо, чтобы в каждой точке проводников $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ уравновешивалось напряженностью $\mathbf{E}$ электростатического поля зарядов [см. уравнение (38.9)].

Заметим, что некоторые авторы принимают не только $\mathbf{j}$, но и $\mathbf{D}$ пропорциональным не $\mathbf{E}$, а $\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}$, т. е. вместо (V) полагают $\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}})$. Вопрос о правильности того или иного предположения может быть разрешен в каждом отдельном случае путем выяснения физической природы сторонних электродвижущих сил. В некоторых случаях $\mathbf{D}$, несомненно, от $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ не зависит (например, в растворах электролитов $\mathbf{D}$ не зависит от сторонних электродвижущих сил осмотического происхождения, см. *Abraham* //

Theorie d. Elektr. III Aufl. 1907. B. I. S. 257). Впрочем, практическое значение вопроса о зависимости или независимости вектора $\mathbf{D}$ от $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ весьма невелико.

3. Система уравнений электромагнитного поля (I)–(V) приобретет определенное физическое содержание лишь в том случае, если будет точно указано, в каких явлениях, доступных наблюдению и изучению на опыте, и каким именно образом проявляется существование электромагнитного поля, ибо человек лишен способности непосредственно воспринимать это поле (за исключением особых случаев, например поля световой волны). Мы можем узнать о том, что по данному проводнику протекает электрический ток лишь по тепловым (нагревание проводника), механическим (отклонение стрелки гальванометра) и тому подобным действиям этого тока; мы можем узнать, что данное тело заряжено лишь потому, что оно притягивает бузиновый шарик или порождает искру при приближении его к другому телу и т. п. Другими словами, мы можем заключить о существовании электромагнитного поля лишь по наблюдаемому нами при известных условиях возникновению или исчезновению доступных нашему восприятию форм энергии (например тепловой или механической). Руководствуясь принципом сохранения энергии, мы заключаем, что это возникновение или исчезновение известных нам форм энергии должно происходить за счет преобразования некоторой иной формы энергии, которую мы называем энергией электромагнитного поля W.

Таким образом, лишь в том случае, если мы постулируем определенную зависимость этой энергии W от напряженности поля — в теории Максвелла W полагается равным [ср. уравнение (30.4) и (81.3)]

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{DE}\,dV = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{BH}\,dV, \qquad \text{(VI)}$$

— лишь в этом случае *совокупность* уравнений (I)–(V) и (VI) (но не каждое из них порознь) станет доступной проверке на опыте, т. е. приобретает определенный физический смысл. Ибо уравнения (I)–(V) определяют изменения электромагнитного поля во времени, а уравнение (VI) позволяет определить те преобразования энергии, в которых эти изменения поля проявляются (см., например, § 92).

4. Обратимся теперь к вопросу о поверхностях разрыва сплошности векторов электромагнитного поля. В основе теории поля лежит допущение, что вне поверхности раздела различных сред и вне поверхностных электрических зарядов все электромагнитные векторы, а также и постоянные среды ε, μ и λ всюду конечны, непрерывны и обладают производными. Однако, например, поверхности раздела различных сред должны, вообще говоря,

являться *поверхностями разрыва* электромагнитных векторов, ибо векторы эти связаны между собой соотношениями (V), в которые входят величины ε, μ и λ, скачкообразно меняющиеся на поверхностях раздела. Чтобы система уравнений поля была *полной*, т. е. чтобы она давала возможность однозначно определить напряженность поля по начальным условиям, заданным для момента $t = 0$, необходимо дополнить эту систему *пограничными условиями*, которым должны удовлетворять слагающие электромагнитных векторов на поверхностях разрыва.

Для установления этих условий предположим сначала, что смежные среды с различными значениями величин ε, μ и λ разделяются переходным слоем конечной толщины, в котором значения этих величин изменяются *непрерывно*, и что объемная плотность электричества ρ и объемная плотность токов $\mathbf{j}$ всюду остаются конечными. Будем затем стремить к нулю толщину d этих переходных слоев, а также и слоев, заряженных и обтекаемых токами, и потребуем, как это мы уже неоднократно делали в предыдущем, чтобы уравнения поля (I)–(VI) оставались справедливыми в этих слоях и в предельном случае при $d = 0$. Этим требованием искомые пограничные условия определяются однозначно.

Действительно, на основании этого требования из уравнений (III) и (IV) получим, согласно уравнению (6.8), два граничных условия:

$$\operatorname{Div}\mathbf{B} = B_{2n} - B_{1n} = 0, \tag{III'}$$

$$\operatorname{Div}\mathbf{D} = D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \tag{IV'}$$

совпадающих с уравнениями (62.12) и (22.7). Из уравнения непрерывности (IVa), являющегося следствием уравнений (I) и (IV), получим аналогичным путем:

$$\operatorname{Div}\mathbf{j} = j_{2n} - j_{1n} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}, \tag{IV'a}$$

что совпадает с уравнением (87.2).

Далее, из уравнений (I) и (II) на основании уравнений (49.6) и (49.7) получим еще два граничных условия:

$$\operatorname{Rot}\mathbf{H} = [\mathbf{n}(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{I'}$$

$$\operatorname{Rot}\mathbf{E} = [\mathbf{n}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = 0, \tag{II'}$$

совпадающих с уравнениями (49.8) и (49.9) [1]. Последнее

[1] В левую часть формулы (I) наряду с объемной плотностью токов проводимости входит также и объемная плотность токов смещения. Однако поверхностная плотность токов смещения всегда равна нулю (если только производная по времени вектора электрической индукции и $\mathbf{D}$ имеет конечное значение) и поэтому в уравнение (I') не входит.

уравнение эквивалентно уравнению

$$E_{2t} = E_{1t}, \qquad (\text{II}'')$$

где под t можно понимать любое направление, касательное к поверхности разрыва [ср. уравнения (49.4) и (49.5)] Уравнение же (I′) может быть записано аналогичным образом лишь при отсутствии поверхностных электрических токов:

$$H_{2t} = H_{1t} \qquad (i = 0). \qquad (\text{I}'')$$

5. Помимо приведенных условий на поверхностях разрыва, необходимо также принять во внимание граничные условия в собственном смысле этого слова, ибо решение дифференциальных уравнений типа (I) и (II) однозначно определяется по начальным условиям для $t = 0$ лишь при условии задания (в функции от времени) значений некоторых из искомых функций точки (в нашем случае некоторых слагающих векторов поля) на границах рассматриваемой области пространства (§ 93) В каждом отдельном случае форма этих граничных условий всецело зависит от конкретных условий задачи. В частности, если в область рассмотрения включается все бесконечное пространство, то граничные условия приобретают характер условий в бесконечности.

В § 93 мы убедимся, что система максвелловых уравнений (I)–(V) совместно с перечисленными условиями на поверхностях разрыва и с надлежащими условиями в бесконечности есть система *полная*, т. е. что она позволяет *однозначно* определить электромагнитное поле в любой точке пространства и в любой момент времени по заданным для момента $t = 0$ начальным значениям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

6 Покажем в заключение, на основании каких наиболее общих допущений уравнения Максвелла могут быть получены из *микроскопических* уравнений электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H}_{\text{м}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}_{\text{м}}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{м}}, \quad & \operatorname{div}\mathbf{E}_{\text{м}} &= 4\pi\rho_{\text{м}}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E}_{\text{м}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}_{\text{м}}}{\partial t} &= 0, & \operatorname{div}\mathbf{H}_{\text{м}} &= 0, \end{aligned} \qquad (91\ 1)$$

где индекс м означает микроскопическое значение соответствующей величины

Усредняя (91 1) по физически бесконечно малым объемам, как мы это делали, например, в § 26 и 62, используя соотношения типа (25 2) и вводя обозначения [ср уравнение (62 6)]

$$\overline{\mathbf{E}}_{\text{м}} = \mathbf{E}, \quad \overline{\mathbf{H}}_{\text{м}} = \mathbf{B}, \qquad (91\ 2)$$

получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\bar{\mathbf{j}}_{\text{м}}, \quad & \operatorname{div}\mathbf{E} &= 4\pi\rho_{\text{м}}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, & \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \qquad (91\ 3)$$

Третье из этих уравнений совпадает с (II) Чтобы получить второе из двух основных уравнений Максвелла — уравнение (I), — необходимо допустить,

что в *однородной и изотропной* среде средняя плотность микроскопических токов $\bar{\mathbf{j}}_м$ является *линейной* функцией векторов поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и их *первых* пространственных и временных производных Самое общее выражение для $\bar{\mathbf{j}}_м$, совместимое с этим допущением, может быть записано в виде

$$\bar{\mathbf{j}}_м = \lambda\mathbf{E} + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{c(\mu - 1)}{4\pi\mu}\operatorname{rot}\mathbf{B}, \qquad (91\ 4)$$

где λ, ε и μ суть произвольные скаляры Действительно, в выражение для $\bar{\mathbf{j}}_м$ не могут входить $\mathbf{B}$, $\partial\mathbf{B}/\partial t$ и $\operatorname{rot}\mathbf{E}$, ибо эти величины являются *аксиальными* векторами, тогда как $\bar{\mathbf{j}}_м$ (также, как $\mathbf{E}$, $\partial\mathbf{E}/\partial t$ и $\operatorname{rot}\mathbf{B}$) суть векторы *полярные* (см приложение «Векторный анализ», с 575, примечание) Перечисленными векторами исчерпываются все линейные вектор-функции векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и их первых производных, свойства же однородной и изотропной среды могут характеризоваться только скалярами [1])

Внеся (91 4) в первое из уравнений (91 3), приняв во внимание предполагаемую независимость характеристик среды ε и μ от координат и времени и произведя перегруппировку членов, получаем

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{B}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\lambda\mathbf{E}$$

Вводя, наконец, соответственно (V) *обозначения*

$$\frac{1}{\mu}\mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad \varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{D}, \quad \lambda\mathbf{E} = \mathbf{j},$$

получаем уравнение Максвелла (I)

Что же касается уравнения (IV), то, как указывалось, его можно считать *определением* величины ρ

Таким образом, указанные допущения действительно достаточны (и необходимы) для получения из микроскопических уравнений (91 1) системы дифференциальных уравнений Максвелла и соотношений (V) Если же отказаться от *линейных* соотношений (V) между $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{j}$, то дифференциальные уравнения Максвелла могут быть получены из гораздо более общих допущений (ср § 110)

§ 92. Теорема Пойнтинга. Поток энергии

1. Выразив энергию электромагнитного поля в форме объемного интеграла (VI), мы тем самым, как уже неоднократно упоминалось, получаем возможность *истолковать* это выражение в том смысле, что энергия поля вполне определенным образом *локализована* в пространстве, причем объемная плотность энергии в произвольном месте поля определяется выражением

$$w = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{DE} + \mathbf{BH}) = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2 + \mu H^2). \qquad (\text{VIa})$$

В § 109 мы покажем, что такое истолкование является не только возможным, но и необходимым; пока же мы примем это

[1]) Сделанное нами предположение об однородности и изотропии среды исключает наличие сторонних электродвижущих сил $\mathbf{E}^{стр}$, ибо характеризующий среду вектор $\mathbf{E}^{стр}$ выделяет определенное направление в пространстве

утверждение на веру и рассмотрим изменение во времени количества энергии W, находящегося внутри объема V, ограниченного некоторой неподвижной поверхностью S:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{8\pi}\int_V (\mathbf{DE}+\mathbf{BH})\,dV\right\} = \int_V \frac{\partial w}{\partial t}\,dV.$$

Ввиду предполагаемой независимости ε и μ от времени

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right).$$

Внося сюда значения $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ из (I) и (II), получаем с помощью уравнения (44*):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{jE} + \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}) = -\mathbf{jE} - \frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\mathbf{EH}].$$

Внося это в выражение для $\partial W/\partial t$ и воспользовавшись теоремой Гаусса (17*), получаем окончательно [1]):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int_V \mathbf{jE}\,dV - \frac{c}{4\pi}\oint_S [\mathbf{EH}]_n\,dS. \tag{92.1}$$

В том случае, если поверхность S заключает в себе *полное поле*, поверхностный интеграл обращается в нуль, и (92.1) принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int \mathbf{jE}\,dV. \tag{92.2}$$

Это уравнение означает, что при предполагаемой неподвижности всех находящихся в поле материальных тел энергия поля W расходуется только на работу, совершаемую электрическим полем $\mathbf{E}$ над токами проводимости $\mathbf{j}$ и определяемую правой частью уравнения (92.2). Исключив из этого выражения вектор $\mathbf{E}$, с помощью уравнения (V) получаем

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int \mathbf{jE}^{\text{стр}}\,dV - \int \frac{j^2}{\lambda}\,dV = P - Q, \tag{92.3}$$

[1]) Если внутри объема V имеются поверхности разрыва S' векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, то последний интеграл в (92.1) должен быть распространен не только на внешнюю поверхность S объема V, но и на эти поверхности разрыва. Воспользовавшись граничными условиями (I′) и (II′), нетрудно показать, что путем простых преобразований соответствующие дополнительные члены в уравнениях (92.1) и (92.2) могут быть представлены в виде интеграла

$$-\int_{S'} \mathbf{iE}\,d\mathbf{S}.$$

Таким образом, эти дополнительные члены равны взятой с обратным знаком работе, совершаемой электрическим полем $\mathbf{E}$ над *поверхностными* токами проводимости $\mathbf{i}$.

где

$$P = \int \mathbf{j}\mathbf{E}^{\text{стр}}\, dV \quad \text{и} \quad Q = \int \frac{j^2}{\lambda}\, dV. \tag{92.4}$$

Величина P равна, очевидно, работе, совершаемой сторонними электродвижущими силами в единицу времени, над токами проводимости $\mathbf{j}$ [ср. P со вторым членом формулы (39.1), выражающим работу сторонних ЭДС в линейном проводнике], тогда как Q совпадает с выражением для джоулева тепла, выделяемого токами проводимости в единицу времени [ибо, согласно (39.5), джоулево тепло, выделяемое в единице объема проводника в единицу времени, равно $q = j^2/\lambda$].

Таким образом, уравнение (92.3) выражает собой *закон сохранения энергии*: общее приращение электромагнитной энергии (при предполагаемой неподвижности материальных тел) равно избытку работы сторонних электродвижущих сил (химического, термического и тому подобного происхождения) над выделением джоулева тепла [согласно исходному предположению (с. 428), все тела неподвижны, так что механическая работа равна нулю]. Вместе с тем мы убеждаемся, что в отличие от токов проводимости *токи смещения никакого тепла не выделяют* и сторонние электродвижущие силы при их прохождении работы не совершают, ибо в выражения для Q и P входит только плотность токов проводимости, но не токов смещения [1]. Вычислив с помощью максвелловых уравнений для какого-либо процесса изменение электромагнитной энергии W и работу P сторонних электродвижущих сил, мы на основании формулы (92.3) можем определить выделяемое при этом процессе джоулево тепло Q. Эта величина Q доступна непосредственному измерению, что дает возможность проверить правильность теории.

2. Рассмотрим теперь тот случай, когда поверхностный интеграл в формуле (92.1) не исчезает, т. е. когда поверхность S не обнимает собой полного поля.

Введем обозначение

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}] \tag{92.5}$$

и воспользуемся обозначениями (92.4). Тогда уравнение (92.1) примет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = P - Q - \oint_S S_n\, dS, \tag{92.6}$$

причем в данном случае величины W, P и Q будут, очевидно, относиться не к полному полю, как раньше, а лишь к той его

[1]) Возможность выделения тепла при поляризации и намагничении среды (в случае зависимости ε и μ от температуры) нами в этой главе не учитывается

области V, которая ограничена поверхностью S. В этом случае, как явствует из уравнения (92.6), изменение электромагнитной энергии в объеме V зависит не только от выделяемой в этом объеме теплоты Q и от работы P сторонних электродвижущих сил в этом объеме, но и от расположения граничной поверхности S и от значения вектора $\mathbf{S}$ на ней.

Исходя из представления о локализации электромагнитной энергии в пространстве, мы должны на основании этого обстоятельства заключить, что *электромагнитная энергия вытекает через поверхность* S из рассматриваемого объема V наружу и притом *в количестве* $\oint S_n\, dS$ *единиц энергии* (эргов) *в секунду*. Это положение носит название *теоремы Пойнтинга*, а вектор $\mathbf{S}$ называется *вектором Пойнтинга*.

Детализируя далее это положение, относящееся к *замкнутым* поверхностям, *можно* истолковать его в том смысле, что *в каждой точке поля поток электромагнитной энергии* (т. е. количество энергии, протекающее в единицу времени через перпендикулярную к направлению потока единицу поверхности) *равен* по величине и направлению *вектору Пойнтинга* $\mathbf{S}$. Это последнее предположение вовсе не обязательно, ибо, как показывает внимательный анализ возможных физических экспериментов, непосредственная проверка на опыте возможна лишь в отношении теоремы Пойнтинга в ее *интегральной* форме, применимой к *замкнутым* поверхностям [1]).

Однако мы все же будем отождествлять вектор Пойнтинга с потоком энергии в данной точке поля, во-первых, потому, что эта интерпретация вектора Пойнтинга приводит к ряду весьма простых и наглядных соотношений [2]), и, во-вторых, потому, что она непосредственно вытекает из релятивистской теории электромагнитного поля.

Отметим, что формулировка закона сохранения энергии с помощью понятия потока энергии [уравнение типа (92.6)] была впервые дана в общей форме Н.А. Умовым еще в 1874 г.

3. В поле постоянных токов напряженность электромагнитного поля, а стало быть, и его энергия остаются постоянными, так что работа сторонних электродвижущих сил полностью переходит в тепло [уравнение (39.7)].

---

[1]) Если положить поток энергии равным $\mathbf{S} + \operatorname{rot} \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ есть произвольный вектор, то при интегрировании по любой замкнутой поверхности интеграл второго члена обратится в нуль [уравнение (28*)], так что общий поток энергии через эту поверхность останется равным $\oint\limits_S \mathbf{S}_n\, dS$

[2]) Например, к равенству скорости течения энергии и скорости распространения носителей этой энергии — электромагнитных волн (см. § 100, а также § 103 и 104)

Однако работа эта совершается лишь в тех участках цепи, где $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ отлично от нуля, тогда как джоулево тепло выделяется во всех участках цепи. Нетрудно убедиться, что энергия, затрачиваемая источниками сторонних электродвижущих сил, совершает при этом свой путь до места потребления (т. е. выделения в форме тепла) в качестве энергии электромагнитной.

Рассмотрим с этой целью участок цилиндрического однородного провода длины l, ограниченный двумя сечениями, перпендикулярными к его оси (рис. 79). Пусть r есть радиус провода, $\sigma = \pi r^2$ — его сечение, $V = l\sigma$ — объем рассматриваемого участка, наконец J — сила тока в проводе. Предположим, что магнитное поле вблизи провода с достаточной точностью совпадает с полем бесконечного прямолинейного тока той же силы. Тогда на поверхности провода (см. с. 220, задача 30)

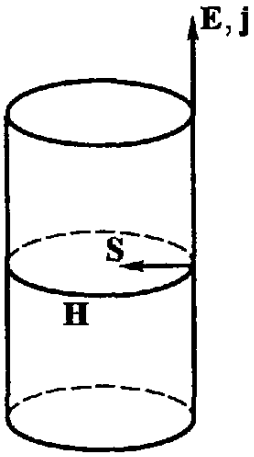

Рис. 79

$$H = \frac{2J}{cr} = \frac{2j\sigma}{cr} = \frac{2\pi rj}{c},$$

причем магнитные силовые линии представляют собой концентрические току окружности.

Предположим сначала, что в рассматриваемом участке провода $\mathbf{E}^{\text{стр}} = 0$. Электрический вектор $\mathbf{E}$ направлен в этом случае по направлению тока и равен $\mathbf{j}/\lambda$ [уравнение (V)]. Следовательно, на поверхности провода, ввиду перпендикулярности векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{H}$,

$$|\mathbf{S}| = \left|\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]\right| = \frac{c}{4\pi\lambda}|[\mathbf{jH}]| = \frac{c}{4\pi\lambda}jH = \frac{j^2 r}{2\lambda},$$

причем, согласно правилу буравчика, $\mathbf{S}$ направлено по внутренней нормали к поверхности провода (см. рис. 79). Стало быть, в этом случае через внешнюю поверхность проводника энергия *втекает* в проводник из окружающего пространства в количестве

$$\oint S_n\, dS = |\mathbf{S}| \cdot 2\pi rl = \frac{j^2}{\lambda}\pi r^2 l = \frac{j^2}{\lambda}V \text{ эрг/с},$$

где V есть объем рассматриваемого участка проводника (через основания цилиндра энергия не протекает, ибо $\mathbf{S}$ касательно к этим основаниям). Это количество энергии, как и следовало ожидать, равно джоулеву теплу Q, выделяемому в этом участке за 1 с [уравнение (39.5)].

Итак, в тех участках проводника, в которых $\mathbf{E}^{\text{стр}} = 0$, выделяемая током тепловая энергия притекает в проводник из окружающего его пространства. В это пространство она должна, очевидно, поступать из тех участков провода, в которых совершается работа сторонних электродвижущих сил. Действительно, если

$\mathbf{E}^{\text{стр}} \neq 0$, согласно уравнению (V)

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\lambda} - \mathbf{E}^{\text{стр}}$$

и

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] = \frac{c}{4\pi\lambda}[\mathbf{jH}] - \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}^{\text{стр}}\mathbf{H}].$$

Первый член правой части представляет собой, по доказанному, поток энергии, направленный внутрь провода; второй член снабжен отрицательным знаком и имеет поэтому обратное направление (ибо $\mathbf{E}^{\text{стр}}$, вообще говоря, параллельно $\mathbf{j}$) [1], т. е. представляет собой поток энергии, *вытекающей* из провода через его боковую поверхность. Легко убедиться, что в случае постоянного тока вся эта вытекающая из проводника энергия возвращается в другие участки проводника с тем, чтобы выделиться в них в форме тепла.

4. В случае квазистационарных переменных токов имеют место аналогичные соотношения. Так, например, при выключении источника электродвижущей силы (аккумулятора) из цепи тока в ней продолжает некоторое время циркулировать ток размыкания. Как мы убедились в § 80 (пример 1), выделение джоулева тепла этим током происходит за счет постепенного уменьшения энергии магнитного поля тока, притекающей в проводник из окружающего пространства; при этом уменьшается также и количество магнитной энергии, заключенной внутри проводника.

В § 79 и 80 мы не учитывали изменения энергии окружающего ток *электрического поля*. В случае квазистационарных токов в замкнутых проводниках энергия эта, вообще говоря, настолько мала по сравнению с магнитной энергией тока, что ею действительно можно пренебречь. Если же в цепь квазистационарного тока включен, например, конденсатор, то запасенная в его поле электрическая энергия оказывается сравнимой с магнитной энергией тока и пренебречь ею становится невозможным (§ 89).

Вообще говоря, можно сказать, что в проводнике, по которому циркулирует ток, происходит, в сущности, превращение электромагнитной энергии в тепло; локализована же эта энергия преимущественно во внешнем окружающем проводник пространстве и поступает в проводник через его внешнюю поверхность. С особенной отчетливостью проявляется это в быстропеременных токах. При очень быстрых изменениях поля его энергия не успевает достигнуть внутренних слоев проводника и подвергается превращению в джоулево тепло лишь в поверхностных слоях

[1]) За исключением тех участков проводника, в которых сторонние электродвижущие силы совершают отрицательную работу за счет положительной работы, совершаемой этими силами в других участках проводника. Во всяком случае, в стационарном поле направление циркуляции сторонних электродвижущих сил $\mathscr{E}_{\text{стр}}$ по контуру тока совпадает с направлением тока J.

проводника, в которых и сосредоточиваются переменные токи — *скин-эффект* (§ 90).

5. В заключение заметим, что предположение о равенстве в каждой точке пространства потока энергии электромагнитного поля вектору Пойнтинга в некоторых случаях ведет к следствиям, которые могут показаться лишенными физического смысла. Так, например, в постоянном поле, возбуждаемом неподвижным электрическим зарядом и неподвижным постоянным магнитом, вектор Пойнтинга, вообще говоря, отличен от нуля, причем линии этого вектора замкнуты (либо заполняют собой некоторую поверхность). Таким образом, мы приходим к, казалось бы, бессодержательному представлению о беспрерывной циркуляции энергии по замкнутым путям в *статическом* электромагнитном поле. Физический смысл этого представления выяснится в § 104.

§ 93. Однозначность решений уравнений Максвелла

1. Установив в § 91 систему основных максвелловых уравнений, мы указали, что эта система *полна*, т. е. что электромагнитное поле в каждой точке пространства и в каждый момент времени *однозначно* определяется этой системой, если только для момента $t = 0$ заданы начальные значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ во всех точках пространства. Впрочем, эта формулировка «теоремы однозначности» не вполне точна. Мы не можем определить напряженность поля *во всем* бесконечном пространстве, — нашему наблюдению доступна лишь ограниченная его часть. Поэтому теорема однозначности приобретает непосредственный физический смысл лишь в том случае, если мы ограничимся некоторым конечным участком пространства и дополним условия, определяющие решения максвелловых уравнений, определенными *граничными условиями* на границах этого участка.

2. Мы докажем сначала теорему однозначности в следующей формулировке: электромагнитное поле в любой момент времени $t_1 > 0$ в любой точке объема V, ограниченного произвольной замкнутой поверхностью S, однозначно определяется уравнениями Максвелла, если заданы начальные значения электромагнитных векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ во всем этом участке пространства для момента $t = 0$ и если, кроме того, *для одного из этих векторов* (например $\mathbf{E}$) *известны граничные значения его тангенциальных слагающих на поверхности S в течение всего промежутка времени от $t = 0$ до $t = t_1$* [1].

[1]) Напомним при этом, что, согласно основному допущению, лежащему в основе всех рассуждений этой главы, значения ε, μ и λ считаются заданными функциями точки, от времени не зависящими, а $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ считается известной функцией точки и времени.

Предположим противное, т. е. предположим, что существуют две различные системы решений максвелловых уравнений $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}''$, удовлетворяющие одним и тем же начальным и граничным условиям. Ввиду линейности уравнений поля разность этих решений $\mathbf{E}''' = \mathbf{E}' - \mathbf{E}''$ и $\mathbf{H}''' = \mathbf{H}' - \mathbf{H}''$ также должна удовлетворять уравнениям Максвелла при следующих дополнительных условиях: а) $\mathbf{E}^{\text{стр}} = 0$ [1]); б) в момент $t = 0$ во всех точках объема V: $\mathbf{E}''' = \mathbf{H}''' = 0$ (ибо при $t = 0$ $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$ и $\mathbf{H}'$, $\mathbf{H}''$ имеют, по предположению, одинаковые заданные значения); в) в течение всего промежутка времени от $t = 0$ до $t = t_1$ во всех точках поверхности S тангенциальные слагающие вектора $\mathbf{E}'''$ либо вектора $\mathbf{H}'''$ равны нулю (по той же причине).

Применим к этому полю $\mathbf{E}'''$, $\mathbf{H}'''$ вытекающую из максвелловых уравнений теорему Пойнтинга [уравнение (92.6)], положив в ней, согласно сказанному, работу сторонних сил P равной нулю. Входящий в уравнение (92.6) поверхностный интеграл будет равен нулю в течение всего промежутка времени от $t = 0$ до $t = t_1$, ибо из условия (в) следует, что на поверхности S

$$S_n = [\mathbf{E}'''\mathbf{H}''']_n = 0;$$

стало быть, в любой момент этого промежутка

$$\frac{\partial W'''}{\partial t} = -Q''' = -\int \frac{\mathbf{j}'''^2}{\lambda}\, dV. \tag{93.1}$$

Так как подынтегральное выражение существенно положительно, то $\partial W'''/\partial t \leqslant 0$, т. е. энергия поля W''' может либо убывать, либо (при $\mathbf{j}'''$ равном повсюду нулю) оставаться постоянной. Но при $t = 0$, согласно условию (в), энергия W''' поля $\mathbf{E}'''$, $\mathbf{H}'''$ равнялась нулю; отрицательных же значений она принимать не может; стало быть, и в течение всего рассматриваемого промежутка $0 \leqslant t \leqslant t_1$ энергия

$$W''' = \frac{1}{8\pi}\int_V (\varepsilon \mathbf{E}'''^2 + \mu \mathbf{H}'''^2)\, dV$$

должна оставаться равной нулю, что может иметь место лишь в том случае, если $\mathbf{E}'''$ и $\mathbf{H}'''$ остаются равными нулю во всех точках объема V. А это значит, что две системы решений исходной задачи $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}''$, предполагавшиеся нами различными, по необходимости тождественны между собой. Таким образом, теорема однозначности доказана.

3. Легко убедиться, что при рассмотрении всего безграничного пространства задание значений векторов поля на границ-

[1]) Ибо из $\mathbf{J}' = \lambda(\mathbf{E}' + \mathbf{E}^{\text{стр}})$ и $\mathbf{J}'' = \lambda(\mathbf{E}'' + \mathbf{E}^{\text{стр}})$ следует: $\mathbf{J}''' = \mathbf{J}' - \mathbf{J}'' = \lambda\mathbf{E}'''$.

ной поверхности S может быть заменено наложением следующих условий в бесконечности:

$$ER^2 \text{ и } HR^2 \text{ при } R \to \infty \text{ остаются конечными.} \qquad (93.2)$$

Действительно, из условий (93.2) следует, что интеграл вектора Пойнтинга по бесконечно удаленной поверхности обращается в нуль. Это обстоятельство позволяет доказать, исходя из уравнения (92.6), применимость уравнения (93.1) ко всему бесконечному пространству. Из уравнения же (93.1), как мы видели, следует однозначность решений уравнения поля.

Условия (93.2) совпадают с прежними уравнениями (12.10) и (49.10); в случае постоянного поля они являются выражением того факта, что если все возбуждающие поле заряды и токи расположены в ограниченной области пространства V, то напряженность поля в бесконечности должна убывать не медленнее, чем обратно пропорционально квадрату расстояния R от произвольно выбранной в V начальной точки отсчета.

Однако условия (93.2), которыми можно пользоваться в случае постоянного поля, *неприменимы к полю переменному.* Так, например, в § 99 мы убедимся, что поле излучения осциллятора убывает в бесконечности обратно пропорционально *первой*, а не второй степени расстояния R. В этом случае поток вектора Пойнтинга через бесконечно удаленную поверхность не исчезает, а равняется вполне определенной конечной величине [1].

Впрочем, при рассмотрении поля излучения часто можно ограничиться задачами следующего типа. Допустим, что вплоть до момента времени $t = 0$ поле вне некоторой конечной области пространства равнялось нулю либо было стационарным и удовлетворяло условиям (93.2). Затем за промежуток времени τ от момента $t = 0$ до момента $t = \tau$ происходили какие-либо пертурбации, перемещение тел, замыкания и размыкания цепей тока, включение переменных сторонних ЭДС $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ и т. п.; с момента же времени $t = \tau$ величины ε, μ и λ во всех точках поля вновь приобрели постоянные значения.

Как мы убедимся в § 97, возмущения электромагнитного поля распространяются со скоростью света c. Поэтому если все заряды и токи сосредоточены внутри сферы конечного радиуса R_0, то вне сферы S радиуса $R_0 + ct$ поле сохранит невозмущенное значение вплоть до момента t, т. е. будет удовлетворять условиям (93.2). Таким образом, в этом случае на основании доказанного поле в любой момент времени $t > \tau$ однозначно определяется

[1] Для исчезновения потока вектора Пойнтинга через бесконечно удаленную поверхность условия (93 2) достаточны, но не необходимы. Поток этот исчезает и при гораздо менее жестком условии, чтобы произведение $[\mathbf{EH}]$ убывало при $R \to \infty$ быстрее, чем $1/R^2$ Однако в поле осциллятора и это условие не выполняется.

заданием начальных значений векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ во всех точках пространства для момента времени t_0, удовлетворяющего неравенству $\tau \leqslant t_0 < t$ (ср. конец § 96) [1].

§ 94. Дифференциальные уравнения для потенциалов электромагнитного поля

1. Убедившись в однозначности максвелловых уравнений, мы должны попытаться найти способ фактического решения этих уравнений. В случае стационарного электромагнитного поля задача эта, как мы видели, существенно облегчается введением вспомогательных величин — потенциалов φ и $\mathbf{A}$. Теперь мы покажем, что, видоизменив надлежащим образом определение скалярного и векторного потенциалов, можно воспользоваться этими потенциалами для решений уравнений Максвелла и в общем случае переменного поля. При этом мы для простоты предположим, что как *диэлектрическая* ε, *так и магнитная* μ *проницаемости одинаковы на всем протяжении полного поля* [2] и что поверхностных зарядов и поверхностных токов в поле нет. При этих условиях векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и их первые производные всюду остаются непрерывными.

В качестве определения вектор-потенциала $\mathbf{A}$ мы можем сохранить уравнение (62.10):

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{94.1}$$

из которого в свою очередь, согласно уравнению (42_2^*), следует уравнение (III). Внося уравнение (94.1) в уравнение (II), получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right),$$

или

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

[1] Заметим, что результаты этого параграфа существенно связаны с предположением, что все электрические токи сводятся к токам проводимости, плотность которых $\mathbf{j}$, согласно (V), однозначно определяется заданием λ, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}^{\text{стр}}$. Если же ввести в рассмотрение, например, также и токи, создаваемые движением свободных электронов в вакууме (например, в катодной лампе или в рентгеновской трубке), то для определения поля по начальным условиям необходимо, очевидно, дополнить систему максвелловых уравнений *поля* уравнениями *механики*, т. е. уравнениями движения электронов

[2] Результаты последующих параграфов легко обобщаются на случай наличия скачкообразного изменения ε и μ на отдельных поверхностях раздела различных сред Однако в общем случае произвольной зависимости ε и μ от координат точки задача решения максвелловых уравнений чрезвычайно усложняется

Это уравнение будет удовлетворено, если положить

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \tag{94.2}$$

где φ есть произвольный скаляр, ибо ротор градиента скаляра тождественно равен нулю (42_1^*).

На основании уравнений (94.1), (94.2) и (42_3^*) уравнение (I)

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

принимает вид

$$\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{\mu}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}) = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{\varepsilon}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Распорядившись надлежащим образом величинами $\mathbf{A}$ и φ, можно это уравнение упростить.

Действительно, до сих пор нами были определены только вихрь от $\mathbf{A}$ и градиент от φ, теперь же мы можем дополнительно потребовать, чтобы [1])

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = -\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{94.3}$$

Образовав градиент от обеих частей этого равенства, убедимся, что два члена предшествующего уравнения взаимно сокращаются, так что оно принимает вид

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}. \tag{94.4}$$

Из основных уравнений поля нам остается еще удовлетворить уравнению (IV). Внося в него уравнение (94.2), получим

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \varepsilon\operatorname{div}\mathbf{E} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} - \varepsilon\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 4\pi\rho.$$

Разделив это равенство на ε и внеся в него значение $\operatorname{div}\mathbf{A}$ из уравнения (94.3), получим

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho,$$

или на основании (40*)

$$\nabla^2\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho. \tag{94.5}$$

2. Уравнения (94.3)–(94.5) дают возможность определить значения скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля по заданному распределению зарядов и токов проводимости; зная же φ и $\mathbf{A}$, можно с помощью уравнений (94.1) и (94.2)

[1]) Степень произвола в определении потенциалов φ и $\mathbf{A}$ при заданных напряженностях поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ будет выяснена в конце § 96

найти $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Заметим при этом, что хотя скалярный потенциал φ, как и в случае стационарных полей, зависит лишь от распределения зарядов, а векторный потенциал $\mathbf{A}$ — от распределения токов проводимости, однако напряженность электрического поля зависит не только от градиента скалярного потенциала, но и от производной по времени векторного потенциала; в этом обстоятельстве проявляется закон электромагнитной индукции. В случае стационарности поля, когда все производные по времени обращаются в нуль, приведенные уравнения, как и следовало ожидать, принимают вид ранее установленных нами уравнений стационарного поля [ср. соответственно уравнения (94.2), (94.3), (94.4) и (94.5) с уравнениями (10.2), (64.2), (64.3) и (23.1)].

Итак, зная ρ и $\mathbf{j}$ в их зависимости от координат и времени, мы можем определить сначала φ и $\mathbf{A}$, а затем и $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Однако, как уже указывалось в § 91 (с. 423), понятие электрического заряда носит в классической теории поля, в сущности, характер вспомогательного термина, обозначающего истоки вектора электрической индукции $\mathbf{D}$. Иными словами, с точки зрения этой теории, ρ и $\mathbf{j}$ нужно, в сущности, считать функциями искомых величин $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, т. е. в свою очередь величинами искомыми. И действительно, согласно теореме однозначности, для определения значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в любой момент времени достаточно знать начальные значения этих векторов для $t = 0$; определив же $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, мы, очевидно, можем *вычислить* значения величин ρ и $\mathbf{j}$ для любого момента времени и любого места.

Однако фактическое решение этой «полной» задачи, вообще говоря, в высшей степени сложно. Поэтому мы в дальнейшем предположим, что зависимость ρ и $\mathbf{j}$ от координат и времени нам тем или иным способом стала известной для всего пространства [1]. В этом случае, пользуясь установленной в этом параграфе системой уравнений, мы действительно можем определить напряженность электромагнитного поля в любой точке пространства и в любой момент времени и притом определить *однозначно*, если только мы примем во внимание некоторые добавочные условия, о которых будет сказано в § 96.

Основная задача сводится при этом к решению определяющей значения потенциалов системы уравнений (94.3)–(94.5), ибо, определив φ и $\mathbf{A}$, мы найдем $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ простым дифференцированием.

---

[1] В сущности, помимо *начального* для момента $t = 0$ распределения зарядов ρ, достаточно знать лишь $\mathbf{j}$ в функции координат и времени, ибо по этим данным значение ρ в каждой точке пространства может быть определено для любого момента времени с помощью уравнения непрерывности (IVa). Из этого явствует, между прочим, что $\mathbf{j}$ и ρ не являются независимыми функциями времени и поэтому не могут задаваться независимо друг от друга.

3. Как скалярный потенциал φ, так и каждая из слагающих A_x, A_y, A_z векторного потенциала в произвольной системе декартовых координат удовлетворяют, согласно уравнениям (94.4) и (94.5), уравнению типа

$$\nabla^2 s - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -4\pi\chi(x, y, z, t), \tag{94.6}$$

где $\chi(x, y, z, t)$ есть, по предположению, известная функция координат и времени, а под s надо понимать одну из величин φ, A_x, A_y, A_z.

Введя обозначение

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{94.7}$$

можно записать уравнение (94.6) следующим образом:

$$\nabla^2 s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -4\pi\chi. \tag{94.8}$$

В дальнейшем мы убедимся, что v равно скорости распространения электромагнитных возмущений.

Уравнения типа (94.8) носят название *уравнений Даламбера*. При $\chi = 0$ уравнение Даламбера принимает вид так называемого *волнового уравнения*

$$\nabla^2 s = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \tag{94.9}$$

с которым нам неоднократно придется иметь дело в дальнейшем. Наконец, при независимости s от времени (стационарное поле) уравнение Даламбера вырождается в известное нам *уравнение Пуассона* (11.3)

$$\nabla^2 s = -4\pi\chi(x, y, z).$$

§ 95. Решение волнового уравнения и уравнения Даламбера

1. Мы не станем здесь излагать классических, вполне строгих с математической точки зрения способов решения этих уравнений [1]), а воспользуемся гораздо более простыми рассуждениями, не отличающимися, правда, особой математической строгостью и носящими, в сущности, лишь наводящий характер. Проверив, однако, найденное решение подстановкой его в исходные уравнения и доказав однозначность этих решений, мы тем самым сообщим этому решению полную достоверность.

[1]) Их можно найти в любом классическом курсе электричества (см., например: *Лоренц.* Теория электронов. — М.: Гостехиздат, 1953); см. также *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.: Наука, 1960; см. также примечание к с. 61. (*Примеч. ред.*)

Чтобы найти решение уравнения Даламбера (94.8), предположим сначала, что χ при любом t равно нулю во всех точках поля, за исключением лишь исчезающе малой области вокруг некоторой точки Q, в которой χ равно заданной функции времени $\chi(t)$. Для краткости мы будем при этом говорить, что χ отлично от нуля лишь в самой точке Q, которую можно называть *истоком* поля. Таким образом, вне этой точки s должно удовлетворять волновому уравнению (94.9).

Поставим себе, прежде всего, задачу найти *сферически-симметричное* решение этого волнового уравнения, т. е. такое его решение, которое в полярной системе координат, имеющей центр в Q, зависит лишь от радиуса-вектора R, но не от полярного и долготного углов ϑ и α. В этом случае $\nabla^2 s = \operatorname{div}\operatorname{grad} s$ определяется уравнением вида (21*), так что волновое уравнение (94.9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 s}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial s}{\partial R} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Умножая его на R, получим

$$R\frac{\partial^2 s}{\partial R^2} + 2\frac{\partial s}{\partial R} = \frac{\partial^2 (Rs)}{\partial R^2} = \frac{R}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (Rs)}{\partial t^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} = \frac{1}{v}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{95.1}$$

где нами временно введено обозначение $u = Rs$.

Общий интеграл уравнения (95.1) имеет, как известно, вид

$$Rs = u = f\left(t - \frac{R}{v}\right) + \phi\left(t + \frac{R}{v}\right), \tag{95.2}$$

где f и ϕ суть произвольные (но обладающие производными) функции указанных в скобках аргументов [1]).

---

[1]) В том, что (95.2) удовлетворяет уравнению (95.1), можно убедиться непосредственной подстановкой. Для того же чтобы показать, что *всякое* решение уравнения (95.1) должно иметь вид (95.2), введем вместо t и R новые переменные ζ и η: $\zeta = t - R/v$, $\eta = t + R/v$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

аналогично этому $\dfrac{\partial^2 u}{\partial R^2} = \dfrac{1}{v^2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \zeta\,\partial \eta} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$.

Внося эти выражения в (95.1), получим $-\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \zeta} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \zeta}$, откуда $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \zeta} = 0$. Это значит, что в общем случае u может состоять из двух слагаемых, каждая из которых является произвольной функцией лишь *одного* из независимых переменных ζ и η. Уравнение (95.2) представляет собой математическую формулировку этого вывода.

2. Легко убедиться, что первый член этого выражения представляет собой шаровую волну, распространяющуюся из центра координат Q со скоростью v. Действительно, функция $f(t-R/v)$ имеет в каждый данный момент t на каждом данном расстоянии R от точки Q то же значение, которым она обладала в момент $t-1$, на расстоянии $R-v$ от Q (ибо $t-1-(R-v)/v = t-R/v$). А это и значит, что значения величины u распространяются из точки источника поля Q в виде шаровой волны скорости v.

Подобным же образом можно убедиться, что второй член выражения (95.2) представляет собой шаровую волну той же скорости v, *приходящую из бесконечности* и сходящуюся в истоке поля Q, как в фокусе.

В этом параграфе и в первой половине следующего мы ограничимся рассмотрением первого члена общего решения (95.2), т. е. положим

$$s = \frac{u}{R} = \frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{v}\right); \tag{95.3}$$

вопрос же о том, в каких случаях целесообразно вводить в рассмотрение второй член этого общего решения, будет обсужден во второй половине § 96.

Если в соответствии с § 94 понимать под s потенциал (скалярный или векторный) электромагнитного поля, то под определяемой уравнением (95.3) величиной s нужно понимать потенциал поля, *возбуждаемый* зарядом или током, находящимся в точке Q. Согласно (95.3) значения потенциала зарядов и токов, находящихся в Q, распространяются из этой точки в форме шаровой волны скорости v, амплитуда которой убывает обратно пропорционально расстоянию.

3. Формула (95.3) не может быть справедливой во всех точках пространства, ибо при $R = 0$ она обращается в бесконечность, т. е. теряет смысл. Кроме того, при $\chi \neq 0$ искомая функция должна удовлетворять не волновому уравнению, а уравнению Даламбера.

Чтобы найти решение этого уравнения, вспомним решение аналогичной проблемы электростатики. Вне электрических зарядов электростатический потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$, сферически-симметрическое решение которого $\varphi = e/R$ аналогично выражению (95.3). Полное решение электростатической проблемы, т. е. решение уравнения Пуассона $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$, может быть получено суммированием сферически-симметрических решений уравнения Лапласа в форме интеграла

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dV}{R},$$

причем интеграл этот сохраняет конечное значение во всех точках пространства. Ввиду аналогии между уравнениями Лапласа и волновым, с одной стороны, и уравнениями Пуассона и Далам-

бера, с другой, можно ожидать, что решение последнего уравнения выразится суммой решений типа (95.3), причем ввиду аналогичной роли функций ρ и χ можно предположить, что

$$s = \int \frac{\chi(t - R/v)}{R}\, dV. \tag{95.4}$$

В этом случае потенциал поля, возбуждаемый «зарядом» $\chi(t)\, dV$ бесконечно малого элемента объема dV, выразится формулой

$$s = \frac{\chi(t - R/v)}{R}\, dV,$$

совпадающей по виду с выражением (95.3) и аналогичной соответствующей формуле электростатики

$$\varphi = \rho \frac{dV}{R}.$$

В том, что выражение (95.4) действительно является решением уравнения Даламбера (94.8), можно убедиться непосредственной подстановкой уравнений (95.4) в уравнение (94.8) (см. ниже).

Пусть x, y, z суть координаты точки P, в которой мы разыскиваем значение функции s; x', y', z' — текущие координаты произвольно расположенного элемента объема dV', а R — расстояние точки P от dV'. Введем обозначение

$$t' = t - \frac{R}{v} \tag{95.5}$$

и будем называть t' *эффективным временем* в dV' по отношению ко времени в P. Тогда формулу (95.4) можно будет записать следующим образом:

$$s(x, y, z, t) = \int \frac{\chi(x', y', z', t')}{R}\, dV', \tag{95.6}$$

где под dV' нужно понимать произведение $dx'\, dy'\, dz'$.

4. Прежде чем проверять подстановкой решение (95.6), проведем аналогичное вычисление для более простого случая: подставим в уравнение Пуассона его решение

$$\varphi(x, y, z) = \int \frac{\rho(x', y', z')}{R}\, dV', \tag{95.7}$$

полученное нами в § 12 математически безупречным образом.

При вычислении $\nabla^2\varphi$ можно дифференцировать по переменным x, y, z под знаком интеграла, взятого по x', y', z' при условии, что вторые производные подынтегрального выражения конечны и непрерывны во всей области интегрирования. Если в точке наблюдения P и в конечной области вокруг этой точки

плотность заряда ρ равна нулю, то это условие выполняется (ибо R остается конечным во всей области интегрирования), и мы можем дифференцировать под знаком интеграла. Ввиду независимости $\rho(x'y'z')$ от координат x, y, z точки наблюдения P в этом случае получаем в соответствии с уравнением Пуассона:

$$\nabla^2\varphi = \int \rho(x', y', z') \cdot \nabla^2 \frac{1}{R} \cdot dV' = 0,$$

ибо, согласно уравнению (11.10), $\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$.

Если же ρ в точке P отлично от нуля, то при вычислении $\nabla^2\varphi$ можно выполнить под знаком интеграла только *одно*, а не два последовательных дифференцирования [1]).

Мы воспользуемся уравнением (11.2)

$$\nabla^2\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$$

и, выполнив первое дифференцирование под знаком интеграла, получим

$$\operatorname{grad}\varphi = \int \rho(x', y', z') \operatorname{grad}\left(\frac{1}{R}\right) dV' = -\int \frac{\rho(x', y', z')\mathbf{R}}{R^3}\, dV',$$

где $\mathbf{R}$ — вектор, проведенный из точки x', y', z' в точку наблюдения x, y, z. Далее, на основании (18*) можно выразить дивергенцию в форме поверхностного интеграла

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \lim_{V\to 0} \frac{\oint \mathbf{a}\cdot d\mathbf{S}}{V},$$

где, по определению, поверхность S объема V должна охватывать ту точку наблюдения P, в которой определяется значение $\operatorname{div}\mathbf{a}$. В нашем случае $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi$ и, стало быть,

$$\nabla^2\varphi = \lim_{V\to 0} \frac{\oint \operatorname{grad}\varphi \cdot d\mathbf{S}}{V}.$$

---

[1]) Действительно, производные φ, например по x, равны

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \int \frac{(x'-x)\rho}{R^3}\, dV', \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \int \frac{\rho}{R^3}\left[\frac{3(x'-x)^2}{R^2} - 1\right] dV'.$$

Если после дифференцирования ввести вместо x', y', z' полярные координаты R, θ, α с центром в точке x, y, z и с полярной осью, направленной по оси x, то dV' примет вид $R^2\, dR\, d\Omega$, где $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\alpha$ и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \int \rho\cos\theta\, dR\, d\Omega, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \int \frac{\rho}{R}(3\cos^2\theta - 1)\, dR\, d\Omega.$$

Таким образом, подынтегральное выражение во втором из этих интегралов обращается в бесконечность при $R = 0$.

Вычисляя поверхностный интеграл, получим, меняя порядок интегрирования по dV и по $d\mathbf{S}$:

$$\oint \operatorname{grad}\varphi \cdot d\mathbf{S} = -\oint d\mathbf{S} \int \frac{\rho(x', y', z')\mathbf{R}}{R^3}\, dV' = \\ = -\int \rho(x', y', z')\, dV' \oint \frac{\mathbf{R}\, d\mathbf{S}}{R^3},$$

где $\mathbf{R}$ — вектор, проведенный из точки x', y', z' к элементу поверхности $d\mathbf{S}$. Поток вектора $\mathbf{R}/R^3$ через произвольную замкнутую поверхность был вычислен нами в § 3; он равен 4π или нулю в зависимости от того, лежит ли точка истока x', y', z' вектора $\mathbf{R}$ внутри или вне объема V, охватываемого этой поверхностью S. Следовательно,

$$\oint \operatorname{grad}\varphi \cdot d\mathbf{S} = -4\pi \int \rho\, dV,$$

где интегрирование должно быть, очевидно, распространено по объему V, охватываемому поверхностью S. Следовательно,

$$\nabla^2\varphi = -4\pi \lim_{V\to 0} \frac{\int \rho\, dV}{V} = -4\pi\rho_P,$$

где ρ_P есть значение ρ в центре объема V, т. е. в той точке наблюдения P, в которой мы определяем значение величины $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi$. Таким образом, мы доказали, что выражение (95.7) для φ действительно удовлетворяет уравнению Пуассона.

5. Приступим теперь к проверке формулы (95.6). Прежде всего, выделим около точки наблюдения P некоторый маленький объем V_0, например сферу радиуса R_0 с центром в P, и разобьем интеграл выражения (95.6) на два интеграла: по объему сферы V_0, который мы в дальнейшем будем стремить к нулю, и по остальному «внешнему» пространству:

$$s = s_1 + s_2, \quad s_1 = \int\limits_{V_0} \frac{\chi(x', y', z', t')}{R}\, dV', \quad s_2 = \int\limits_{\text{внш}} \frac{\chi(x', y', z', t')}{R}\, dV'.$$

Во втором из этих интегралов расстояние R превышает конечную величину R_0; стало быть, мы можем непосредственно дифференцировать под знаком интеграла. Так как функция

$$\frac{1}{R}\chi\left(x', y', z', t - \frac{R}{v}\right)$$

удовлетворяет, согласно уравнению (95.3), волновому уравнению (94.9), то

$$\nabla^2 s_2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2} = \int\limits_{\text{внш}} \left[\nabla^2\left(\frac{\chi}{R}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\chi}{R}\right] dV' = 0.$$

Далее,

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\int\limits_{V_0}\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}\,dV';$$

при безграничном уменьшении радиуса R_0 сферы V_0 интеграл этот стремится, очевидно, к нулю, ибо $\partial^2\chi/\partial t^2$ есть величина конечная, а

$$\int \frac{1}{R}\,dV = \int \frac{1}{R}\cdot 4\pi R^2\,dR = 4\pi\int R\,dR.$$

Таким образом, левая часть волнового уравнения сводится к

$$\nabla^2 s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \nabla^2 s_1 = \operatorname{div}\operatorname{grad} s_1 = \lim_{V\to 0}\frac{\oint \operatorname{grad} s_1\,d\mathbf{S}}{V}. \qquad (95.8)$$

Далее,

$$\operatorname{grad} s_1 = \int\limits_{V_0}\operatorname{grad}\frac{\chi}{R}\,dV' = \int\limits_{V_0}\left(\frac{1}{R}\operatorname{grad}\chi + \chi\operatorname{grad}\frac{1}{R}\right)dV'.$$

При безграничном уменьшении сферы V_0 интеграл первого члена в скобках стремится к нулю, так что его можно сразу отбросить. Таким образом,

$$\oint \operatorname{grad} s_1\,d\mathbf{S} = \int\limits_{V_0} dV'\oint \chi\operatorname{grad}\frac{1}{R}\,d\mathbf{S} = -\int\limits_{V_0} dV'\oint \frac{\chi\mathbf{R}}{R^3}\,d\mathbf{S}.$$

При переходе к пределу, когда как сфера V_0, так и поверхность S становятся бесконечно малыми, можно пренебречь зависимостью функции $\chi(x', y', z', t - R/v)$ от R, т. е. от расстояния между точкой x', y', z' объема V_0 и элементом поверхности $d\mathbf{S}$, и приравнять R в аргументе этой функции χ нулю. Функцию же $\chi(x', y', z', t)$ можно вынести за знак поверхностного интеграла.

Таким образом, мы приходим к выражению только что рассмотренного типа (предполагаем, что поверхность S целиком лежит внутри сферы V_0)

$$\oint \operatorname{grad} s_1\,d\mathbf{S} = -\int\limits_{V_0}\chi\,dV'\oint\frac{\mathbf{R}}{R^3}\,d\mathbf{S} = -4\pi\int\chi\,dV',$$

откуда на основании (95.8) следует:

$$\nabla^2 s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -4\pi\chi_P,$$

что и требовалось доказать.

Вопроса об однозначности решения уравнения Даламбера мы коснемся в следующем параграфе.

§ 96. Запаздывающие и опережающие потенциалы. Калибровочная инвариантность

1. Результаты последнего параграфа позволяют непосредственно написать интегральные выражения потенциалов электромагнитного поля, определяемых дифференциальными уравнениями (94.4) и (94.5).

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (94.6) и (94.8), мы на основании уравнения (95.4) получаем непосредственно:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho(t - R/v)}{R}\,dV, \qquad A = \frac{\mu}{c}\int \frac{j_x(t - R/v)}{R}\,dV \tag{96.1}$$

и аналогичные выражения для A_y и A_z, так что вектор $\mathbf{A}$ выразится формулой

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\int \frac{\mathbf{j}(t - R/v)}{R}\,dV, \tag{96.2}$$

причем, согласно уравнению (94.7),

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Пользуясь обозначениями § 95, в частности уравнением (95.5), можно записать уравнения (96.1) и (96.2) следующим образом:

$$\varphi(x, y, , t) = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho(x', y', z', t')}{R}\,dV', \tag{96.3}$$

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{c}\int \frac{\mathbf{j}(x', y', z', t')}{R}\,dV', \tag{96.4}$$

где под dV' нужно понимать произведение $dx'\,dy'\,dz'$.

В случае независимости ρ и $\mathbf{j}$ от времени, т. е. в стационарном поле, формулы (96.1) и (96.2), как и следовало ожидать, совпадают с ранее выведенными уравнениями (8.8) (при $\varepsilon = 1$) и (64.3).

2. Итак, чтобы вычислить, например, значение скалярного потенциала φ в произвольной точке P в момент t, нужно, согласно уравнению (96.1), разбить все пространство на элементы объема dV и для каждого элемента dV определить величину того заряда

$$de = \rho\Big(t - \frac{R}{v}\Big)\,dV,$$

который находился в нем в момент времени $t - R/v$, где R есть расстояние dV от P. Разделив затем этот заряд de на εR и взяв сумму полученных выражений по всем элементам объема, мы и получим φ. Аналогичным способом определяется и значение $\mathbf{A}$.

Таким образом, потенциалы переменного поля определяются совершенно аналогично потенциалам поля стационарного с тем

единственным, но весьма существенным дополнением, что в каждый момент t потенциал поля, возбуждаемого на расстоянии R от элемента объема dV зарядами и токами элемента, определяется не одновременной с t, а предшествовавшей (в момент $t - R/v$) плотностью этих зарядов и токов. Таким образом, можно сказать, что потенциалы φ и $\mathbf{A}$ зарядов и токов каждого элемента объема dV распространяются из dV по всем направлениям со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, убывая при этом в интенсивности обратно пропорционально расстоянию R. Поэтому определяемые уравнениями (96.1) и (96.2) величины φ и $\mathbf{A}$ носят название *запаздывающих потенциалов* электромагнитного поля.

3. В предыдущем нами еще не было принято во внимание уравнение (94.3), связывающее определенным соотношением возможные значения потенциалов φ и $\mathbf{A}$. В том, что наши решения (96.1) и (96.2) удовлетворяют и этому уравнению, можно убедиться путем непосредственного вычисления.

В соотношение (94.3) входит $\operatorname{div}\mathbf{A}$. При вычислении $\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\mathbf{A}$ можно переменить порядок дифференцирования по x, y, z и интегрирования по x', y', z' на обратный:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\int \nabla\frac{\mathbf{j}(x', y', z', t')}{R}\,dV'. \tag{96.5}$$

Согласно (43_2^*)

$$\nabla\frac{\mathbf{j}(x', y', z', t')}{R} = \frac{1}{R}\cdot\nabla\mathbf{j}(x', y', z', t') + \mathbf{j}(x', y', z', t')\nabla\frac{1}{R}.$$

Так как аргумент вектора $\mathbf{j}$ зависит от x, y, z лишь через посредство эффективного времени t', то

$$\nabla\mathbf{j}(x', y', z', t') = \frac{\partial j_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z} = \frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t'}\nabla t'.$$

Приняв во внимание, что, согласно уравнению (95.5),

$$\nabla t' = -\frac{1}{v}\nabla R,$$

получим окончательно:

$$\nabla\frac{\mathbf{j}}{R} = \mathbf{j}\cdot\nabla\frac{1}{R} = \frac{1}{vR}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t'}\cdot\nabla R.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\nabla'\frac{\mathbf{j}}{R} = \left(\nabla'\frac{\mathbf{j}}{R}\right)_{t'=\text{const}} + \frac{1}{R}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t'}\cdot\nabla' t',$$

где ∇' в отличие от ∇ означает дифференцирование по координатам x', y', z'. Выполнив простые преобразования, получаем

$$\nabla'\frac{\mathbf{j}}{R} = \mathbf{j}'\cdot\nabla'\frac{1}{R} + \frac{1}{R}(\nabla'\mathbf{j})_{t'=\text{const}} - \frac{1}{vR}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t'}\cdot\nabla' R.$$

Приняв теперь во внимание, что уравнение $\operatorname{grad}_a f(R) = -\operatorname{grad}_q f(R)$ [см. уравнения (8*) и (9*)] в наших теперешних обозначениях принимает вид

$$\nabla' f(R) = -\nabla f(R),$$

и сравнивая выражения для $\nabla \frac{\mathbf{j}}{R}$ и $\nabla' \frac{\mathbf{j}}{R}$, найдем

$$\nabla \frac{\mathbf{j}}{R} = -\nabla' \frac{\mathbf{j}}{R} + \frac{1}{R} (\nabla' \mathbf{j})_{t'=\text{const}}.$$

Стало быть, обозначая $\nabla' \mathbf{j}$ через $\operatorname{div}' \mathbf{j}$ и т. д., получим из уравнения (96.5):

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\mu}{c} \int \operatorname{div}' \frac{J}{R} \cdot dV' + \frac{\mu}{c} \int \frac{dV'}{R} (\operatorname{div}' \mathbf{j})_{t'=\text{const}}.$$

Первый из этих интегралов может быть преобразован с помощью теоремы Гаусса в интеграл по поверхности S, охватывающей объем V [1]):

$$\int \operatorname{div}' \frac{\mathbf{j}}{R} dV' = \oint \frac{j_n}{R} dS.$$

Если распространить интегрирование на все бесконечное пространство, то этот интеграл обратится в нуль, если только все электрические токи сосредоточены в конечной области пространства, так что окончательно

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{c} \int \frac{dV'}{R} (\operatorname{div}' \mathbf{j}(x', y', z', t'))_{t'=\text{const}}.$$

Обратимся теперь к правой части соотношения (96.3). Ввиду уравнения (95.5) для произвольной функции $f(t')$ имеем

$$\frac{\partial f(t')}{\partial t} = \frac{\partial f(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial f(t')}{\partial t'}.$$

Поэтому, дифференцируя уравнение (96.3) по времени под знаком интеграла, получим

$$-\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} \int \frac{dV'}{R} \frac{\partial \rho(x', y', z', t')}{dt'}.$$

С другой стороны, уравнение непрерывности (IVa) можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(x, y, z, t)_{t=\text{const}} = -\frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t},$$

ибо при пространственном дифференцировании (образовании дивергенции) время t должно считаться постоянным параметром.

Заменяя в этом уравнении непрерывности нештрихованные величины штрихованными (что является простым изменением обозначений), убедимся, что запаздывающие потенциалы действительно удовлетворяют соотношению (94.3)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

которое требовалось доказать.

4. Обратимся к вопросу об *однозначности* найденных нами решений (96.1) и (96.2) системы уравнений (94.3)–(94.5).

Если не принимать во внимание никаких дополнительных условий, то решения эти необходимо признать неоднозначными. Вспомним хотя бы, что при получении решения (95.4) мы исключили второй член в общем решении (95.2) уравнения (95.1).

---

[1]) Преобразование это нельзя применить непосредственно к исходному выражению (96.5) потому, что в нем объемное интегрирование и пространственное дифференцирование (образование дивергенции) производятся по координатам различных точек.

Если мы, наоборот, сохранили бы только второй член этого общего решения и исключили первый, то мы могли бы повторить все предшествующие вычисления с единственным отличием, заключающимся в замене всюду аргумента $t - R/v$ на $t + R/v$. В результате мы получили бы решение уравнений (94.3)–(94.5) в форме так называемых *опережающих потенциалов* электромагнитного поля:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho(t+R/v)}{R}\,dV, \qquad \mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\int \frac{\mathbf{j}(t+R/v)}{R}\,dV, \tag{96.6}$$

связывающих значение потенциала в точке P в момент t с пространственным распределением зарядов и токов в *последующие* моменты времени $t + R/v$.

Далее, так как неоднородные дифференциальные уравнения (94.3)–(94.5), определяющие потенциалы φ и $\mathbf{A}$, *линейны*, то общее решение этих уравнений может быть представлено в виде суммы произвольного частного решения этих неоднородных уравнений и общего решения соответствующих *однородных* уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = -\frac{c}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad \nabla^2\mathbf{A} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}, \qquad \nabla^2\varphi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{96.7}$$

Как запаздывающие потенциалы (96.1), так и опережающие потенциалы (96.6) являются различными частными решениями неоднородных уравнений (94.3)–(94.5); поэтому общее решение этих уравнений отличается от них на произвольное решение уравнений (96.7).

Следовательно, в частности, и самые опережающие потенциалы можно представить как сумму запаздывающих потенциалов плюс некоторое решение однородных уравнений (96.7).

Эта неоднозначность решения интересующей нас системы дифференциальных уравнений в соответствии с известным общим правилом может быть устранена только заданием определенных *начальных и граничных условий*. Только задание этих условий выделяет из бесконечной совокупности решений системы дифференциальных уравнений то единственное решение, которое соответствует данной конкретной постановке физической задачи.

Так, например, можно показать, что *общее* решение уравнения (94.5) внутри произвольного объема V, ограниченного замкнутой поверхностью S, может быть представлено в форме

$$\varphi(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_V \frac{[\rho]}{R}\,dV + \\ + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint\limits_S \left\{\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] - [\varphi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{vR}\frac{\partial R}{\partial n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\right\} dS, \tag{96.8}$$

где $\mathbf{n}$ есть внешняя нормаль к S, а квадратные скобки означают, что значения находящихся в этих скобках величин должны быть взяты для эффективного момента времени $t' = t - R/v$. Иными словами, если известны значения величин, входящих в правую часть уравнения (96.8), то этим уравнением значения φ в произвольной точке объема V определяются *однозначно*. То же общее решение уравнения (94.5) может быть, однако, представлено также в форме, отличающейся от (96.8), во-первых, знаком у последнего члена подынтегрального выражения поверхностного интеграла и, во-вторых, тем, что значения величин в квадратных скобках должны быть взяты не для *предшествующего* момента времени $t' = t - R/v$, а для *последующего* момента $t' = t + R/v$. Первая форма решения соответствует запаздывающим потенциалам, вторая — опережающим [1]. В стационарном поле оба решения совпадают (при $\varepsilon = 1$) с ранее доказанной формулой (12.5).

Таким образом, уравнения электромагнитного поля, подобно уравнениям механики, позволяют определить как будущее по прошлому и настоящему, так и прошлое по настоящему и будущему. Точнее, пусть нам известны значение ρ в объеме V и значения φ, $\partial\varphi/\partial n$ и $\partial\varphi/\partial t$ на поверхности S этого объема в промежутке времени от t_1 до t_2 и пусть нас интересует поле в произвольной точке P этого объема V. Обозначим через R_2 расстояние от P до наиболее удаленной от нее точки поверхности S и через R_1 наименьшее из следующих двух расстояний: 1) от P до ближайшей точки поверхности S и 2) от P до ближайшей к P точки объема V, в которой плотность заряда ρ была отлична от нуля хотя бы в течение части промежутка времени от t_1 до t_2. Пусть $t_2 - t_1 > (R_2 - R_1)/v$. Тогда, пользуясь запаздывающими потенциалами и формулой (96.8), мы можем определить значение φ в точке P в любой момент «будущего» промежутка времени от $t_1 + R_2/v$ до $t + R_1/v$ [2]; пользуясь же опережающими потенциалами и соответственным видоизменением формулы (96.8), мы можем определить φ в точке P в «прошедшем» промежутке времени от $t_1 - R_1/v$ до $t_2 - R_2/v$.

5. Постановка задач, с которыми приходится встречаться как в теоретической и экспериментальной, так и технической физи-

[1]) Доказательство формулы (96.8) для запаздывающих потенциалов приведено, например, у Лоренца (Теория электронов. — М.: Гостехиздат, 1953. С. 339–345). Доказательство аналогичной формулы для опережающих потенциалов совершенно аналогично приведенному у Лоренца; нужно только в его выкладках заменить $F(t + R/c)$ на $F(t - R/c)$.

[2]) Действительно, для этого определения необходимо, в частности, знать значения φ, $\partial\varphi/\partial n$ и $\partial\varphi/\partial t$ в каждой точке поверхности S в течение промежутка времени от $t_1 + R_2/v - R/v$ до $t_2 + R_1/v - R/v$, где R — расстояние этой точки поверхности от точки P. Так как $R_1 \leqslant R \leqslant R_2$ и $R_2 - R_1 < v(t_2 - t_1)$, то весь этот промежуток времени заключен между t_1 и t_2.

ке, в большинстве случаев требует применения *запаздывающих*, а не опережающих потенциалов. Действительно, в большинстве случаев задача заключается в определении поля, возбуждаемого той или иной системой зарядов и токов, причем эту задачу можно уточнить следующим образом (ср. конец § 93). Вплоть до некоторого момента t_0 поле либо равнялось нулю, либо было стационарным, причем потенциалы φ и $\mathbf{A}$ удовлетворяли условиям (12.10):

$$R\varphi \text{ и } R^2 \operatorname{grad}\varphi \text{ при } R \to \infty \text{ остаются конечными,}$$

и аналогичным условием для $\mathbf{A}$ (46.6). Затем в момент t_0 возникли переменные токи, произошло перемещение зарядов, поле которых и требуется определить в момент времени $t > t_0$. Поле это при этих условиях определяется выражениями (96.1) и (96.2) *запаздывающих* потенциалов.

Действительно, при определении по формуле (96.8) значения потенциала φ в момент времени t мы можем удалить поверхность S на столь большое расстояние R от исследуемой точки поля P, чтобы R удовлетворяло неравенству

$$t - \frac{R}{v} < t_0.$$

В этом случае входящим в уравнение (96.8) величинам $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]$, $[\varphi]$ и $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]$ нужно будет приписать те значения, которыми они обладали до момента возникновения поля t_0, в силу чего весь поверхностный интеграл в уравнении (96.8) обратится в нуль.

Таким образом, при указанных условиях решение уравнения (94.4) определяется *однозначно* и выражается первым членом общего решения (96.8), совпадающим с нашей формулой (96.1). Подобно этому, при этих условиях значение векторного потенциала $\mathbf{A}$ также однозначно определяется формулой (96.2).

В дальнейшем по характеру задач, которые мы будем рассматривать, нам придется иметь дело только с запаздывающими, но не с опережающими потенциалами.

6. В предыдущем мы мало обращали внимания на то, что скалярный и векторный потенциалы поля являются лишь вспомогательными понятиями и что непосредственный физический смысл имеют только *напряженности* электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Ведь энергия поля, пондеромоторные силы, плотность токов и т. д. однозначно определяются напряженностями поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (при заданных ε и μ). Поэтому два поля, описываемые одними и теми же значениями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, но разными значениями потенциалов φ и $\mathbf{A}$, физически тождественны. Каков же произвол в определении потенциалов φ и $\mathbf{A}$ при заданных напряженностях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (или $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$)?

Пусть φ и $\mathbf{A}$ удовлетворяют уравнениям (94.1) и (94.2):

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi.$$

Так как ротор градиента тождественно равен нулю, то если мы прибавим к $\mathbf{A}$ градиент произвольного скаляра χ:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi, \tag{96.9}$$

то новому значению векторного потенциала $\mathbf{A}'$ будет соответствовать прежнее значение магнитной индукции

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}' = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Если χ не зависит от времени, то и значение электрической напряженности $\mathbf{E}$ не изменится при замене $\mathbf{A}$ на $\mathbf{A}'$. Если же χ зависит от времени, то значение $\mathbf{E}$ останется неизменным лишь при условии, что мы одновременно с заменой $\mathbf{A}$ на $\mathbf{A}'$ заменим также и φ на φ', причем

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}. \tag{96.10}$$

Действительно, при этом условии

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{E}.$$

Итак, напряженность и индукция поля остаются неизменными при одновременном прибавлении к векторному потенциалу градиента произвольного скаляра и вычитании из скалярного потенциала деленной на c производной по времени от того же скаляра. Инвариантность поля по отношению к этому классу преобразований потенциалов называется *калибровочной* или *градиентной инвариантностью* (по-немецки — Eichinvarianz, по-английски — gauge invariance). В частности, если χ не зависит от координат, то калибровочная инвариантность сводится к отмеченной в § 8 возможности прибавления к скалярному потенциалу произвольной аддитивной постоянной (могущей зависеть от времени).

Ранее мы пользовались определенной калибровкой или нормировкой потенциалов, т. е. устраняли произвол в определении потенциалов поля добавочными требованиями. Так, например, на векторный потенциал постоянного магнитного поля мы налагали требование $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ и условия на бесконечности (46.6), на потенциалы переменного поля налагалось условие (94.3) и т. д. Лишь при этих условиях [$\mathbf{A}$ выражается интегралом (46.1) в случае постоянного магнитного поля] потенциалы переменного поля удовлетворяют уравнениям Даламбера (94.4) и (94.5) и т. д. Однако ввиду калибровочной инвариантности эти условия отнюдь

не обязательны. Более того, решение отдельных конкретных задач часто облегчается специальной, целесообразной для данной задачи, калибровкой потенциалов, отличной от принятой в этой книге.

Требование калибровочной инвариантности уравнений теоретической физики, т. е. требование, чтобы физическое содержание этих уравнений зависело только от напряженности электромагнитного поля и оставалось неизменным при всех преобразованиях потенциалов поля по формулам (96.9) и (96.10), играет важную роль в электронной и квантовой теориях [1]).

§ 97. Скорость распространения электромагнитных возмущений. Условия квазистационарности

1. Физическое содержание формул (96.1) и (96.2), определяющих значения запаздывающих потенциалов, и уравнений (94.1) и (94.2), устанавливающих зависимость между этими потенциалами и напряженностью поля, сводится к следующему положению: электромагнитное поле возбуждается зарядами и токами проводимости и распространяется от места возбуждения с конечной скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Таким образом, из упомянутых формул, в частности, следует, что токи смещения, играющие столь важную роль в механизме распространения поля, независимо от движения зарядов существовать не могут. Далее, в вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$) скорость распространения поля должна равняться c, т. е. должна численно равняться значению электродинамической постоянной, определяющей силу пондеромоторного взаимодействия токов и действительно имеющей размерность скорости [см. уравнение (43.4)].

Именно в этом признании *конечности скорости распространения поля* и заключается существеннейшее и *основное отличие фактического содержания* так называемых *теорий близкодействия*, и прежде всего теории Максвелла, от теорий *мгновенного дальнодействия* начала прошлого столетия. Поэтому вопрос о правильности той или иной из этих теорий в принципе может быть решен, например, путем постановки следующего простейшего experimentum crucis.

---

[1]) В квантовой теория имеет место другая ситуация Если заряженная частица движется в области, где электрические и магнитные поля отсутствуют, но потенциалы (скалярный и векторный) не равны нулю, то такая частица испытывает электромагнитное воздействие Об особой роли потенциалов в квантовой физике см статью В.Д Скаржинского «Эффект Аронова–Бома Теоретические расчеты и интерпретация» (Труды ФИАН. 1986 Т 167. С. 139) К этой статье приложен полный список литературы, относящейся к этому вопросу При этом калибровочная инвариантность не нарушается. (*Примеч. ред.*)

Пусть заряды e и e' находятся в покое на расстоянии R друг от друга вплоть до момента $t = 0$, по наступлении которого мы начинаем удалять e' от e. По теории мгновенного дальнодействия сила притяжения $F = \frac{ee'}{R^2}$, испытываемая зарядом e со стороны заряда e', должна начать убывать *в тот же момент времени* $t = 0$. Согласно же уравнениям Максвелла, эта сила должна оставаться неизменной вплоть до момента $t = \frac{R}{c}$ (предполагаем, что заряды находятся в вакууме), ибо сила F, испытываемая зарядом e, находящимся в точке P, определяется напряженностью поля *в той же точке* P ($\mathbf{F} = e\mathbf{E}$). Перемещая заряд e', находящийся в точке P', *мы непосредственно* изменяем поле лишь в этой точке P'. Это *изменение* электрического поля в P' (ток смещения), согласно уравнению (I), возбуждает магнитное поле *в смежных точках* пространства [1]), что в свою очередь, согласно уравнению (II), влечет за собой возникновение вихря вектора $\mathbf{E}$, т. е изменение этого вектора (ибо в статическом поле $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ при $t < 0$) опять-таки лишь в *смежных* точках пространства и т. д. В результате *изменение*, или, как говорят, *возмущение*, *поля*, вызванное в P' перемещением заряда e', через R/c секунд распространится до точки P и лишь в этот момент обусловит изменение силы F, испытываемой зарядом e.

Нас сейчас вовсе не интересует то обстоятельство, что по практическим и техническим соображениям этот простейший опыт обречен на неудачу. Существенно лишь, что вопрос о скорости распространения поля может быть решен *экспериментальным путем* и что он был фактически решен в пользу конечности этой скорости.

Больше того, изложенные нами следствия, вытекающие из максвелловой теории поля, и, в частности, формула (94.7) могут быть подвергнуты также и количественной проверке, ибо значение постоянной c может быть определено путем независимых электродинамических измерений (см. § 43 и 59). Наиболее вероятное значение этой постоянной равно (см. § 59):

$$c = (2{,}9978 \pm 0{,}0001) \cdot 10^{10} \text{ см/с},$$

что в пределах ошибок опыта действительно совпадает с непосредственно измеренной скоростью распространения поля в вакууме. Как показывает анализ наиболее точных измерений,

[1]) Конечно, наряду с изменением электрического поля движение заряда e' непосредственно возбуждает вблизи точки P' также и поле магнитное, которое тоже распространяется вдаль

произведенных до 1973 г, скорость света в вакууме [1]) равна

$$c = (2{,}99792458(1{,}2)) \cdot 10^{10} \text{ см/с}.$$

Численное совпадение приведенных величин является убедительным доказательством как электромагнитной природы света, так и правильности уравнений Максвелла, по крайней мере в применении их к вакууму.

2. Ко всем этим важным вопросам мы еще вернемся в дальнейшем, пока же мы воспользуемся полученными результатами для того, чтобы обосновать перечисленные в § 78 условия квазистационарности переменного поля Мы можем теперь уточнить определение квазистационарности следующим образом. квазистационарным полем называется поле, потенциалы φ и $\mathbf{A}$ и *магнитная напряженность* $\mathbf{H}$ которого в каждый данный момент t с достаточной точностью совпадают с соответствующими величинами в поле *неподвижных зарядов и постоянных токов*, плотность которых ρ и $\mathbf{j}$ равна *мгновенной* (в момент t) плотности рассматриваемых переменных зарядов и токов.

Из рассмотрения выражений запаздывающих потенциалов (96.1) и (96.2) следует, что для квазистационарности прежде всего необходимо выполнение следующего условия: за время $t = R/v$, необходимое для распространения электромагнитного поля на расстояние R, значения величин ρ и $\mathbf{j}$ должны испытывать лишь исчезающе малые изменения. При этом под R нужно понимать расстояние рассматриваемой точки поля от наиболее удаленного элемента заряда или тока.

Очевидно, что R всегда можно выбрать настолько большим, чтобы при каких угодно медленных изменениях поля это условие не удовлетворялось Однако в теории квазистационарных токов обычно ограничиваются рассмотрением поля в непосредственной близости к заряженным или обтекаемым токами проводникам. В этом случае верхний предел расстояния R можно положить равным расстоянию l между двумя наиболее удаленными друг от друга элементами зарядов или токов, поле которых мы еще желаем учесть. Если, кроме того, мы имеем дело с периодическими токами периода T, то условие квазистационарности сведется, очевидно, к неравенству

$$\tau = \frac{1}{v} \ll T,$$

или, так как v, вообще говоря, сравнимо с c, — к неравенству

$$\frac{l}{c} \ll T. \tag{97.1}$$

[1]) Непосредственно измеряется скорость света в воздухе, значение же скорости света в вакууме определяется на основании соотношения $v = c/\sqrt{\varepsilon}$, где ε есть диэлектрическая проницаемость воздуха, равная 1,00058

Если это условие квазистационарности выполнено, то значение *потенциалов* поля вблизи зарядов и токов, т. е. на расстояниях от них, удовлетворяющих требованию

$$\frac{R}{c} \ll T, \tag{97.2}$$

можно с достаточной точностью определить по формулам (8.8) и (64.3), выведенным нами для поля стационарного (и не учитывающим токов смещения).

Что же касается *напряженности электрического поля* $\mathbf{E}$, то даже при одинаковом *мгновенном* значении потенциалов φ и $\mathbf{A}$ вектор $\mathbf{E}$ переменного квазистационарного поля (в отличие от вектора $\mathbf{H}$) может существенно отличаться от вектора $\mathbf{E}$ соответствующего постоянного поля (явления индукции!). Формально это отличие связано с тем, что в выражение для $\mathbf{E}$ [формула (94.2)] входит *производная по времени* от вектора-потенциала $\mathbf{A}$.

3 Может возникнуть сомнение, гарантирует ли, например в отношении вектора $\mathbf{H}$, одинаковость связи $\mathbf{H}$ с $\mathbf{A}$ одинаковое значение $\mathbf{H}$ в поле квазистационарном и в поле постоянном, характеризуемом одним и тем же мгновенным значением потенциала $\mathbf{A}$. Ведь даже при образовании пространственных производных от φ и $\mathbf{A}$ зависимость их от времени может играть существенную роль. Так, например, если в выражении производной

$$\frac{\partial\varphi(t-R/c)}{\partial x} = \left[\frac{\partial\varphi(t-R/c)}{\partial x}\right]_{t-R/c=\text{const}} - \frac{x}{cR}\,\frac{\partial\varphi(t-R/c)}{\partial t} \tag{97 3}$$

мы в аргументе функции φ заменим $t - R/c$ на t, то все же полученное выражение будет отличаться от $\dfrac{\partial\varphi(t)}{\partial x}$ вторым членом

Однако в тех случаях, когда выполняются условия (97 1) и (97 2), отличие это не существенно. В периодическом поле по порядку величины $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ сравнимо с $\dfrac{\varphi}{cT}$; следовательно, ввиду (97 1) $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \ll \dfrac{\varphi}{l}$. С другой стороны, потенциал φ (или по крайней мере переменная во времени слагающая этого потенциала) изменяется на протяжении системы на величину, сравнимую с самим этим потенциалом φ (в частности, переменная слагающая φ, вообще говоря, меняет знак на протяжении системы) Стало быть, по порядку величины $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \sim \dfrac{\varphi}{l}$, так что вблизи системы второй член выражения (97 3) действительно мал по сравнению с первым, что и требовалось доказать

Далее, на больших по сравнению с размерами системы расстояниях от нее $\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right] \sim \dfrac{\varphi}{R}$, тогда как $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \sim \dfrac{\varphi}{cT}$ Поэтому, пока выполняется условие (97.2), второй член выражения (97 3) остается малым по сравнению с первым, тогда как на расстояниях $R \gg cT$ в так называемой волновой зоне (см § 99), наоборот, первый член исчезающе мал по сравнению со вторым.

В § 99 при рассмотрении поля осциллятора намеченный здесь ход доказательства будет проведен вполне строго.

4. Однако одного лишь условия (97.1) еще недостаточно, чтобы применять к *магнитному* полю квазистационарных токов все законы стационарного магнитного поля, ибо при выводе последних существенное значение играла *замкнутость* постоянных токов. Таким образом, «полная» квазистационарность поля имеет место лишь при одновременном выполнении как указанного «основного», так и «дополнительного» условия квазистационарности, сводящегося к требованию, чтобы плотность токов смещения была настолько мала по сравнению с плотностью токов проводимости, чтобы токи проводимости можно было считать замкнутыми (см. § 88).

§ 98. Осциллятор. Запаздывающие потенциалы поля осциллятора

1. В § 20 мы убедились, что поле произвольно сложной, но в целом нейтральной системы неподвижных электрических зарядов на больших расстояниях от этой системы весьма просто выражается с помощью вектора электрического момента $\mathbf{p}$ этой системы. Теперь мы проведем аналогичные рассуждения для поля нейтральной системы *движущихся* зарядов, ограничиваясь для простоты случаем системы, расположенной в вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$).

Предположим, что заряды нашей системы находятся внутри некоторого объема V и за пределы этого объема не выходят. Пусть l означает линейные размеры объема V (например, расстояние между двумя его точками, наиболее удаленными друг от друга). Выберем внутри объема V произвольную точку O, которую будем условно называть *центром* нашей системы зарядов. Пусть, наконец, $\mathbf{R}_0$ есть радиус-вектор, проведенный из O в точку наблюдения P, причем мы ограничимся рассмотрением лишь тех точек поля, расстояние которых от системы значительно больше ее размеров l:

$$R_0 \gg l. \tag{98.1}$$

Если $\mathbf{R}$ по-прежнему обозначает радиус-вектор, проведенный из произвольной точки $Q(x', y', z')$ нашей системы в точку P, то

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}',$$

где $\mathbf{R}'$ есть расстояние Q от центра системы O (см. рис. 27 в § 20, в котором, однако, $\mathbf{R}_i$ соответствует нашему теперешнему $\mathbf{R}'$, а $\mathbf{R}'_i$ соответствует $\mathbf{R}$), причем очевидно, что $R' \leqslant l \ll R_0$. Пренебрегая вторыми и старшими степенями R', получаем

$$R = \sqrt{R_0^2 - 2\mathbf{R}_0\mathbf{R}' + R'^2} = R_0 - \frac{\mathbf{R}_0\mathbf{R}'}{R_0}.$$

2. Рассмотрим сначала скалярный потенциал нашей системы зарядов. Под интегралом правой части уравнения (96.3) стоит функция расстояния R:

$$\frac{\rho(x', y', z', t - R/c)}{R}.$$

Выражая в ней R через $R_0 - \mathbf{R}'\mathbf{R}_0/R_0$ и разлагая в ряд Тейлора, получаем

$$\frac{\rho(x', y', z', t - R/c)}{R} = \frac{\rho(x', y', z', t - R_0/c)}{R_0} - \\ - \frac{\mathbf{R}'\mathbf{R}_0}{R_0} \frac{\partial}{\partial R_0} \frac{\rho(x', y', z', t - R_0/c)}{R_0} + \dots \quad (98.2)$$

Если размеры системы l, а вместе с тем и радиус-вектор R' достаточно малы, то в первом приближении можно ограничиться приведенными двумя членами разложения, отбрасывая члены с высшими степенями R'. Оставляя рассмотрение условий, при которых это приближение законно, на конец параграфа и внося уравнение (98.2) в уравнение (96.3), получаем (при $\varepsilon = 1$):

$$\varphi(x, y, z, t) = \int \frac{\rho(x', y', z', t - R_0/c)}{R_0} dV' - \\ - \int \frac{\mathbf{R}'\mathbf{R}_0}{R_0} \frac{\partial}{\partial R_0} \frac{\rho(x', y', z', t - R_0/c)}{R_0} dV'.$$

В первом из этих интегралов можно вынести за знак интеграла R_0, от положения точки $Q(x', y', z')$ не зависящее. Так как интеграл

$$\int \rho\left(x', y', z', t - \frac{R_0}{c}\right) dV'$$

равен полному заряду системы в момент $t - R_0/c$, то ввиду предполагаемой нейтральности системы он обращается в нуль, а вместе с ним и весь первый член выражения для φ.

Второй же интеграл ввиду независимости R_0 от x', y', z' можно записать в следующей форме:

$$-\frac{\mathbf{R}_0}{R_0} \frac{\partial}{\partial R_0} \left\{ \frac{1}{R_0} \int \mathbf{R}' \rho\left(x', y', z', t - \frac{R_0}{c}\right) dV' \right\}.$$

Интеграл

$$\int \mathbf{R}' \rho\left(x', y', z', t - \frac{R_0}{c}\right) dV' = \mathbf{p}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) \quad (98.3)$$

представляет собой, очевидно, значение вектора электрического момента системы $\mathbf{p}$ в момент $t - R_0/c$ [см. уравнение (20.1), от которого уравнение (98.3) отличается только переходом от системы точечных зарядов к зарядам объемным].

Таким образом, скалярный потенциал φ равен

$$\varphi = -\frac{\mathbf{R}}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left\{\frac{\mathbf{p}(t-R/c)}{R}\right\}$$

(индекс 0 у R_0 мы отбрасываем). Это выражение можно записать в следующей окончательной форме:

$$\varphi = -\operatorname{div}_a\left\{\frac{\mathbf{p}(t-R/c)}{R}\right\}, \tag{98.4}$$

где значок a у знака дивергенции отмечает дифференцирование по точке наблюдения P. Действительно, на основании (43_2^*) и (10*)

$$\operatorname{div}_a\left(\frac{\mathbf{p}(t-R/c)}{R}\right) = \mathbf{p}\operatorname{grad}_a\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\operatorname{div}\mathbf{p} = -\frac{\mathbf{pR}}{R^3} + \frac{1}{R}\operatorname{div}\mathbf{p}.$$

Далее, так как аргумент $\mathbf{p}$ зависит от координат только через R, то

$$\operatorname{div}\mathbf{p} = \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{x}{R}\frac{\partial p_x}{\partial R} + \frac{y}{R}\frac{\partial p_y}{\partial R} + \frac{z}{R}\frac{\partial p_z}{\partial R} = \frac{\mathbf{R}}{R}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial R};$$

внося эти выражения в (98.4), убеждаемся, что это уравнение совпадает с непосредственно ему предшествующим.

В формуле (98.4) под R можно понимать расстояние точки наблюдения от *произвольной* точки объема V, занимаемого нашей системой зарядов, ибо выбор положения «центра» системы O внутри этого объема никаким условием в предыдущем ограничен не был. Впрочем, это и непосредственно очевидно ввиду оговоренной малости размера l этого объема по сравнению с R. Существенно, что и значение вектора электрического момента $\mathbf{p}$ произвольной нейтральной системы зарядов также от выбора точки O не зависит (это было уже доказано нами в § 20).

В случае независимости $\mathbf{p}$ от времени формула (98.4) с помощью соотношения (43_2^*) может быть преобразована так, чтобы она совпадала с прежней формулой (8.11), определяющей потенциал статического диполя.

3. Перейдем теперь к векторному потенциалу $\mathbf{A}$, выражаемому формулой (96.4). Разлагая подынтегральное выражение этой формулы по аналогии с формулой (98.2) в ряд Тейлора

$$\frac{\mathbf{j}(x', y', z', t-R/c)}{R} = \frac{\mathbf{j}(x', y', z', t-R_0/c)}{R_0} - \frac{\mathbf{R}'\mathbf{R}_0}{R_0}\frac{\partial}{\partial R_0}\frac{\mathbf{j}(x', y', z', t-R_0/c)}{R_0} + \dots,$$

мы можем ограничиться одним лишь первым членом этого разложения [в случае скалярного потенциала φ мы должны были сохранить второй член разложения, потому что интеграл перво-

го члена уравнения (98.2) обращался в нуль]. Тогда уравнение (96.4) дает (при $\mu = 1$):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(x', y', z', t - R/c)}{R}\, dV' = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}\left(x', y', z', t - \frac{R_0}{c}\right) dV'. \tag{98.5}$$

В случае *замкнутых* токов интеграл $\int \mathbf{j}\, dV'$, взятый по всему объему токов, тождественно равен нулю [см. в § 57 доказательство того, что из (57.7) следует (57.6)]; стало быть, в *рассматриваемом приближении равны нулю и вектор-потенциал* и магнитное поле системы. В случае же *незамкнутых* переменных токов этот интеграл, вообще говоря, отличен от нуля и, как мы сейчас покажем, равен производной по времени электрического момента системы $\mathbf{p}$.

Дифференцируя по времени уравнение (98.3) и воспользовавшись уравнением непрерывности (IVa),

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(x', y', z', t - \frac{R_0}{c}\right) = -\operatorname{div}'\mathbf{j}\left(x', y', z', t - \frac{R_0}{c}\right),$$

где div' означает дифференцирование по координатам x', y', z' точки Q (напомним, что R_0 от этих координат не зависит), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = -\int \mathbf{R}'\operatorname{div}'\mathbf{j}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) dV'.$$

Помножим это уравнение на произвольный единичный постоянный вектор $\mathbf{a}$ ($a = 1$). Тогда подынтегральное выражение можно будет преобразовать с помощью уравнений (43_2^*) и (11*):

$$(\mathbf{aR}')\operatorname{div}'\mathbf{j} = \operatorname{div}'\{\mathbf{j}(\mathbf{aR}')\} - \mathbf{j}\,\mathrm{grad}'(\mathbf{aR}') = \operatorname{div}'\{\mathbf{j}(\mathbf{aR}')\} - \mathbf{aj}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{a}\frac{\partial \mathbf{p}(t - R_0/c)}{\partial t} = -\int \operatorname{div}'\{\mathbf{j}(\mathbf{aR}')\}\, dV' + \mathbf{a}\int \mathbf{j}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) dV'.$$

Первый интеграл может быть с помощью теоремы Гаусса преобразован в интеграл по поверхности S, охватывающий объем V. Так как все электрические заряды, по условию, находятся внутри объема V, то через граничную поверхность S токов не протекает, т. е. на ней $\mathbf{j} = 0$; поэтому

$$\int \operatorname{div}\{(\mathbf{aR}')\mathbf{j}\}\, dV' = \oint (\mathbf{aR}')j_n\, dS = 0.$$

Так как предпоследнее равенство справедливо при любом выборе направления постоянного вектора $\mathbf{a}$, то окончательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = \int \mathbf{j}\left(x', y', z', t - \frac{R_0}{c}\right) dV'. \tag{98.6}$$

Наконец, внося это выражение в (98 5) и опуская у R_0 индекс, получаем выражение для векторного потенциала

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}\left(t - \frac{R}{c}\right). \tag{98.7}$$

4. Итак, как скалярный, так и векторный потенциалы произвольной нейтральной системы на больших от нее расстояниях однозначно определяются вектором $\mathbf{p}$ электрического момента этой системы. Простейшей такой системой является обыкновенный диполь — совокупность двух точечных зарядов противоположных знаков. В отличие от статического диполя диполь, момент которого $\mathbf{p}$ изменяется во времени, часто называется *осциллятором* или вибратором. Таким образом, *поле нейтральной системы зарядов на больших от нее расстояниях совпадает с полем осциллятора*, момент которого равен моменту системы. Благодаря этому обстоятельству изучение поля осциллятора играет весьма важную роль в теории электричества. При известных условиях, которые мы сейчас рассмотрим, радиотелеграфную антенну можно заменить эквивалентным осциллятором, светящееся тело — совокупностью элементарных осцилляторов и т д.

5. Формулы этого параграфа применимы лишь в том случае, если в разложении (98.2) и в аналогичном разложении подынтегрального выражения формулы для $\mathbf{A}$ можно пренебречь последующими членами разложения по сравнению с предыдущими. Рассмотрим теперь условия, при которых это приближение законно, причем достаточно будет ограничиться тем случаем, когда векторы $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}'$ имеют одинаковое направление. В этом случае $R = R_0 - R'$ и разложение (98.2) принимает более простой вид

$$\frac{\rho(t - R/c)}{R} = \frac{\rho(t - R_0/c)}{R_0} - R'\frac{\partial}{\partial R_0}\frac{\rho(t - R_0/c)}{R_0} + \\ + \frac{1}{2}R'^2\frac{\partial^2}{\partial R_0^2}\frac{\rho(t - R_0/c)}{R_0} \ldots,$$

причем

$$\frac{\partial}{\partial R_0}\frac{\rho(t - R_0/c)}{R_0} = -\frac{\rho(t - R_0/c)}{R_0^2} - \frac{1}{cR_0}\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(t - \frac{R_0}{c}\right).$$

Дифференцирование сомножителей типа $1/R_0^n$ увеличивает показатель R_0 в знаменателе, так что при $R' \ll R_0$ последующими членами, получающимися при дифференцировании этих сомножителей, наверное можно пренебречь. Таким образом, весь вопрос о законности сделанных упрощений, как легко видеть, сводится к относительной величине членов типа

$$\frac{R'^n}{c^n}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\rho\left(t - \frac{R_0}{c}\right).$$

Предположим для простоты, что ρ является периодической функцией времени:

$$\rho\left(x', y', z', t - \frac{R_0}{c}\right) = f(x', y', z')\cos\left[\omega\left(t - \frac{R_0}{c}\right)\right].$$

Тогда по порядку величины дифференцирование ρ по t сведется к умножению ρ на ω, а отношение последовательных членов рассматриваемого разложения по порядку величины будет равно $R'\omega/c$. Таким образом, пренебречь последующими членами разложения по сравнению с предшествующими можно при условии $R'\omega/c \ll 1$. Так как $R' \leqslant l$, а $\omega = 2\pi/T$, где T есть период колебаний, то это условие эквивалентно условию

$$\frac{l}{cT} \ll 1, \tag{98.8}$$

совпадающему с уравнением (97.1). Таким образом, применимость формул настоящего параграфа ограничена, во-первых, условием (98.1) достаточной удаленности рассматриваемых участков поля от системы зарядов и токов, возбуждающей это поле, и, во-вторых, требованием, чтобы эта система удовлетворяла основному условию квазистационарности (97.1). Конечно, при этом условии поле системы будет квазистационарным лишь в непосредственной близости от нее, но никак не вдали.

6. Рассмотрим в заключение простейшую систему, эквивалентную осциллятору. С точки зрения электронной теории, простейшей формой осуществления осциллятора является совокупность одного электрона и одного протона, взаимное расстояние которых периодически изменяется во времени. В максвелловой макроскопической теории поля простейшей моделью осциллятора можно считать так называемый вибратор Герца: два металлических шарика K и K', заряды которых e и e' в каждый данный момент равны по величине и противоположны по знаку ($e' = -e$), соединены проводом длины l (рис. 80). Если считать вектор $\mathbf{l}$ направленным от K' к K, то момент образованного этими зарядами диполя будет равен:

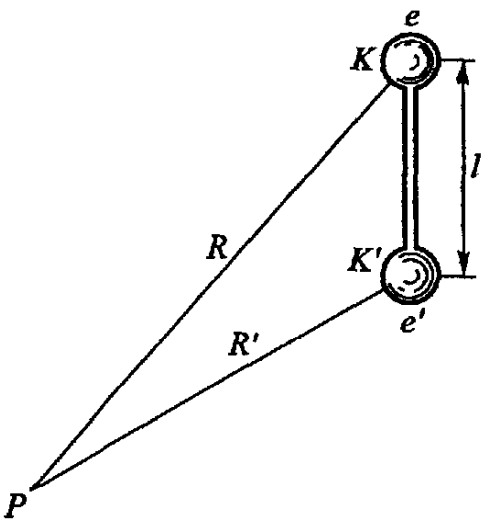

Рис 80

$$\mathbf{p} = e\mathbf{l},$$

ибо, по определению, вектор $\mathbf{p}$ направлен от отрицательного заряда к положительному [1]). Если, зарядив вибратор, предоставить его самому себе, то в нем возникнут затухающие электрические колебания, аналогичные рассмотренным в § 89 колебаниям

[1]) Направление $\mathbf{p}$ совпадает с $\mathbf{l}$ при $e > 0$ и противоположно ему при $e < 0$

в цепи с конденсатором. Колебания эти будут сопровождаться периодическим *перезаряжением шариков*, т. е. периодическим изменением их зарядов по величине и по знаку. В этом случае момент вибратора $\mathbf{p}$ можно положить равным

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 f(t),$$

где $\mathbf{p}_0$ есть постоянный вектор, направленный по оси вибратора, а $f(t)$ — некоторая периодическая затухающая функция времени.

Сила тока в вибраторе равна, очевидно, скорости изменения величины зарядов e и e'; если мы условимся считать ток положительным при совпадении его направления с вектором $\mathbf{l}$, то $J = \partial e/\partial t$, откуда

$$J\mathbf{l} = \frac{\partial e}{\partial t}\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}. \tag{98.9}$$

Эта формула является частным случаем общей формулы (98.6) в применении к системе, которую приближенно можно уподобить отрезку прямолинейного тока, и может быть легко получена из (98.6) с помощью соотношения (44.1):

$$\mathbf{j}\,dV = dJ\,ds.$$

7. Если электрический момент системы $\mathbf{p}$ равен нулю или постоянен во времени, то поле излучения системы определяется отброшенными нами ранее старшими членами разложения величин ρ/R и $\mathbf{j}/R$ по степеням R'/R_0. В качестве простейшего примера такой системы рассмотрим систему переменных, но замкнутых токов, т. е. переменных токов, удовлетворяющих условию $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$.

Согласно уравнению непрерывности (IVa) в этом случае $\partial\rho/\partial t = 0$, т. е. распределение зарядов, а стало быть, и электрический момент системы $\mathbf{p}$ неизменны во времени. Скалярный потенциал поля системы также постоянен и нас интересовать не будет. Что же касается векторного потенциала поля системы, то, ограничиваясь в разложении $\mathbf{j}/R$ по степеням R'/R_0 [см. формулу, следующую за уравнением (98.4)] первым из членов, интеграл которого при $\mathbf{p} = 0$ отличен от нуля, получаем

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{R}'\mathbf{R}_0}{R_0}\frac{\partial}{\partial R_0}\left(\frac{\mathbf{j}(x', y', z', t - R_0/c)}{R_0}\right) dV'. \tag{98.10}$$

Выполняя дифференцирование по R_0, получаем

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{R}'\mathbf{R}_0}{R_0^3}\left\{\mathbf{j}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) + \frac{R_0}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)\right\} dV'. \tag{98.11}$$

Интеграл первого члена суммы совпадает по форме со вторым членом формулы (57.2). В § 57 было показано, что если в формуле (57.2) распространить интегрирование на весь объем токов [т. е. удовлетворить условию (57.7)], то первый член этой

формулы обращается в нуль, а второй, согласно (57.8), выражается через магнитный момент системы токов. Соответственно этому интеграл первого члена суммы в (98.11) равен [1])

$$\frac{[\mathbf{M}(t - R_0/c) \cdot \mathbf{R}_0]}{R_0^3},$$

где $\mathbf{M}$ означает магнитный момент системы

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{R}'\mathbf{j}]\, dV. \tag{98.12}$$

Второй член подынтегрального выражения в (98.11) получается из первого дифференцированием по t и умножением на R_0/c. Поэтому, опуская индекс 0 у R_0, получаем окончательно:

$$\mathbf{A} = \frac{[\mathbf{M}(t - R/c) \cdot \mathbf{R}]}{R^3} + \frac{1}{cR^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}\left(t - \frac{R}{c}\right) \cdot \mathbf{R}\right]. \tag{98.13}$$

Так как скалярный потенциал рассматриваемой системы равен нулю, то не только магнитное, но и электрическое поле системы выражается через векторный потенциал $\mathbf{A}$, т. е. определяется вектором $\mathbf{M}$ магнитного момента системы. Такая система называется *магнитным диполем* или магнитным осциллятором. Простейшая система, эквивалентная такому осциллятору, — замкнутый проволочный контур, в котором возбуждается переменный ток. В отличие от линейного, незамкнутого вибратора Герца такой контур в радиотехнике называется рамкой.

В том случае, если система обладает как переменным электрическим, так и переменным магнитным моментом, полем последнего на больших расстояниях обычно можно пренебречь по сравнению с полем электрического момента. Действительно, выражая в (98.12) плотность тока $\mathbf{j}$ через скорость $\mathbf{v}$ и плотность ρ электрических зарядов $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, получаем

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int \rho\, [\mathbf{R}'\mathbf{v}]\, dV',$$

тогда как электрический момент системы равен

$$\mathbf{p} = \int \rho \mathbf{R}'\, dV'.$$

Поэтому, если только благодаря специальным особенностям системы ее электрический момент не очень мал, то по порядку

[1]) В § 57 предполагалось, что токи постоянны и что поэтому $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. Выше мы предположили, что и рассматриваемые нами переменные токи также удовлетворяют этому условию. Если же $\operatorname{div} \mathbf{j} \neq 0$, то при преобразовании интеграла (98.11) в выражении для $\mathbf{A}$ появляются, помимо (98.13), еще члены, соответствующие так называемому квадрупольному электрическому моменту системы.

величины $M \sim \frac{v}{c} p$. Так как даже истинная (а не только средняя) скорость электронов v в большинстве случаев гораздо меньше c, то и $M \ll p$.

§ 99. Поле осциллятора. Его излучение

1. Для дальнейшего изучения поля осциллятора удобно ввести в рассмотрение так называемый *вектор Герца*, определяемый уравнением

$$\mathbf{P}(t, R) = \frac{\mathbf{p}(t - R/c)}{R}. \tag{99.1}$$

Как явствует из этого уравнения, значение вектора Герца в момент t в точке, находящейся на расстоянии R от осциллятора, определяется значением электрического момента осциллятора в момент $t - R/c$. Существенно, что вектор Герца удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{P} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}; \tag{99.2}$$

иными словами, каждая из слагающих вектора $\mathbf{P}$ в произвольной системе декартовых координат удовлетворяет волновому уравнению типа (94.9), где в нашем случае нужно положить $v = c$. Это следует из того факта, что каждая из слагающих этого вектора, согласно уравнению (99.1), совпадает по форме с найденным нами в § 95 сферически симметричным решением (95.3) волнового уравнения.

Внося уравнение (99.1) в выражения (98.4) и (98.7) для φ и $\mathbf{A}$ и отбрасывая индекс a у знака div, получим

$$\varphi(t) = -\operatorname{div} \mathbf{P}(t), \qquad \mathbf{A}(t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}(t)}{\partial t}. \tag{99.3}$$

Переходя от потенциалов к напряженности поля, получим из уравнения (94.1) (положив в нем $\mu = 1$)

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{P}}{\partial t}. \tag{99.4}$$

Уравнение же (94.2) на основании уравнения (42_3^*) примет вид

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \nabla^2 \mathbf{P} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{P};$$

так как сумма первых двух членов справа, согласно уравнению (99.2), равна нулю, то окончательно

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{P}. \tag{99.5}$$

Таким образом, задача определения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ сведена нами к вычислению ротора вектора $\mathbf{P}$ и его производных.

2. Предположим, что с течением времени изменяется только числовая (или, точнее, алгебраическая) величина вектора электрического момента $\mathbf{p}$ осциллятора. В этом случае

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 f(t), \tag{99.6}$$

где $\mathbf{p}_0$ — постоянный вектор, направленный по оси осциллятора, а $f(t)$ — произвольная скалярная функция времени. Это предположение не представляет никакого существенного ограничения, ибо момент $\mathbf{p}$ произвольного осциллятора можно разложить на три взаимно перпендикулярных слагающих постоянного направления и рассматривать поле каждой из этих слагающих порознь.

Введя, далее, временно обозначение

$$\Phi(R, t) = \frac{f(t - R/c)}{R},$$

можем, согласно уравнению (99.1), написать

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_0 \Phi(R, t).$$

Ввиду постоянства вектора $\mathbf{p}_0$ получаем на основании уравнений (43_3^*), (8*) и (9*):

$$\operatorname{rot} \mathbf{P} = [\operatorname{grad} \Phi \cdot \mathbf{p}_0] = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial R} \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{p}_0\right] = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} [\mathbf{R}\mathbf{p}_0].$$

Введем сферическую систему координат R, α, ϑ с центром в осцилляторе Q и с полярной осью, параллельной $\mathbf{p}_0$ (рис. 81), и будем в каждой точке поля разлагать все встречающиеся нам векторы на слагающие, направленные по взаимно перпендикулярным направлениям *возрастания* сферических координат R, ϑ и α.

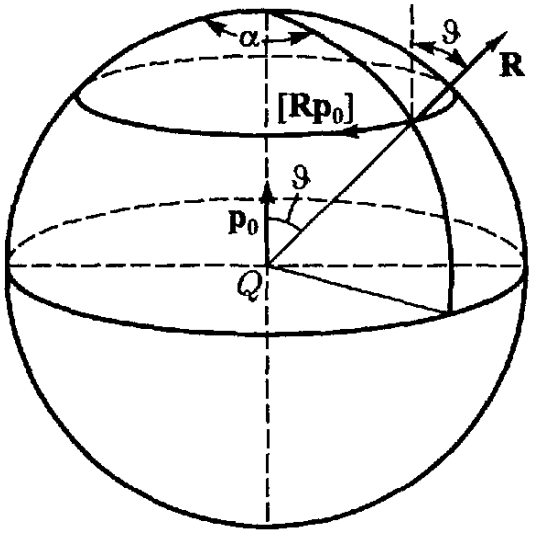

Рис. 81

Очевидно, что векторное произведение $[\mathbf{R}\mathbf{p}_0]$ в каждой точке поля P будет направлено по касательной к дуге параллельного круга, проходящего через эту точку P, и притом в сторону *убывания* угла долготы α (если, как обычно, выбрать направление возрастания угла α так, чтобы оно образовало с положительным направлением полярной оси правовинтовую систему). Числовая же величина произведения $[\mathbf{R}\mathbf{p}_0]$ будет равна $Rp_0 \sin\vartheta$, где ϑ есть полярный угол точки P. Стало быть, слагающие вектора $[\mathbf{R}\mathbf{p}_0]$ по направлению возрастания координат R, ϑ и α будут равны

$$[\mathbf{R}\mathbf{p}_0]_R = [\mathbf{R}\mathbf{p}_0]_\vartheta = 0, \quad [\mathbf{R}\mathbf{p}_0]_\alpha = -Rp_0 \sin\vartheta.$$

Соответственно этому

$$\operatorname{rot}_R \mathbf{P} = \operatorname{rot}_\vartheta \mathbf{P} = 0, \quad \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{P} = -p_0 \sin\vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial R} = -\sin\vartheta \frac{\partial P}{\partial R},$$

где $\partial P/\partial R$ есть производная от *числовой* величины вектора Герца. Внося это в уравнение (99.4), получим

$$H_R = H_\vartheta = 0, \quad H_\alpha = -\sin\vartheta \frac{1}{c} \frac{\partial^2 P}{\partial t\, \partial R}. \tag{99.7}$$

Чтобы определить $\mathbf{E}$, необходимо еще вычислить вихрь от $\operatorname{rot}\mathbf{P}$. На основании уравнений (31*) получаем

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{1}{R\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (\sin\vartheta \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{P}) = \\ &= -\frac{1}{R\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin^2\vartheta \frac{\partial P}{\partial R}\right) = -\frac{2\cos\vartheta}{R} \frac{\partial P}{\partial R}, \\ E_\vartheta &= -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{P}) = \frac{\sin\vartheta}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial P}{\partial R}\right), \quad E_\alpha = 0. \end{aligned} \tag{99.8}$$

Из уравнений (99.7) и (99.8) следует, что *электрический и магнитный векторы поля осциллятора взаимно перпендикулярны, причем магнитные силовые линии совпадают с параллельными кругами нашей сферической системы координат, а электрические лежат в меридиональных плоскостях.*

3. До сих пор мы не делали никаких специальных предположений о виде функций $f(t - R/c)$ или $\mathbf{p}(t - R/c)$. Предположим теперь, что осциллятор совершает *незатухающие синусоидальные колебания*, т. е. предположим, что

$$f(t) = \cos\omega t, \quad \mathbf{p}\left(t - \frac{R}{c}\right) = \mathbf{p}_0 f\left(t - \frac{R}{c}\right) = \mathbf{p}_0 \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right),$$

или в комплексной форме (см. § 80):

$$\mathbf{p}\left(t - \frac{R}{c}\right) = \mathbf{p}_0 e^{i\omega(t - R/c)}, \tag{99.9}$$

где ω есть циклическая частота колебаний.

В этом случае, согласно уравнению (99.1),

$$\mathbf{P}(t, R) = \frac{\mathbf{p}_0 \exp[i\omega(t - R/c)]}{R},$$

откуда

$$\frac{\partial P}{\partial R} = p_0 \left(-\frac{1}{R^2} - \frac{i\omega}{cR}\right) e^{i\omega(t - R/c)} = -\left(\frac{1}{R} + \frac{i\omega}{c}\right) P$$

и

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R \frac{\partial P}{\partial R}\right) = -\frac{\partial}{\partial R}\left\{\left(1 + \frac{i\omega R}{c}\right) P\right\} = \left(\frac{1}{R} + \frac{i\omega}{c} - \frac{\omega^2 R}{c^2}\right) P;$$

дифференцирование же P по t сводится, очевидно, к умножению на $i\omega$.

Стало быть, в этом случае отличные от нуля слагающие векторов **E** и **H** равны

$$H_\alpha = \sin\vartheta \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{R}+\frac{i\omega}{c}\right)P = \frac{i\omega}{c}\sin\vartheta\left(\frac{1}{R}+\frac{i\omega}{c}\right)P,$$

$$E_R = 2\cos\vartheta\left(\frac{1}{R^2}+\frac{i\omega}{cR}\right)P, \qquad (99.10)$$

$$E_\vartheta = \sin\vartheta\left(\frac{1}{R^2}+\frac{i\omega}{cR}-\frac{\omega^2}{c^2}\right)P.$$

4. Таковы точные выражения слагающих электромагнитных векторов в поле осциллятора, совершающего синусоидальные колебания. Они довольно сложны, поэтому мы ограничимся более подробным рассмотрением только двух крайних случаев — поля в непосредственной близости к осциллятору и поля на значительном расстоянии от него.

Что же, однако, должно служить при этом мерилом расстояния? Отношение абсолютных величин членов полиномов, входящих множителями в правые части уравнений (99.10), определяется отношением $1/R$ к $\omega/c = 2\pi/(Tc)$, где T есть период колебаний осциллятора. Мы увидим в дальнейшем, что $Tc = \lambda$, где λ есть длина электромагнитной волны, излучаемой осциллятором, так что $\omega/c = 2\pi/\lambda$. Соответственно этому мы будем под близкими к осциллятору точками понимать точки, расстояние которых от осциллятора удовлетворяет требованию

$$\frac{1}{R} \gg \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

или

$$R \ll \frac{\lambda}{2\pi},$$

т. е. расстояние которых от осциллятора мало по сравнению с длиной его волны [1].

На этих расстояниях от осциллятора

$$\omega\left(t-\frac{R}{c}\right) = \omega t - \frac{\omega R}{c} \sim \omega t,$$

так что

$$P(t, R) = \frac{p(t-R/c)}{R} \sim \frac{p(t)}{R}.$$

Таким образом, как и следовало ожидать, вблизи осциллятора поле его в каждый данный момент времени t определяется *одновременным* с t значением момента осциллятора $p(t)$ и его производной $\partial p(t)/\partial t$.

[1] Конечно, R должно быть все же настолько больше длины осциллятора l, чтобы его можно было считать диполем [см. уравнение (98.1)]. Обоим требованиям можно удовлетворить одновременно лишь в том случае, если $l \ll \lambda$. В случае простого вибратора Герца это условие не удовлетворяется; однако существуют типы вибраторов, этому условию удовлетворяющие.

Далее, при $1/R \gg \omega/c$ можно с достаточной точностью ограничиться лишь первыми членами полиномов, входящих в выражение (99.10), т. е. можно положить:

$$H_\alpha = \frac{i\omega}{c}\sin\vartheta\,\frac{1}{R}\,P = \frac{i\omega}{c}\sin\vartheta\,\frac{p(t)}{R^2} = \frac{\sin\vartheta}{R^2}\,\frac{1}{c}\,\frac{\partial p(t)}{\partial t}\ ^{1}),$$
$$E_R = \frac{2\cos\vartheta}{R^2}\,P = \frac{2\cos\vartheta}{R^3}\,p(t), \qquad (99.11)$$
$$E_\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{R^2}\,P = \frac{\sin\vartheta}{R^3}\,p(t).$$

Сравнивая эти выражения с уравнением (10.5), убедимся, что в каждый данный момент времени t электрическое поле вблизи осциллятора, как и следовало ожидать, совпадает с полем *статического диполя*, электрический момент которого $\mathbf{p}$ равен мгновенному значению момента осциллятора $\mathbf{p}(t)$. Что же касается поля магнитного, то ввиду $H_\vartheta = H_R = 0$ можно записать выражение для $\mathbf{H}$ в следующей векторной форме:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{cR^3}\left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}\,\mathbf{R}\right].$$

Если осциллятор можно уподобить отрезку прямолинейного тока, то на основании уравнения (98.9) получаем

$$\mathbf{H} = \frac{J}{c}\,\frac{[\mathbf{lR}]}{R^3}. \qquad (99.12)$$

Таким образом, вблизи осциллятора его магнитное поле совпадает с полем эквивалентного элемента тока длины l, определяемым формулой Био и Савара (42.2). Заметим, что вблизи осциллятора его электрическое поле убывает обратно пропорционально кубу, а магнитное — обратно пропорционально квадрату расстояния от осциллятора.

5. Перейдем теперь к рассмотрению поля вдали от осциллятора, т. е. положим, что

$$\frac{1}{R} \ll \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

или

$$R \gg \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Области поля, расстояние которых от осциллятора удовлетворяет этому условию, т. е. расстояние которых велико по сравнению с длиной волны осциллятора, называются *волновой зоной* осциллятора; смысл этого термина выяснится ниже.

В волновой зоне все члены входящих в уравнение (99.10) полиномов, содержащие в знаменателе R, исчезающе малы по срав-

[1]) Ибо $i\omega p(t) = \partial p(t)/\partial t$.

нению с членами, R не содержащими, так что с достаточной точностью можно положить

$$H_\alpha = \frac{i\omega}{c}\sin\vartheta\,\frac{i\omega}{c}P = -\frac{\omega^2}{c^2}\sin\vartheta\,\frac{p(t-R/c)}{R},$$

$$E_R = 0, \quad E_\vartheta = -\frac{\omega^2}{c^2}\sin\vartheta P = -\frac{\omega^2}{c^2}\sin\vartheta\,\frac{p(t-R/c)}{R} = H_\alpha.$$

Внося сюда выражение p из уравнения (99.9) и ограничиваясь вещественной частью решения, получим окончательно:

$$\begin{aligned} &E_R = E_\alpha = H_R = H_\vartheta = 0, \\ &E_\vartheta = H_\alpha = -\frac{\omega^2\sin\vartheta}{c^2R}p_0\cos\omega\left(t-\frac{R}{c}\right), \end{aligned} \tag{99.13}$$

что можно записать также и в следующей форме:

$$E_\vartheta = H_\alpha = \frac{\sin\vartheta}{R}\,\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 p(t-R/c)}{\partial t^2}. \tag{99.14}$$

Заметим, что это последнее выражение [так же, как и формулы (99.11) и (99.12)] остается справедливым при *любой* форме зависимости электрического момента осциллятора от времени (в том числе, например, и при затухающих его колебаниях). Действительно, любая функция времени может быть разложена в ряд или интеграл Фурье, т. е. может быть представлена в виде суммы синусоидальных функций, к каждой из которых применима формула (99.14). Так как в эту формулу частота ω не входит, то она остается применимой и ко всей сумме, т. е. к произвольному $p(t)$ [1].

Итак, как следует из уравнений (99.13) и (99.14), *в волновой зоне осциллятора напряженности электрического и магнитного полей численно равны друг другу и убывают обратно пропорционально первой степени расстояния от осциллятора* [2]. Напряженность поля зависит, помимо R, также и от полярного угла ϑ рассматриваемой точки поля: на продолжении оси осциллятора ($\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$) поле равно нулю, максимального же значения оно достигает в экваториальной плоскости осциллятора ($\vartheta = \pi/2$). В каждой точке волновой зоны *векторы* $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ *и* $\mathbf{R}$ *взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему* (рис. 82), причем $\mathbf{E}$ направлено по дуге меридиана, а $\mathbf{H}$ — по дуге

[1] Конечно, формула (99.14) будет при этом применима только на таких расстояниях R от осциллятора, на которых условие $1/R \ll \omega/c$ выполняется для всех частот ω, представленных с заметной интенсивностью в разложении функции $p(t)$. Аналогичное замечание относится и к применимости формул (99.11) и (99.12).

[2] Тогда как вблизи осциллятора они убывают обратно третьей и второй степени расстояния.

параллельного круга. Наконец, и это самое существенное, фаза $\omega(t - R/c)$ векторов поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ распространяется по направлению радиуса-вектора со скоростью c. Иными словами, фаза этих векторов на расстоянии $R + dR$ от осциллятора отстает на $\tau = dR/c$ секунд от той фазы, которой обладают эти векторы на расстоянии R от осциллятора (ибо $t-(R+dR)/c = t - \tau - R/c$).

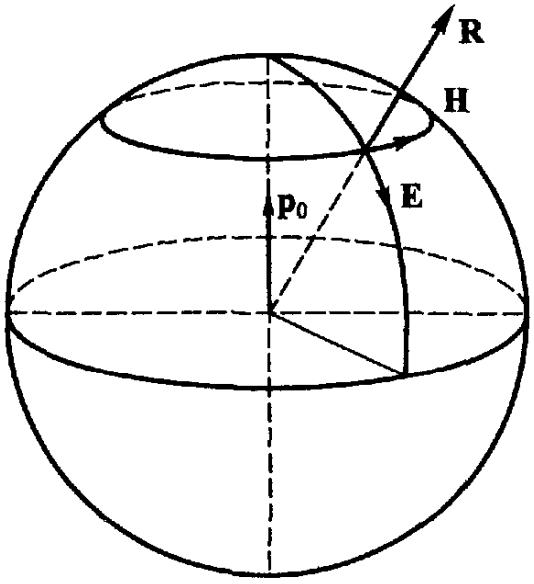

Рис. 82

Всякий периодический процесс, не сосредоточенный в одной точке, а охватывающий определенную область пространства, фаза которого распространяется с определенной скоростью, называется *волной* [1]. Стало быть, в волновой зоне осциллятора распространяется электромагнитная волна скорости c. Длиной волны λ, как известно, называется измеренное вдоль направления распространения волны расстояние между двумя последовательными точками, в которых векторы поля изменяются синхронно (т. е. в такт). Расстояние это равно

$$\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega},$$

ибо

$$\cos\omega\left(t - \frac{R+\lambda}{c}\right) = \cos\left\{\omega\left(t - \frac{R}{c}\right) - 2\pi\right\} = \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right).$$

Излучаемая осциллятором волна называется *шаровой*, ибо фаза волны в каждой точке поля зависит, помимо времени, лишь от расстояния этой точки от центра излучения (т. е. от осциллятора), а направление распространения волны совпадает с направлением радиусов-векторов, проведенных от центра излучения [2].

6. То же направление имеет и поток энергии в волновой зоне осциллятора, ибо, как легко убедиться, направление вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$ [уравнение (92.5)] в каждой точке этой зоны совпадает с направлением радиуса-вектора $\mathbf{R}$. Числовая же величина вектора Пойнтинга равна

$$S = \frac{c}{4\pi}\,|[\mathbf{EH}]| = \frac{c}{4\pi}\,EH = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\sin^2\vartheta}{R^2c^3}\left(\frac{\partial^2 p(t - R/c)}{\partial t^2}\right)^2. \qquad (99.15)$$

[1] Впрочем, волны этого типа представляют собой лишь частный случай широкого класса процессов, включаемых в понятие волны (волны немонохроматические, стоячие, затухающие во времени, волновые импульсы и т. д.)

[2] Напомним, что значения E и H шаровой волны зависят не только от R, но и от полярного угла ϑ.

Следовательно, общий поток энергии Σ через поверхность сферы радиуса R с центром в осцилляторе, элемент поверхности которой равен

$$R^2 \sin\vartheta \, d\alpha \, d\vartheta,$$

определяется выражением

$$\Sigma = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\vartheta S R^2 \sin\vartheta = \frac{1}{2c^3} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right)^2 \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= \frac{2}{3c^3} \left(\frac{\partial^2 p(t - R/c)}{\partial t^2}\right)^2. \quad (99.16)$$

В частности, если осциллятор совершает гармонические колебания циклической частоты $\omega = 2\pi/T$, так что [1])

$$p\left(t - \frac{R}{c}\right) = p_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\right],$$

то общий поток энергии через поверхность сферы за время одного полного периода будет равен

$$\int_0^T \Sigma \, dt = \frac{2\omega^4 p_0^2}{3c^3} \int_0^T \cos^2\omega\left(t - \frac{R}{c}\right) dt = \frac{p_0^2 \omega^4 T}{3c^3} = \frac{2\pi p_0^2 \omega^3}{3c^3}.$$

Выражая ω через длину волны λ, получим

$$\int_0^T \Sigma \, dt = \frac{2\pi p_0^2}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3.$$

Наконец, среднее излучение осциллятора за единицу времени равно

$$\overline{\Sigma} = \frac{1}{T} \int_0^T \Sigma \, dt = \frac{c p_0^2}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4. \quad (99.17)$$

7. Таким образом, осциллятор непрерывно излучает энергию в окружающее его пространство, причем, согласно уравнению (99.17), средняя скорость излучения энергии $\overline{\Sigma}$ пропорциональна квадрату амплитуды его электрического момента p_0^2 и обратно пропорциональна четвертой степени длины волны λ^4. Этим последним обстоятельством объясняется, например, тот факт, что для радиотелеграфирования необходимо пользоваться сравнительно короткими электромагнитными волнами длиной от де-

[1]) При вычислении квадрата p необходимо отбросить мнимую часть комплексного выражения (99 9) (ср § 80, с 370)

сятков метров до десятков километров; напротив, излучение медленнопеременных токов, применяемых в технике сильных токов (сотни и тысячи периодов в секунду, чему соответствуют волны длиной в тысячи и десятки тысяч километров), остается практически незаметным.

Тем же характером зависимости излучения осциллятора от длины волны объясняется, например, голубой цвет неба. Пронизывающий атмосферу солнечный свет рассеивается молекулами воздуха, которые могут быть уподоблены элементарным осцилляторам. Рассеяние света обусловливается тем, что под воздействием световых волн осцилляторы эти совершают «вынужденные» колебания. Так как период собственных колебаний осцилляторов, соответствующих молекулам воздуха, существенно отличается от периода видимого света (отсутствие резонанса), то амплитуда p_0 вынужденных колебаний осцилляторов слабо зависит от периода (или длины) световой волны Поэтому интенсивность рассеянного света, т. е. интенсивность вынужденного излучения этих осцилляторов, обратно пропорциональна λ^4. Таким образом, коротковолновый свет (синий) рассеивается сильнее, чем, например, красный, что и создает голубой цвет неба.

8. За время одного периода через любую охватывающую осциллятор замкнутую поверхность (в том числе и через поверхности, лежащие вне волновой зоны, т. е. вблизи осциллятора) протекает одинаковое количество энергии. В этом можно убедиться непосредственным вычислением, в частности, для концентрических с осциллятором шаровых поверхностей волновой зоны это явствует из независимости формулы (99.17) от радиуса сферы Впрочем, справедливость этого положения непосредственно вытекает из сделанного нами предположения, что в окружающем осциллятор пространстве нет ни проводников, ни электрических зарядов, ввиду чего излучаемая осциллятором электромагнитная энергия не может переходить в иные формы энергии и должна *без потери* переноситься в отдаленные участки пространства Вместе с тем становится понятным и характер зависимости $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ от расстояния R в волновой зоне осциллятора Чтобы общее излучение через концентрическую осциллятору сферическую поверхность не зависело от ее радиуса, необходимо, чтобы плотность потока энергии S была обратно пропорциональна R^2 (ибо поверхность сферы пропорциональна R^2). С другой стороны, в волновой зоне ввиду взаимной перпендикулярности и численного равенства векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$

$$S = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{4\pi} E^2 = \frac{c}{4\pi} H^2.$$

Следовательно, E и H в волновой зоне должны убывать обратно первой степени R. Вблизи осциллятора, т. е вне волновой зоны, характер поля гораздо сложнее, однако среднее за время одно-

го периода количество энергии, вытекающее через поверхность сферы, также не зависит от ее радиуса.

В заключение заметим, что осциллятор может совершать незатухающие колебания лишь в том случае, если эти колебания поддерживаются действующими извне периодическими электродвижущими силами; в противном случае колебания осциллятора будут затухать не только благодаря переходу его электромагнитной энергии в джоулево тепло, но также и благодаря излучению, т. е. благодаря уносу энергии излучаемыми им электромагнитными волнами. Впрочем, если затухание колебаний достаточно мало, то в течение *ограниченного числа* периодов амплитуду колебаний можно считать практически постоянной и применять к полю затухающих колебаний результаты, полученные для колебаний незатухающих.

З а д а ч а 37. В радиотехнике принято характеризовать потерю энергии какой-либо системы (например, антенны) на излучение так называемым «сопротивлением излучения» этой системы R_λ, определяемым из отношения

$$\overline{\Sigma} = R_\lambda \overline{J^2}$$

[ср. уравнение (90.15)], где J — сила тока в системе. Показать с помощью уравнений (98.9), что сопротивление излучения вибратора Герца равно

$$R_\lambda = \frac{2}{3c}\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)^2,$$

или в практических единицах

$$R'_\lambda = 20\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)^2 \text{ Ом},$$

где l — длина вибратора, а λ — длина волны излучения.

З а д а ч а 38. Показать, исходя из уравнения (98.13), что в волновой зоне поле переменного магнитного диполя $\mathbf{M}$ отличается от поля электрического диполя (осциллятора) равного момента $\mathbf{p} = \mathbf{M}$ заменой $\mathbf{E}$ на $-\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}$ на $-\mathbf{E}$, т. е. что в волновой зоне магнитного диполя

$$E_R = E_\vartheta = H_R = H_\alpha = 0, \quad E_\alpha = H_\vartheta = -\frac{\sin\vartheta}{c^2 R}\frac{\partial^2}{\partial t^2} M\left(t - \frac{R}{c}\right). \tag{99.18}$$

§ 100. Электромагнитная природа света. Плоские волны в диэлектрике

1. В § 97 мы убедились, что скорость распространения электромагнитных волн в вакууме совпадает со скоростью света, а в § 99 на частном примере электромагнитных волн, излучаемых осциллятором, убедились, что волны эти, подобно волнам свето-

вым, суть волны *поперечные*, т. е. что векторы **E** и **H** волнового поля перпендикулярны к направлению распространения волны.

Это совпадение существеннейших свойств световых и электромагнитных волн заставляет предположить, что первые представляют собой лишь частный случай вторых и отличаются от невидимых электромагнитных волн лишь своей частотой или длиной волны. Если это так, то под «световым вектором» (формальное понятие, которым оперирует волновая оптика) нужно, очевидно, понимать либо электрический, либо магнитный вектор электромагнитной световой волны, ибо как **E**, так и **H** перпендикулярны к направлению волны (что и требуется от светового вектора). Иными словами, направление поляризации, например, линейно поляризованного света должно определяться направлением векторов **E** и **H**[1]).

Эти предположения действительно подтверждаются более глубоким изучением свойств электромагнитных волн и сравнением их со свойствами света, так что в настоящее время можно с уверенностью сказать, что выяснение электромагнитной природы света является одним из прочнейших и важнейших завоеваний физики XIX столетия.

В этом параграфе мы рассмотрим один из простейших вопросов теории электромагнитных волн — распространение *плоских монохроматических* волн в однородных *диэлектриках*.

2. Волна называется *плоской*, если в любой момент времени во всех точках любой плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, векторы поля имеют одинаковое значение. Иными словами, если выбрать ось z по направлению распространения волны, то векторы **E** и **H** поля плоской волны должны зависеть только от координаты z, но не от координат x и y. Рассмотрение подобных плоских волн имеет вполне определенное физическое значение, ибо, например, в достаточном удалении от осциллятора ограниченный участок излучаемой им сферической волны можно с достаточной точностью считать плоским.

---

[1]) Экспериментальная оптика оперирует понятием *плоскости поляризации* света. Линейно поляризованный свет можно получить путем отражения под надлежащим углом неполяризованного света от отражающей поверхности. *Плоскость падения света на эту отражающую поверхность, по определению*, называется плоскостью поляризации отраженного поляризованного света.

В прошлом столетии весьма оживленно дискутировался вопрос о том, параллелен ли или перпендикулярен световой вектор линейно поляризованной волны плоскости поляризации этой волны. На первом предположении базировались теории Грина, Неймана и др., на втором — теория Френеля С точки зрения электромагнитной теории света вопрос этот сводится просто к тому, называть ли световым вектором напряженность магнитного или же электрического поля волны. Из опытов Винера (см. о них: *Ландсберг*, Оптика. — М.: Физматлит, 2003 С. 106) явствует, что магнитный вектор световой волны **H** параллелен, а электрический вектор **E** перпендикулярен ее плоскости поляризации.

Волна называется *монохроматической* (по-гречески — одноцветной; термин заимствован из оптики), если поле волны является гармонической (синусоидальной) функцией времени. Стало быть, комплексные выражения векторов поля плоской монохроматической волны должны иметь вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}(z)e^{\imath\omega t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}(z)e^{\imath\omega t}, \tag{100.1}$$

где (вообще говоря, комплексные) векторы $\mathbf{A}(z)$ и $\mathbf{B}(z)$ зависят только от координаты z; конечно, непосредственное физическое значение имеет только вещественная часть этих выражений (§ 80, с. 369).

3. Предположим, что рассматриваемый нами диэлектрик однороден (ε и μ постоянны) и лишен свободных электрических зарядов ($\rho = 0$). Полагая в уравнении Максвелла (I) $\mathbf{j} = 0$, имеем

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{H}; \tag{I}$$

дифференцируя это выражение по времени и внося затем в него значение $\partial\mathbf{H}/\partial t$ из уравнения (II):

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathbf{E}, \tag{II}$$

получим на основании уравнения (42_3^*):

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{c}{\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{c}{\mu}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}).$$

Так как при $\rho = 0$ и $\varepsilon = \text{const}$ уравнение (IV) принимает вид

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \varepsilon\operatorname{div}\mathbf{E} = 0,$$

то, стало быть,

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla^2\mathbf{E}. \tag{100.2}$$

Так как уравнения (I) и (II) симметричны относительно $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (вплоть до знака), то совершенно аналогичным образом получим

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = \nabla^2\mathbf{H}. \tag{100.3}$$

4. Справедливость уравнений (100.2) и (100.3) ограничена лишь требованием однородности среды и отсутствия в ней токов проводимости и свободных зарядов. В случае же плоских монохроматических волн уравнения эти на основании уравнения (100.1) могут быть записаны в следующей форме (по сокращении на $e^{\imath\omega t}$):

$$-\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\mathbf{A}(z) = \nabla^2\mathbf{A}(z) = \frac{\partial^2\mathbf{A}(z)}{\partial z^2}, \quad -\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\mathbf{B}(z) = \nabla^2\mathbf{B}(z) = \frac{\partial^2\mathbf{B}(z)}{\partial z^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{A} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{B} = 0,$$

где нами введено обозначение

$$k^2 = \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2}, \quad k = \omega \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c}. \tag{100.4}$$

Решения этих уравнений, как известно, имеют вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-\imath kz} + \mathbf{A}'_0 e^{\imath kz}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-\imath kz} + \mathbf{B}'_0 e^{\imath kz},$$

где $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}'_0$, $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}'_0$ суть произвольные постоянные интегрирования. Внося эти выражения в уравнение (100.1), получим

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}_0 e^{\imath(\omega t - kz)} + \mathbf{A}'_0 e^{\imath(\omega t + kz)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}_0 e^{\imath(\omega t - kz)} + \mathbf{B}'_0 e^{\imath(\omega t + kz)}.$$

Первые члены этих выражений представляют собой волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z, а вторые — волну, распространяющуюся в обратном направлении. Без существенного ограничения общности рассуждения можно ограничиться рассмотрением лишь одной из этих волн, например первой, и положить

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}_0 e^{\imath(\omega t - kz)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}_0 e^{\imath(\omega t - kz)}. \tag{100.5}$$

$\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{B}_0$ суть амплитуды векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$; независимость этих амплитуд от координат означает, что *распространение плоских волн в диэлектрике не связано с изменением их интенсивности*. Амплитуды $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{B}_0$ являются, вообще говоря, величинами комплексными.

5. Скорость волны, согласно (100.5), равна ω/k, ибо в момент t_0 значения векторов поля в плоскости $z = z_0$ совпадают с теми значениями, которыми эти векторы обладали в момент $t_0 - 1$ в плоскости $z = z_0 - \omega/k$. Это явствует из равенства соответствующих фаз:

$$\omega t_0 - k z_0 = \omega(t_0 - 1) - k\left(z_0 - \frac{\omega}{k}\right).$$

Согласно уравнению (100.4), скорость эта равна

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \tag{100.6}$$

что совпадает с общими результатами, полученными в § 94–96 [уравнение (94.7)].

Заметим, что величина k весьма просто связана с длиной волны λ; внося в уравнение (100.6) значение $\omega = 2\pi/T$, получим

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{100.7}$$

Таким образом, k равно числу волн, укладывающихся на отрезке в 2π см, и поэтому называется *волновым числом.*

6. Для упрощения дальнейших вычислений заметим, что, согласно уравнению (100.5), дифференцирование векторов плоской волны по z сводится к умножению их на $-ik$. Так как, с другой стороны, эти векторы не зависят от x и y, то символическое умножение их на дифференциальный оператор набла сводится к умножению на обычный вектор $-ik\mathbf{k}$, так что в применении к этим векторам

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} = -ik\mathbf{k}$$

(не смешивать единичные векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$ по осям координат с мнимой единицей i и волновым числом k).

В том случае, если ось z координатной системы не совпадает с направлением распространения волны, достаточно, очевидно, заменить $\mathbf{k}$ единичным вектором $\mathbf{n}$, совпадающим с этим направлением:

$$\nabla = -ik\mathbf{n}. \tag{100.8}$$

На основании этого соотношения максвелловы уравнения (III) и (IV) принимают вид

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \nabla\mu\mathbf{H} = -ik\mu\mathbf{n}\mathbf{H} = 0,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \nabla\varepsilon\mathbf{E} = -ik\varepsilon\mathbf{n}\mathbf{E} = 0,$$

откуда следует, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ перпендикулярны к $\mathbf{n}$, т. е. перпендикулярны к направлению волны. Таким образом, *плоские электромагнитные волны, как и волны шаровые, суть волны поперечные.*

Дифференцирование векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ по времени, согласно уравнению (100.5), сводится к умножению их на $i\omega$, ввиду чего с помощью уравнения (100.8) уравнение (II) может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{i\omega\mu}{c}\mathbf{H} = -\operatorname{rot}\mathbf{E} = -[\nabla\mathbf{E}] = ik[\mathbf{n}\mathbf{E}].$$

Внося сюда значение k из уравнения (100.4) и деля уравнение на $i\omega\sqrt{\frac{\mu}{c}}$, получим [1])

$$\sqrt{\mu}\,\mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon}\,[\mathbf{n}\mathbf{E}]. \tag{100.9}$$

Из этого уравнения следует, во-первых, что *векторы* $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ *взаимно перпендикулярны* и, во-вторых, что взаимно перпендику-

[1]) Рассмотрение уравнения (I) не дает ничего нового и приводит к тем же результатам.

лярные *векторы* **n**, **E** и **H** *образуют правовинтовую систему* (рис. 83; ср. рис. 82). Далее, ввиду перпендикулярности **n** и **E** получаем следующее соотношение между числовыми значениями векторов **E** и **H**:

$$\sqrt{\mu}\,H = \sqrt{\varepsilon}\,|[\mathbf{nE}]| = \sqrt{\varepsilon}\,E. \qquad (100.10)$$

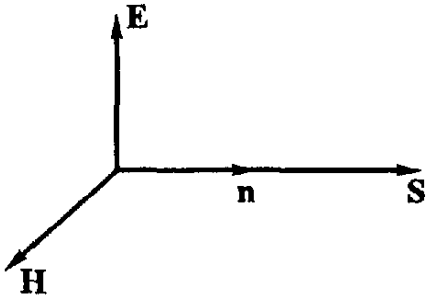

Рис. 83

Таким образом, отношение числовых значений векторов **E** и **H** от времени не зависит, т. е. векторы эти обладают *одинаковыми фазами* и изменяются синхронно.

7. Обращаясь к определению нелинейных функций векторов поля (энергия, вектор Пойнтинга и т. д.), мы должны предварительно перейти к *вещественным частям* комплексных выражений (100.5) (см § 80, с. 370). В последующих формулах мы соответственно этому будем считать векторы **E** и **H** вещественными.

Согласно уравнению (100.10) *плотность магнитной энергии* в поле волны оказывается *равной плотности энергии электрической*:

$$w_{\text{м}} = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = w_{\text{э}},$$

стало быть,

$$w = w_{\text{м}} + w_{\text{э}} = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi} = \frac{\mu H^2}{4\pi}. \qquad (100.11)$$

Из рассмотрения рис. 83 явствует, что направление вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{EH}],$$

т. е. направление потока энергии в волне, совпадает с направлением ее распространения. Ввиду перпендикулярности векторов **E** и **H**

$$S = \frac{c}{4\pi}\,EH.$$

Выражая с помощью уравнения (100.10) H через E и воспользовавшись уравнениями (100.11) и (100.6), получим

$$S = \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{4\pi\sqrt{\mu}}\,E^2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,w = wv, \qquad (100.12)$$

откуда

$$S\,dt = wv\,dt.$$

Таким образом, количество энергии $S\,dt$, протекающее за элемент времени dt через единичную площадку, перпендикулярную к вектору S (т. е. перпендикулярную к направлению волны), равно количеству энергии $wv\,dt$, содержащейся в прилегающем

к этой площадке цилиндре высотой $v\,dt$. Физически это значит, что *скорость течения энергии* равна v, т. е. *совпадает с фазовой скоростью волны* [1]).

§ 101. Отражение и преломление плоских волн в диэлектриках

1. Несостоятельность механических теорий света прошлого столетия, основанных на представлении об упругом световом эфире, особенно отчетливо выявилась в безуспешных попытках этих теорий объяснить простейшие явления отражения и преломления света [2]). Напротив, для объяснения этих явлений с точки зрения электромагнитной теории света ни к каким специальным допущениям прибегать не приходится.

В этом параграфе мы рассмотрим преломление и отражение плоских монохроматических волн на поверхности раздела двух однородных диэлектриков *1* и *2*, диэлектрические постоянные которых обозначим через ε_1 и ε_2. Далее, примем для простоты, что $\mu_1 = \mu_2 = 1$; как мы увидим ниже, для *световых* волн это допущение общности наших рассуждений вовсе не ограничивает. При этих условиях скорость волн в первом и втором диэлектриках, согласно уравнению (100.6), будет соответственно равна

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}}. \tag{101.1}$$

В предшествующем параграфе мы для упрощения записи предполагали, что направление оси z выбрано так, чтобы она совпадала с направлением волны. Приступая к рассмотрению совокупности нескольких волн *различного* направления (падающей, отраженной и преломленной), мы, очевидно, должны предвари-

[1]) Фазовая скорость есть скорость распространения фазы волны. Равенство фазовой скорости и скорости энергии в изотропных средах нарушается лишь в случае наличия дисперсии, т. е. в случае зависимости фазовой скорости волны от ее длины. Объясняется это тем, что для определения скорости течения энергии нужно, собственно говоря, рассматривать не монохроматическую волну, а ограниченный во времени и пространстве световой импульс. В случае отсутствия дисперсии это обстоятельство не влияет на окончательный результат; в диспергирующих же средах скорость течения энергии оказывается равной не фазовой, а так называемой групповой скорости волн.

[2]) В частности, из теории упругости следует, что при преломлении или отражении *поперечных* волн должны возникать также *продольные* волны сжатия. Чтобы объяснить факт отсутствия продольных световых волн в эфире, необходимо было прибегнуть либо к гипотезе абсолютно несжимаемого эфира, либо к гипотезе эфира неустойчивого, обладающего отрицательной объемной упругостью. Любая из этих гипотез вела к дальнейшим противоречиям (см., например, *Хвольсон О.Д.* Курс физики. Т. V. — М.: Госиздат, 1923. Гл. «Электромагнитная теория света»).

тельно обобщить формулы предыдущего параграфа на случай произвольного направления осей координат. Пусть направление волны совпадает с направлением единичного вектора $\mathbf{n}$, образующего с осями координат x, y, z углы α, β, γ (рис. 84). В системе декартовых координат x', y', z', ось z' которой совпадает с $\mathbf{n}$, фаза этой волны в точке P должна, согласно уравнению (100.5), определяться выражением

$$\omega t - kz',$$

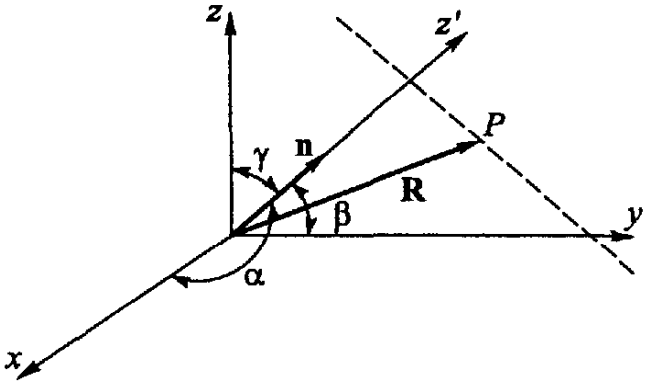

Рис. 84

где z' есть координата точки P. Эта координата равна проекции радиуса-вектора $\mathbf{R}$ точки P на направление $\mathbf{n}$ оси z'; стало быть,

$$z' = \mathbf{nR} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma, \qquad (101.2)$$

где x, y, z суть координаты той же точки P в исходной системе координат. Внося это в уравнение (100.5), получим искомые выражения векторов поля плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k\mathbf{nR})}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - k\mathbf{nR})}, \qquad (101.3)$$

где $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ суть постоянные комплексные амплитуды соответствующих векторов.

2. После этих подготовительных замечаний приступим к решению намеченной задачи. Пусть плоская волна (101.3), распространяющаяся в среде *1* в направлении $\mathbf{n}$, падает на плоскую поверхность раздела сред *1* и *2*. После проникновения в среду *2* волна эта должна будет, очевидно, распространяться с иной скоростью ($v_2 \neq v_1$) и, как мы увидим, вообще говоря, в ином направлении, не совпадающем с $\mathbf{n}$. Для определения амплитуды, направления и фазы этой, так называемой *преломленной* волны достаточно потребовать выполнения на поверхности раздела пограничных условий, перечисленных нами в § 91. При этом оказывается, что условия эти могут быть удовлетворены лишь в том случае, если допустить существование еще третьей, так называемой *отраженной* волны, распространяющейся в той же среде *1*, как и волна падающая, однако в направлении *от* поверхности раздела.

Обозначим комплексные векторы поля падающей волны через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, волны отраженной через $\mathbf{E}^r$ и $\mathbf{H}^r$ и, наконец, волны преломленной через $\mathbf{E}^g$ и $\mathbf{H}^g$ и положим, согласно уравнению (101.3), что

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k\mathbf{nR})}, \quad \mathbf{E}^r = \mathbf{E}^r_0 e^{i(\omega_r t - k_r \mathbf{n}_r \mathbf{R})}, \quad \mathbf{E}^g = \mathbf{E}^g_0 e^{i(\omega_g - k_g \mathbf{n}_q \mathbf{R})},$$

аналогичных выражений для $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}^r$ и $\mathbf{H}^g$ выписывать не будем. Первые две волны распространяются в среде *1*, так что результирующая напряженность поля в этой среде будет равна

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{E}^r,$$

тогда как поле в среде *2* будет равно

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}^g.$$

Рассмотрим какое-либо из пограничных условий на поверхности раздела, например условие (II′) непрерывности тангенциальных слагающих вектора $\mathbf{E}$. В рассматриваемом случае оно примет вид

$$E_t + E_t^r = E_t^g,$$

т. е.

$$E_{0t}e^{i(\omega t - k\mathbf{nR})} + E_{0t}^r e^{i(\omega_r t - k_r \mathbf{n}_r \mathbf{R})} = E_{0t}^g e^{i(\omega_g t - k_g \mathbf{n}_g \mathbf{R})}. \qquad (101.4)$$

Для того чтобы подобного рода условие могло выполняться при любом значении времени t, необходимо прежде всего, чтобы

$$\omega = \omega_r = \omega_g. \qquad (101.5)$$

Действительно, условие (101.4) имеет вид

$$ae^{i\omega t} + be^{i\omega_r t} = ce^{i\omega_g t},$$

где a, b и c от времени не зависят.

Дифференцируя это равенство по t, получим

$$\omega ae^{i\omega t} + \omega_r be^{i\omega_r t} = \omega_g ce^{i\omega_g t};$$

исключая из двух последних уравнений $ce^{i\omega_g t}$, получим

$$a(\omega - \omega_g)e^{i\omega t} = b(\omega_g - \omega_r)e^{i\omega_r t},$$

что может иметь место лишь при $\omega = \omega_r$. Исключая же из приведенных уравнений $e^{i\omega_r t}$, убедимся, что $\omega = \omega_g$. Стало быть, действительно $\omega = \omega_r = \omega_g$, т. е. *частота волны не изменяется при ее отражении и преломлении.*

Совершенно аналогичным образом можно убедиться, что должны выполняться равенства

$$k\mathbf{nR}' = k_r \mathbf{n}_r \mathbf{R}' = k_g \mathbf{n}_g \mathbf{R}', \qquad (101.6)$$

где $\mathbf{R}'$ — произвольный вектор, лежащий в плоскости раздела. Действительно, радиус-вектор $\mathbf{R}$ произвольной точки поверхности раздела может быть представлен в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}',$$

где $\mathbf{R}'$ лежит в плоскости раздела сред, а $\mathbf{R}_0$ — радиус-вектор некоторой, произвольно фиксированной точки этой поверхности.

Следовательно, пограничное условие может быть представлено в виде

$$a'e^{-\imath k\mathbf{n}\mathbf{R}'} + b'e^{-\imath k_r \mathbf{n}_r \mathbf{R}'} = c'e^{-\imath k_g \mathbf{n}_g \mathbf{R}'},$$

где величины a', b' и c' от координат вектора $\mathbf{R}'$ не зависят. Дальнейшее доказательство равенства (101.6) протекает вполне аналогично доказательству равенства (101.5).

3. Для дальнейших вычислений удобно перейти к координатным выражениям. Пусть ось z перпендикулярна плоскости раздела сред *1* и *2*. Тогда лежащий в этой плоскости вектор $\mathbf{R}'$ будет перпендикулярен оси z и уравнение (101.6) на основании уравнения (101.2) можно будет записать так:

$$k(x\cos\alpha + y\cos\beta) = k_r(x\cos\alpha_r + y\cos\beta_r) = k_g(x\cos\alpha_g + y\cos\beta_g),$$

где x и y — компоненты вектора $\mathbf{R}'$, а α, β; α_r, β_r; α_g, β_g суть соответственно углы векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}_r$ и $\mathbf{n}_g$ с осями x и y. Для упрощения записи выберем оси x и y так, чтобы направление распространения падающей волны $\mathbf{n}$ лежало в плоскости xz (рис. 85). В этом случае $\cos\beta = 0$. Так как приведенное уравнение должно выполняться во всех точках плоскости раздела, т. е. при любых значениях x и y, то из него непосредственно следует:

$$\cos\beta_r = \cos\beta_g = 0$$

и

$$k\cos\alpha = k_r\cos\alpha_r = k_g\cos\alpha_g.$$

Первое из этих уравнений означает, что направления *отраженной* и *преломленной волн* $\mathbf{n}_r$ и $\mathbf{n}_g$ *лежат* в плоскости xz, т. е. в *плоскости падения волны* [1]).

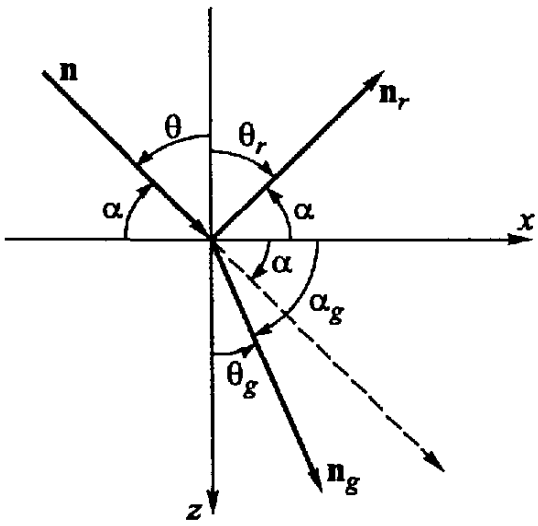

Рис. 85

Примем теперь во внимание, что падающая и отраженная волны распространяются в среде *1*, а преломленная — в среде *2* и что, стало быть, согласно уравнениям (100.6) и (101.5),

$$k = \frac{\omega}{v_1}, \quad k_1 = \frac{\omega}{v_1} = k, \quad k_g = \frac{\omega}{v_2}.$$

Следовательно, предшествующее уравнение может быть записано следующим образом:

$$\frac{1}{v_1}\cos\alpha = \frac{1}{v_1}\cos\alpha_r = \frac{1}{v_2}\cos\alpha_g. \qquad (101.7)$$

[1]) Плоскостью падения, как известно, называется плоскость, проходящая через направление падающей волны и через нормаль к пограничной поверхности.

Из этих равенств следует, во-первых, что [1] $\alpha_r = \alpha$. Вводя, как обычно, углы падения и отражения θ и θ_r (как явствует из рис. 85, $\theta = \pi/2 - \alpha$ и $\theta_r = \pi/2 - \alpha_r$), можем сказать, что *угол падения θ равен углу отражения θ_r*.

Далее, так как $\cos\alpha$ и $\cos\alpha_g$ имеют одинаковые знаки, то направления падающей и преломленной волн должны лежать в одном и том же квадранте плоскости xz (см. рис. 85).

Введя угол преломления $\theta_g = \pi/2 - \alpha_g$ и заметив, что $\cos\alpha = \sin\theta$ и $\cos\alpha_g = \sin\theta_g$, получим из уравнения (101.7):

$$\sin\theta/v_1 = \sin\theta_g/v_2,$$

или [2]

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta_g} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{101.8}$$

Таким образом, *отношение синусов углов падения и преломления есть величина постоянная*, зависящая лишь от свойств граничащих сред *1* и *2*. Отношение это, которое мы обозначим через n_{12}, как известно, называется *показателем преломления среды 2* относительно среды *1*. На основании уравнения (101.1) можем написать [3]

$$n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \tag{101.9}$$

4. Итак, из одного лишь факта существования на границе двух сред линейных условий типа (101.4) непосредственно следу-

---

[1]) Так как, по определению, значение направляющего угла не может превышать π, то решение $\alpha_r = 2\pi - \alpha$ отпадает.

[2]) Напомним, что, как известно из элементарного курса оптики, при $v_1/v_2 = n_{12} < 1$ определяемый уравнением (101.8) угол преломления θ_g принимает вещественные значения лишь в том случае, если угол падения θ не превышает так называемого угла внутреннего отражения Φ, определяемого уравнением $\sin\Phi = v_1/v_2 = n_{12}$. В противном случае (при $\theta > \Phi$) $\sin\theta_g = (\sin\theta)(v_2/v_1) = (\sin\theta/\sin\Phi) > 1$, и величина θ_g становится комплексной. Как показывает специальное рассмотрение вопроса, на котором мы останавливаться не будем, при этом должно наблюдаться так называемое *полное внутреннее отражение волн* В этом случае преломленная волна отсутствует, и электромагнитное поле во второй среде оказывается отличным от нуля лишь в весьма тонком слое (порядка длины волны), непосредственно прилегающем к поверхности раздела (см., например, *Хвольсон О.Д.* Курс физики Т. V. — М : Госиздат, 1923; *Борн М.*, *Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1973; *Ландсберг Г.С.* Оптика. — М.: Физматлит, 2003; *Сивухин Д.В.* Оптика. — М.: Физматлит, 2002)

Эти следствия теории вполне согласуются с данными эксперимента как в области длинных электромагнитных волн, так и в области волн световых.

[3]) Если $\mu_1 \neq 1$ и $\mu_2 \neq 1$, то $n_{12} = \sqrt{(\varepsilon_2\mu_2)/(\varepsilon_1\mu_1)}$. В тексте считается, что $n_{12} > 0$. Сравнительно недавно было обращено внимание на возможность существования сред, для которых следует полагать, что $n_{12} < 0$ (см. *Веселаго В.Г.* // УФН. 1967. Т. 92. С. 517). Эта возможность реализована и обсуждается в ряде статей (см. *Shelby R.A.*, *Smith D.R.*, *Shultz S.* // Science 2001. V. 292. P. 77; *Веселаго В.Г.* // УФН. 2002. Т. 172. С. 1215).

ют все *геометрические* законы преломления и отражения электромагнитных волн, совпадающие с соответствующими законами для волн световых. Более же детальное рассмотрение этих пограничных условий позволяет определить соотношение между квадратами амплитуд волны падающей и волн отраженной и преломленной. Эти соотношения оказываются тождественными с так называемыми *формулами Френеля*, определяющими сравнительную *интенсивность* отраженного и преломленного света в зависимости от коэффициента преломления, угла падения и поляризации падающего света. Этот вывод подтверждаемых опытом формул Френеля из общих положений электродинамики является одним из важнейших доказательств электромагнитной природы света. Не имея возможности приводить его здесь полностью, мы ограничимся рассмотрением простейшего случая, а именно случая *нормального* падения плоской волны на поверхность раздела диэлектриков $z = 0$.

Всякая плоская монохроматическая волна может быть разложена на совокупность двух линейно поляризованных волн, которые можно рассматривать порознь. Пусть электрический вектор падающей волны направлен по оси x:

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad E_y = E_z = 0.$$

Тогда, согласно (100.9), магнитный вектор падающей волны будет направлен по оси y и будет равен

$$H_x = H_z = 0, \quad H_y = \sqrt{\varepsilon_1}\, E_0 e^{i(\omega t - kz)}.$$

Согласно законам отражения и преломления (101.7) и (101.8) преломленная и отраженная волны будут направлены соответственно по и против оси z. Как легко убедиться путем рассмотрения пограничных условий, электрические векторы этих волн так же, как и в падающей волне, направлены по оси x, а их магнитные векторы — по оси y, так что отличные от нуля слагающие этих векторов равны

$$E_x^r = E_0^r e^{i(\omega t + kz)}, \qquad H_y^r = -\sqrt{\varepsilon_1}\, E_0^r e^{i(\omega t + kz)},$$

$$E_x^g = E_0^g e^{i(\omega t - k_g z)}, \qquad H_y^g = \sqrt{\varepsilon_2}\, E_0^g e^{i(\omega t - k_g z)}.$$

Перед выражением для H_y^r стоит знак минус в соответствии с тем, что отраженная волна распространяется противоположно оси z [см. уравнение (100.9)].

Внесем эти выражения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в пограничные условия. Условие (101.4) непрерывности тангенциальных слагающих вектора $\mathbf{E}$ на плоскости раздела $z = 0$ после сокращения на $e^{i\omega t}$ дает

$$E_0 + E_0^r = E_0^g.$$

Соответственно этому условие непрерывности тангенциальных слагающих вектора $\mathbf{H}$ дает

$$\sqrt{\varepsilon_1}\, E_0 - \sqrt{\varepsilon_1}\, E_0^r = \sqrt{\varepsilon_2}\, E_0^g.$$

Нормальные к поверхности раздела слагающие векторов поля равны нулю, и поэтому относящиеся к ним пограничные условия (III′) и (IV′) удовлетворяются тождественно.

Разрешая полученные уравнения и воспользовавшись соотношением (101.9), получаем

$$E_0^r = \frac{1-n_{12}}{1+n_{12}} E_0, \quad E_0^g = \frac{2}{1+n_{12}} E_0. \tag{101.10}$$

Переходя к действительным частям комплексных выражений и считая E_0 действительным, можем написать

$$E_x^g = \frac{2}{1+n_{12}} E_0 \cos(\omega t - k_g z),$$

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz), \quad E_x^r = \frac{1-n_{12}}{1+n_{12}} E_0 \cos(\omega t + kz).$$

Обозначая через $\overline{S}$, $\overline{S^r}$ и $\overline{S^g}$ средние за период плотности потока энергии в падающей, отраженной и преломленной волнах, получаем на основании (100.12):

$$\overline{S} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon_1}\,\overline{E_0^2\cos^2(\omega t - kz)} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}\,E_0^2,$$

$$\overline{S^r} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}\left(\frac{1-n_{12}}{1+n_{12}}\right)^2 E_0^2, \quad \overline{S^g} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_2}\left(\frac{2}{1+n_{12}}\right)^2 E_0^2. \tag{101.11}$$

Легко проверить с помощью (101.9), что эти выражения удовлетворяют закону сохранения, т. е. что средний за период поток энергии в падающей волне равен сумме средних потоков энергии в преломленной и отраженной волнах [1]):

$$\overline{S} = \overline{S^r} + \overline{S^g}. \tag{101.12}$$

Коэффициентом отражения r поверхности раздела двух сред называется отношение интенсивности отраженной волны к интенсивности падающей, или, иными словами, отношение средних за период потоков энергии в отраженной и в падающей волнах:

$$r = \frac{\overline{S^r}}{\overline{S}} = \left(\frac{1-n_{12}}{1+n_{12}}\right)^2. \tag{101.13}$$

При $n_{12} = 1$, т. е. при $v_1 = v_2$, отражения, конечно, не происходит.

Таким образом, нами определены все параметры, характеризующие отраженную и преломленную волны в случае нормального падения первичной волны на поверхность раздела. Полученные нами выражения совпадают с соответствующими формулами Френеля.

[1]) Конечно, закон сохранения выполняется не только для средних за период, но и для мгновенных значений потоков энергии.

5. Помимо вывода законов преломления и отражения света, которые были известны еще до выяснения его электромагнитной природы, изложенная нами теория позволяет установить непосредственное соотношение между коэффициентом преломления света n и диэлектрической проницаемостью ε [формула (101.9)]. В частности, коэффициент преломления диэлектрика относительно вакуума (для которого $\varepsilon = 1$) оказывается равным

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \tag{101.14}$$

Для некоторых диэлектриков (например, воздух, CO, бензол и т. д.) формула (101.14) действительно подтверждается опытом. Однако для многих веществ эта формула результатам измерений вовсе не соответствует:

Вещество	n	$\sqrt{\varepsilon}$
Вода	1,33	9,0
Метиловый спирт	1,34	5,7
Этиловый спирт	1,36	5,0

Более того, уже самый факт существования *дисперсии* света, т. е. зависимости коэффициента преломления от длины волны, доказывает несостоятельность формул (101.9) и (101.14), согласно которым n должно было бы иметь постоянное значение для всех электромагнитных волн.

6. Таким образом, феноменологическая максвеллова теория *макроскопического поля* приводит, вообще говоря, к неправильным значениям показателя преломления. Противоречие это, однако, весьма просто разрешается с точки зрения электронной теории *микроскопического* поля. Действительно, при выводе уравнений макроскопического поля в гл. II мы уподобили молекулы диэлектрика электрическим диполям. Если диполи эти *квазиупруги*, то они должны обладать собственным периодом колебания. Если этот собственный период близок к периоду световых волн, то амплитуда колебаний зарядов диполя, возбуждаемых переменным полем световой волны, должна существенно зависеть *не только от амплитуды* электрического поля волны $\mathbf{E}$, *но также и от периода* (или длины) световой волны (*резонанс*). Стало быть, и амплитуда переменного вектора поляризации диэлектрика $\mathbf{P}$, а вместе с тем и амплитуда вектора электрической индукции $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ должны существенно зависеть от периода или длины световой волны. Таким образом, при учете особенностей микроскопического строения диэлектриков мы должны прийти к определенной зависимости значения диэлектрической проницаемости от длины волны, а стало быть, согласно

но уравнению (101.14), и к выяснению явлений дисперсии света. Внося же в уравнение (101.14) значение диэлектрической проницаемости, измеренное в постоянном или медленно переменном поле, мы можем, очевидно, определить значение показателя преломления лишь для сравнительно длинных электромагнитных волн, период которых весьма велик по сравнению с собственным периодом колебания диполей диэлектрика. Для такого рода волн формула (101.14) действительно подтверждается опытом.

В том случае, если молекулы диэлектрика могут быть уподоблены *твердым* диполям, мы встречаемся с явлениями несколько иного характера. Существенная доля поляризации подобных диэлектриков сводится к повороту осей диполей (т. е. молекул) по направлению поля. В быстропеременных полях оси молекул диэлектрика, обладающих определенным моментом инерции, не успевают следовать за быстрыми изменениями направления поля. В результате диэлектрик поляризуется гораздо слабее, чем в постоянном электрическом поле той же напряженности. Поэтому значение диэлектрической проницаемости (а стало быть, и значение показателя преломления) в диэлектриках этого класса (вода, спирты и т. д.) быстро падает по мере уменьшения периода колебаний поля, причем это падение наступает при частотах гораздо меньших, чем частоты собственных колебаний квазиупругих молекулярных диполей (например, в некоторых спиртах уже при радиочастотах).

Совершенно аналогичным образом объясняется также и тот упомянутый в начале этого параграфа факт, что при изучении световых волн можно считать $\mu = 1$. Действительно, восприимчивость *диамагнитных* веществ всегда столь незначительна, что при определении скорости света по формуле $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ отличием μ от единицы можно пренебречь. Механизм же *парамагнитного* намагничения аналогичен механизму поляризации диэлектрика с твердыми диполями; поэтому парамагнитная восприимчивость $\varkappa$ становится практически равной нулю, а проницаемость μ равной единице при частотах гораздо меньших, чем частота видимого света. Наконец, намагничение *ферромагнетиков* обусловливается изменением направления намагничения в отдельных намагниченных до насыщения вейссовых областях, а также изменением размеров этих областей (см. § 72). Эти процессы также не успевают следовать за изменениями поля световой волны, так что в оптическом отношении ферромагнетики практически не отличаются от диамагнетиков [1].

[1] За исключением таких оптических явлений (как, например, эффект Фарадея вращения плоскости поляризации света в магнитном поле), которые зависят от намагничения, создаваемого в данном теле постоянным магнитным полем

§ 102. Распространение волн в проводящей среде. Отражение света от металлической поверхности

1. В диэлектриках электромагнитные волны распространяются без затухания, в хороших же проводниках — металлах — электромагнитные волны затухают настолько быстро, что даже тонкие слои металлов оказываются непрозрачными для волн. Объясняется это, конечно, тем, что энергия волны переходит по мере ее распространения в джоулево тепло, выделяемое возбуждаемыми полем волны токами проводимости.

Покажем, прежде всего, что распространение волн в *однородном* проводнике не связано с возникновением в нем свободных электрических зарядов. Внося в уравнение непрерывности (IVa) выражение (V) для плотности тока и предполагая, что сторонние электродвижущие силы в проводнике отсутствуют, получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{j} = -\lambda \operatorname{div}\mathbf{E} = -\frac{\lambda}{\varepsilon}\operatorname{div}\mathbf{D} = -\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\rho.$$

Решение этого дифференциального уравнения есть

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}t\right), \tag{102.1}$$

где ρ_0 — произвольная постоянная.

Следовательно, если даже каким-либо образом внести в проводник свободные объемные заряды, то плотность этих зарядов спадет с течением времени по экспоненциальному закону до нуля; чем больше электропроводность λ, тем быстрее произойдет это рассасывание зарядов. Электромагнитное поле вообще не может создать в проводнике объемных свободных зарядов, ибо если $\rho = 0$ в момент t_0, то, согласно (102.1), оно останется равным нулю и во все последующее время.

2. Рассмотрим монохроматическую волну частоты ω в металле, т. е. положим

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(x, y, z)e^{i\omega t}.$$

Внося эти выражения в уравнения Максвелла (I)–(IV), воспользовавшись уравнениями (V) и полагая, согласно (102.1), $\rho = 0$, получаем после сокращения на $e^{i\omega t}$.

$$\left(\frac{i\omega\varepsilon}{c} + \frac{4\pi\lambda}{c}\right)\mathbf{E}_0 = \operatorname{rot}\mathbf{H}_0, \quad \frac{i\omega\mu}{c}\mathbf{H}_0 = -\operatorname{rot}\mathbf{E}_0,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_0 = \operatorname{div}\mathbf{E}_0 = 0.$$

Эти уравнения отличаются от соответствующих уравнений в диэлектриках только тем, что в первом из них множитель $i\omega\varepsilon/c$ заменяется множителем $i\omega\varepsilon/c + 4\pi\lambda/c$. Иными словами, эти уравнения совпадут с уравнениями волны в диэлектрике, если в последних заменить ε на ε':

$$\varepsilon' = \varepsilon - \frac{4\pi\lambda}{\omega}i. \tag{102.2}$$

Таким образом, в отношении распространения монохроматических волн проводник эквивалентен диэлектрику *с комплексной диэлектрической проницаемостью* ε'. Поэтому при рассмотрении волн в металле мы можем непосредственно воспользоваться результатами, полученными в § 100 и 101 для волн в диэлектриках, произведя в формулах этих параграфов замену ε на ε'.

Так, например, волновое (комплексное) число k' определится в соответствии с (100.4) формулой

$$k'^2 = \frac{\varepsilon'\mu\omega^2}{c^2} = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2}\,i. \tag{102.3}$$

Целесообразно разложить k' на действительную и мнимую части:

$$k' = k - is, \quad k^2 - s^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}, \quad 2ks = \frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2}. \tag{102.4}$$

Мы условимся брать для k и s положительные корни этих уравнений. В соответствии с (102.4) и (100.5) поле плоской монохроматической волны в проводнике, распространяющейся вдоль оси z, выражается формулами

$$\begin{gathered}\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k'z)} = \mathbf{E}_0 e^{-sz} e^{i(\omega t - kz)}, \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-sz} e^{i(\omega t - kz)}.\end{gathered} \tag{102.5}$$

Таким образом, комплексность волнового числа k' соответствует наличию поглощения: амплитуда волны экспоненциально спадает по мере ее распространения. При $\lambda = 0$ мнимая часть s волнового числа k' обращается в нуль, и затухание волн прекращается.

В соответствии с (100.9) векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ волны в проводнике взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему; однако векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ обладают в проводнике *различными фазами*, а не одинаковыми, как в диэлектрике. Действительно, заменив в формуле (100.9) ε на ε', получим

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}}\,[\mathbf{nE}].$$

Так как множитель $\sqrt{\varepsilon'/\mu}$ комплексен, то фаза вектора $\mathbf{H}$ отлична от фазы $\mathbf{E}$. Подробнее об этом см. в § 103.

3. В § 90, посвященном скин-эффекту, мы тоже изучали периодическое поле в проводнике с тем единственным отличием от нашего теперешнего рассмотрения, что в § 90 мы пренебрегали токами смещения в проводнике по сравнению с токами проводимости. Так как, согласно § 88, токи смещения в металлах малы по сравнению с токами проводимости вплоть до частот, соответствующих инфракрасной части спектра ($\nu = \omega/2\pi \sim 10^{14}$ с$^{-1}$),

то результаты настоящего параграфа должны при меньших частотах лишь незначительно отличаться от результатов § 90.

Действительно, разрешая уравнения (102.4) относительно k и s, получаем

$$k^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{2c^2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon\omega}\right)^2}+1\right], \quad s^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{2c^2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon\omega}\right)^2}-1\right]. \tag{102.6}$$

Как указывалось в § 88, в металлах $\varepsilon\nu \ll \lambda$, т. е. $\varepsilon\omega \ll 2\pi\lambda$ вплоть до $\nu \sim 10^{14}$ с$^{-1}$; поэтому даже в случае световых волн можно в (102.6) пренебречь единицей по сравнению с $4\pi\lambda/\varepsilon\omega$. Таким образом, с достаточной степенью точности

$$k^2 = s^2 = \frac{2\pi\mu\lambda\omega}{c^2}, \tag{102.7}$$

что совпадает с выражением (90.5) для p^2. Таким образом, (102.5) практически совпадает с ранее найденным выражением (90.6) для электрического вектора волны в металле.

Как отмечалось в § 90, глубина проникновения волны в металл определяется величиной

$$\delta = \frac{1}{p} = \frac{1}{s},$$

ибо амплитуда волны спадает на этой глубине в e раз по сравнению с амплитудой на поверхности. Так как, согласно (100.7), длина волны, которую мы на этот раз для отличия от проводимости λ обозначим через l, равна $2\pi/k$ и так как $k = s$, то

$$\delta = \frac{1}{k} = \frac{l}{2\pi}. \tag{102.8}$$

Таким образом, на отрезке δ откладывается только $1/6$ часть длины волны, т. е. никакой *пространственной* периодичности поля волны в металле нет. В качестве иллюстрации приведем следующую табличку глубины проникновения в медь ($\lambda = 5{,}14 \cdot 10^{17}$ с$^{-1}$) полей различной частоты ω; в этой табличке l_0 означает длину соответствующей волны в вакууме: $l_0 = 2\pi c/\omega$.

l_0	10^{-4} см	1 см	100 м $= 10^4$ см
δ	$3{,}8 \cdot 10^{-7}$ см	$3{,}8 \cdot 10^{-5}$ см	$3{,}8 \cdot 10^{-3}$ см

4. Явления *отражения света* от металлической поверхности гораздо сложнее, чем отражение на границе диэлектриков; так, например, линейно поляризованная волна при отражении от металла становится эллиптически поляризованной (если угол падения не равен 90°). Мы ограничимся рассмотрением простейшего

случая нормального падения плоской монохроматической волны из вакуума на поверхность металла.

При решении этой задачи мы можем воспользоваться результатами § 101. Полагая, как и в § 101, что проницаемость среды μ равна единице и, кроме того, что металл граничит с вакуумом, мы должны будем в формулах § 101 заменить ε_1 на 1, а ε_2 на ε'. В частности, показатель преломления n' металла относительно вакуума, согласно (101.9), окажется равным

$$n' = \sqrt{\varepsilon'}, \tag{102.9}$$

т. е. будет иметь комплексное значение. Амплитуды электрического вектора отраженной и преломленной волн при нормальном падении волны на металл определяется формулой (101.10):

$$E_0^r = \frac{1-n'}{1+n'} E_0, \quad E_0^g = \frac{2}{1+n'} E_0. \tag{102.10}$$

Полагая в формулах § 101 $k = k_0$ и $k_g = k' = k - is$, получим

$$\begin{gathered} E_x = EE_0 e^{i(\omega t - k_0 z)}, \quad E_x^r = \frac{1-n'}{1+n'} E_0 e^{i(\omega t + k_0 z)}, \\ E_x^g = \frac{2}{1+n'} E_0 e^{-sz + i(\omega t - kz)}. \end{gathered} \tag{102.11}$$

Действительная часть этих комплексных выражений равна

$$\begin{gathered} E_x = E_0 \cos(\omega t - k_0 z), \quad E_x^g = \left|\frac{2}{1+n'}\right| E_0 e^{-sz} \cos(\omega t - kz - \psi), \\ E_x^r = \left|\frac{1-n'}{1+n'}\right| E_0 \cos(\omega t + k_0 z - \varphi), \end{gathered} \tag{102.12}$$

где углы φ и ψ должны быть определены из соотношений

$$\frac{1-n'}{1+n'} = \left|\frac{1-n'}{1+n'}\right| e^{-i\varphi}, \quad \frac{1}{1+n'} = \frac{1}{|1+n'|} e^{-i\psi}, \tag{102.13}$$

причем, например, $|1+n'|$ означает модуль комплексной величины $1+n'$. Таким образом, ввиду комплексности n' фазы отраженной и преломленной волн не будут, как это имеет место в диэлектриках, совпадать на границе раздела с фазой падающей волны, а будут сдвинуты относительно нее соответственно на углы φ и ψ.

В соответствии с (101.11) и (101.13) средние за период плотности потока энергии в падающей и отраженной волне и коэффициент отражения r будут равны

$$\overline{S} = \frac{c}{8\pi} E_0^2, \quad \overline{S^r} = \frac{c}{8\pi} \left|\frac{1-n'}{1+n'}\right|^2 E_0^2, \quad r = \left|\frac{1-n'}{1+n'}\right|^2. \tag{102.14}$$

Так как λ для металлов порядка $10^{16} - 10^{17}$ абс. ед. ($с^{-1}$), то $4\pi\lambda/\omega \gg 1$ вплоть до частот видимого света; стало быть, согласно (102.2) и (102.9), модуль n' также гораздо больше единицы.

Поэтому коэффициент отражения металлических поверхностей r близок к единице. Так, например, даже для желтой линии натрия r равно 0,95 для Ag , 0,85 для Au, 0,83 для Al, 0,74 для Cu и т. д.

§ 103. Световое давление. Количество движения электромагнитного поля

1. Тела, помещенные в поле световой волны, испытывают в этом поле (как и во всяком электромагнитном поле) механические (пондеромоторные) силы, которые принято называть *световым давлением*. Световое давление связано с поглощением и отражением света очень простой зависимостью, изучение которой приводит к весьма важным физическим следствиям.

Свет, распространяющийся в однородной прозрачной среде, не оказывает пондеромоторного воздействия на эту среду [1]), так что давление света связано либо с его поглощением, либо с изменением направления его распространения (отражение, преломление, рассеяние).

Ограничимся рассмотрением простейшего случая нормального падения света на поверхность металла. Металл при этом испытывает давление в направлении падающей волны. Давление это обусловливается тем, что поле волны возбуждает в металле периодические токи проводимости $\mathbf{j}$, которые подвергаются воздействию лоренцевой силы со стороны магнитного поля той же световой волны.

Подсчет величины этого давления мы произведем для случая, рассмотренного в предыдущем параграфе: волна частоты ω, электрический вектор которой направлен по оси x, распространяясь в вакууме вдоль оси z, отражается от поверхности металла $z = 0$. Электрическое поле $\mathbf{E}^g$ внутри металла определяется формулой (102.12); под воздействием этого поля в металле возникнут токи, направленные по оси x, плотность которых будет равна

$$j_x = \lambda E_x^g = \frac{2\lambda}{|1+n'|} E_0 e^{-sz} \cos(\omega t - kz - \psi). \qquad (103.1)$$

[1]) Это утверждение не совсем точно. Во-первых, даже прозрачная однородная среда испытывает в световом поле стрикционные силы (см. § 32 и 83) плотности:

$$f = \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad}\left\{E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\tau + H^2 \frac{\partial \mu}{\partial \tau}\tau\right\}.$$

Однако эти силы пульсируют с удвоенным периодом света и поэтому практически не поддаются наблюдению. Во-вторых, если прохождение света через среду сопровождается поворотом его плоскости поляризации, то элементы объема среды испытывают крутильное воздействие (см. § 104, примечание на с. 503).

Напряженность же магнитного поля внутри металла, согласно (100.9), будет направлена по оси y; полагая в (100.9) $\mu = 1$ и $\sqrt{\varepsilon} = n'$ [см. (102.9)], получим на основании (102.11) следующее комплексное выражение для H_y^g:

$$H_y^g = \frac{2n'}{1+n'} E_0 e^{-sz+i(\omega t-kz)}.$$

Положим

$$n' = |n'|e^{-i\chi}; \tag{103.2}$$

тогда с помощью (102.13) получим

$$\frac{n'}{1+n'} = \frac{|n'|}{|1+n'|} e^{-i(\psi+\chi)},$$

и, следовательно, действительная часть выражения для H_y^g равна

$$H_y^g = \frac{2|n'|}{|1+n'|} E_0 e^{-sz} \cos(\omega t - kz - \psi - \chi).$$

Плотность $\mathbf{f}$ пондеромоторных сил, испытываемых токами (103.1) в магнитном поле волны, определяется формулой (65.1):

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}[\mathbf{jH}]$$

(проницаемость μ металла считаем равной единице). Вектор $\mathbf{f}$ направлен по оси z и численно равен

$$f_z = \frac{1}{C}\lambda E_x^g H_y^g = \\ = \frac{4\lambda|n'|}{c|1+n'|^2} E_0^2 e^{-2sz} \cos(\omega t - kz - \psi)\cos(\omega t - kz - \psi - \chi);$$

среднее же за период значение этой плотности сил будет равно

$$\overline{f}_z = \frac{2\lambda|n'|}{c|1+n'|^2} E_0^2 e^{-2sz} \cos\chi.$$

Согласно (103.2) $|n'|\cos\chi$ равно действительной части комплексного показателя преломления $n' = \sqrt{\varepsilon'}$. С другой стороны, согласно (102.3) и (102.4), при $\mu = 1$

$$\varepsilon' = \frac{c^2 k'^2}{\omega^2}, \quad n' = \sqrt{\varepsilon'} = \frac{c}{\omega}k' = \frac{ck}{\omega} - i\frac{cs}{\omega}. \tag{103.3}$$

Поэтому $|n'|\cos\chi = ck/\omega$ и, следовательно,

$$\overline{f}_z = \frac{2k\lambda}{\omega|1+n'|^2} E_0^2 e^{-2sz}.$$

Ввиду наличия множителя e^{-2sz} плотность сил $\overline{f}_z$ весьма быстро убывает при удалении от поверхности металла в глубь него, так что силы эти можно считать сосредоточенными на поверхности металла и заменить приложенным к этой поверхности

давлением p:

$$p = \int_0^\infty \overline{f}_z \, dz = \frac{k\lambda}{s\omega|1+n'|^2} E_0^2.$$

Это давление p равно сумме сил $\overline{f}_z$, отнесенной к единице поверхности металла. Согласно (102.4) при $\mu = 1$, $\lambda/s = kc^2/(2\pi\omega)$, и поэтому окончательно

$$p = \frac{k^2c^2}{2\pi\omega^2|1+n'|^2} E_0^2. \tag{103.4}$$

2. Помимо давления p, связанного с действием лоренцевой силы на возбуждаемые в проводнике токи, на поверхность проводника действуют также силы, зависящие от его (действительной) диэлектрической проницаемости ε и проницаемости μ. Чтобы не усложнять вычислений, мы положим, что не только μ, но и ε металла равно единице; тогда формулой (103.4) будет определяться *полное* давление света на металл [1].

Покажем, что это давление p отличается только множителем $1/c$ от суммы средних за период плотностей потока энергии в падающей и отраженной волне:

$$p = \frac{1}{c}(\overline{S} + \overline{S}^r) = \frac{1+r}{c}\overline{S}, \tag{103.5}$$

где $\overline{S}$, $\overline{S}^r$ и r определяются формулами (102.14). Согласно этим формулам

$$1 + r = \frac{|1+n'|^2 + |1-n'|^2}{|1+n'|^2}.$$

Далее, согласно (103.3),

$$|1+n'|^2 + |1-n'|^2 = \left(1+\frac{ck}{\omega}\right)^2 + 2\frac{c^2s^2}{\omega^2} + \left(1-\frac{ck}{\omega}\right)^2 = 2\left(1+\frac{c^2(k^2+s^2)}{\omega^2}\right).$$

Выражая s^2 через k^2 с помощью (102.4) и полагая $\varepsilon = \mu = 1$, получаем

$$|1+n'|^2 + |1-n'|^2 = 4\frac{c^2k^2}{\omega^2}$$

и, следовательно,

$$\frac{1+r}{c}\overline{S} = \frac{4ck^2}{\omega^2|1+n'|^2}\overline{S} = \frac{ck^2}{2\pi\omega^2|1+n'|^2} cE_0^2,$$

[1] В случае произвольных ε и μ, помимо давления (103 4), нужно учесть также давление, обусловленное пондеромоторными силами

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{8\pi}\{E^2\nabla\varepsilon + H^2\nabla\mu\}.$$

Однако окончательная формула (103.5) и в этом случае остается справедливой для полного давления на поверхность проводника.

что действительно отличается от выражения (103.4) для p только множителем c.

3. Формула (103.5) позволяет определить *количество движения электромагнитного поля.*

Эволюция, которую испытало понятие количества движения или импульса, весьма аналогична эволюции понятия энергии. Подобно последнему, понятие количества движения вначале применялось только к механическим движениям; при этом оно определялось как произведение массы тела на его скорость. Закону сохранения механической энергии соответствует закон сохранения механического количества движения. Однако эти законы имеют лишь ограниченную область приложимости.

С течением времени понятия энергии и количества движения были обобщены так, что они стали охватывать не только механическую, но и всевозможные другие формы энергии и импульса. Это позволило сформулировать универсальные законы сохранения энергии и количества движения, учитывающие возможность превращения их из одной формы в другую. В частности, выяснение того факта, что свет оказывает давление на материальные тела, заставило приписать определенное количество движения и полю электромагнитной волны.

Действительно, будем исходить из универсальной применимости закона сохранения количества движения [1]. Пусть на плоскую поверхность находящегося в вакууме металлического зер-

---

[1]) Заметим, что справедливость закона сохранения количества движения является необходимым условием применимости закона сохранения энергии в произвольной инерциальной системе отсчета В качестве простейшего примера рассмотрим упругое соударение двух тел массы m_1 и m_2, скорости которых до и после соударения пусть будут соответственно $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ Согласно закону сохранения энергии,

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 U_1^2 + m_2 U_2^2.$$

Измеряя скорости этих тел по отношению к какой-либо другой системе отсчета S', равномерно движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно исходной системы S, получим $\mathbf{u}_1' = \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}$, $\mathbf{U}_1' = \mathbf{U}_1 - \mathbf{v}$ и т д Стало быть, $u_1^2 = u_1'^2 + 2\mathbf{u}_1'\mathbf{v} + v^2$ и т. д Таким образом, предшествующее равенство принимает вид

$$m_1 u_1'^2 + m_2 u_2'^2 + 2\mathbf{v}(m_1\mathbf{u}_1' + m_2\mathbf{u}_2') = m_1 U_1'^2 + m_2 U_2'^2 + 2\mathbf{v}(m_1\mathbf{U}_1' + m_2\mathbf{U}_2')$$

Следовательно, закон сохранения энергии будет справедлив в инерциальной системе S' только в том случае, если будет удовлетворяться равенство

$$\mathbf{v}(m_1\mathbf{u}_1' + m_2\mathbf{u}_2') = \mathbf{v}(m_1\mathbf{U}_1' + m_2\mathbf{U}_2'),$$

ввиду произвольности скорости $\mathbf{v}$ системы S' относительно исходной системы S это условие равносильно равенству

$$m_1\mathbf{u}_1' + m_2\mathbf{u}_2' = m_1\mathbf{U}_1' + m_2\mathbf{U}_2',$$

выражающему закон сохранения количества движения

Если бы мы исходили не из классической, а из релятивистской механики, то пришли бы к аналогичным соотношениям.

кала падает нормально к этой поверхности свет, оказывающий на нее давление p. Если площадь зеркала равна s, то общая сила, испытываемая зеркалом, будет равна $\mathbf{F} = ps\mathbf{n}$, где единичный вектор $\mathbf{n}$ совпадает по направлению с падающей волной. Согласно уравнениям механики сила $\mathbf{F}$ будет вызывать ускорение зеркала, причем механическое количество движения зеркала $\mathbf{G}_м$ будет изменяться по закону

$$\frac{d\mathbf{G}_м}{dt} = \mathbf{F} = ps\mathbf{n}.$$

Но если справедлив закон сохранения количества движения, то приращение $\mathbf{G}_м$ может происходить только за счет соответствующего изменения какой-то другой формы количества движения. Так как единственными процессами, сопровождающими в данных условиях ускорение зеркала, являются отражение и поглощение света, то носителем этой другой формы количества движения может быть только свет. Поэтому мы должны приписать электромагнитным волнам определенное *количество движения* или *импульс*, $\mathbf{G}$, причем изменение импульса света $\mathbf{G}$ в рассматриваемом процессе должно удовлетворять условию

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{G}_м + \mathbf{G}) = 0, \tag{103.6}$$

т. е. должно равняться

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = -ps\mathbf{n}.$$

Правая часть этого равенства представляет собой, строго говоря, не мгновенное значение силы, действующей на зеркало, а значение этой силы, усредненное по периоду световой волны. Поэтому и слева должна стоять производная от среднего за период количества движения поля [1]):

$$\frac{d\overline{\mathbf{G}}}{dt} = -ps\mathbf{n}.$$

Воспользуемся теперь равенством (103.5) и примем во внимание, что поток энергии $\mathbf{S}$ в падающей волне направлен по вектору $\mathbf{n}$, а в отраженной обратно $\mathbf{n}$. С помощью (103.5) последнее равенство может быть представлено в следующей форме:

$$\frac{d\overline{\mathbf{G}}}{dt} = -\frac{1}{c}(\overline{S}\mathbf{n} + \overline{S^r}\mathbf{n})s = -\frac{1}{c}(\overline{\mathbf{S}} - \overline{\mathbf{S}^r})s.$$

Разделив это уравнение на площадь зеркала s и введя обозначение $\overline{\mathbf{g}} = \overline{\mathbf{G}}/s$, получаем

$$\frac{d\overline{\mathbf{g}}}{dt} = -\frac{1}{c}\overline{\mathbf{S}} + \frac{1}{c}\overline{\mathbf{S}^r}. \tag{103.7}$$

[1]) Легко убедиться, что производная от среднего значения $\mathbf{G}$ по периоду равна среднему по периоду значению производной от $\mathbf{G}$

Естественно истолковать это равенство (доказанное для средних по периоду волны величин) в том смысле, что количество движения электромагнитного поля распределено в пространстве с объемной плотностью $\mathbf{g}$, мгновенное значение которой в каждой точке поля равно [см. уравнение (92.5)]:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]. \qquad (103.8)$$

Действительно, при этом предположении падающая волна приносит за единицу времени к каждой единице поверхности зеркала все то количество движения, которое заключается в объеме поля волны сечением в 1 см^2 и длиной в c см (так как, по предположению, волна распространяется в вакууме, то скорость ее равна c). Это количество движения равно

$$c \cdot \overline{\mathbf{g}}_0 = \frac{1}{c}\overline{\mathbf{S}},$$

где черта сверху по смыслу должна означать пространственное усреднение по протяжению длины волны, что, однако, равносильно временно́му усреднению по периоду волны. Соответственно отраженная волна уносит за единицу времени от единицы поверхности зеркала количество движения:

$$c\overline{\mathbf{g}^r} = \frac{1}{c}\overline{\mathbf{S}^r}.$$

Таким образом, за единицу времени на единице площади зеркала *поглощается* количество движения $c\overline{\mathbf{g}}_0$ и *возникает* вновь количество движения $c\overline{\mathbf{g}^r}$, так что общее изменение количества движения света равно

$$-c\overline{\mathbf{g}}_0 + c\overline{\mathbf{g}^r} = -\frac{1}{c}\overline{\mathbf{S}} + \frac{1}{c}\overline{\mathbf{S}^r},$$

что действительно совпадает с (103.7).

Итак, подобно тому как давление газа на стенки сосуда объясняется тем, что отражающиеся от стенок молекулы газа передают этим стенкам определенное количество движения, так и давление света на зеркало обусловливается передачей зеркалу электромагнитного количества движения отражающимся от него светом.

4. Мы показали, что допущение, выражаемое уравнением (103.8), позволяет дать простое физическое истолкование давления света.

Это явление, во всяком случае, заставляет приписать полю световой волны определенное количество движения. Допущение же, что электромагнитное количество движения распределено по объему поля с плотностью $\mathbf{g}$, определяемой уравнением (103.8), и что это уравнение применимо к произвольному электромагнит-

ному полю, является одним из основных постулатов теории поля и полностью оправдывается опытом [1]).

Впрочем, давление света и электромагнитное количество движения настолько малы, что непосредственное опытное их измерение весьма затруднительно. Так, например, зеркало, расположенное на расстоянии 1 м от источника света силой в миллион свечей, испытывает со стороны видимого света этого источника (без учета инфракрасного) давление всего лишь в 10^{-4} дин/см^2.

Световое давление было впервые экспериментально обнаружено и измерено П.Н. Лебедевым в Москве в 1901 г.; как его результаты, так и более точные результаты последующих исследователей, согласуются с теорией в пределах ошибок опыта (до 2%).

Давление света играет существенную роль только в двух противоположных по масштабам областях явлений — в явлениях астрономических и в явлениях атомарных. Так, например, гравитационное притяжение верхних слоев звезд к их центру в значительной степени уравновешивается давлением светового потока, идущего от центра звезды наружу. Из числа атомарных явлений упомянем «световую отдачу», испытываемую возбужденным атомом при излучении им света, а также родственный давлению света эффект Комптона, заключающийся в том, что γ-лучи передают часть своего количества движения электронам, на которых они рассеиваются, и тем самым сообщают этим электронам большие скорости [2]).

§ 104. Электромагнитный момент количества движения. Частный случай статического поля

1. Как понятие электромагнитного количества движения $\mathbf{g}$, так и понятие потока электромагнитной энергии (вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$) было сформулировано на основе изучения переменных (в частности, волновых) полей. Посмотрим теперь на частном

[1]) Это допущение является независимым постулатом теории только постольку, поскольку мы не учитываем принципа относительности Исходя же из этого принципа, можно показать, что 4 величины, а именно один скаляр — плотность электромагнитной энергии w, два вектора — вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ и вектор плотности электромагнитного количества движения $\mathbf{g}$ и, наконец, тензор натяжений электромагнитного поля $\mathbf{T}$, представляют собой различные слагающие *одного четырехмерного тензора*, так называемого тензора энергии и импульса Требования релятивистской инвариантности настолько ограничивают возможный вид этого тензора, что, например, в случае вакуума, заданием трехмерного тензора натяжений $\mathbf{T}$ в функции от $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ однозначно определяются w, $\mathbf{S}$ и $\mathbf{g}$

[2]) Современные квантовые генераторы дают световой луч, который может оказывать значительное давление на макроскопические тела. (*Примеч. ред.*)

примере, к каким выводам приводит применение этих понятий к полям статическим.

Рассмотрим цилиндрический конденсатор, помещенный в однородное магнитное поле $\mathbf{H}$, параллельное его оси (рис. 86). В пространстве между обкладками конденсатора, помимо магнитного, существует также и радиальное электрическое поле напряженности $\mathbf{E} = 2e\mathbf{r}/lr^2$, где e — заряд на внутренней обкладке конденсатора, численно равный, но противоположный по знаку заряду на его внешней обкладке, l — длина конденсатора, а $\mathbf{r}$ — векторное расстояние точки поля от оси конденсатора [см. уравнение (4.5)].

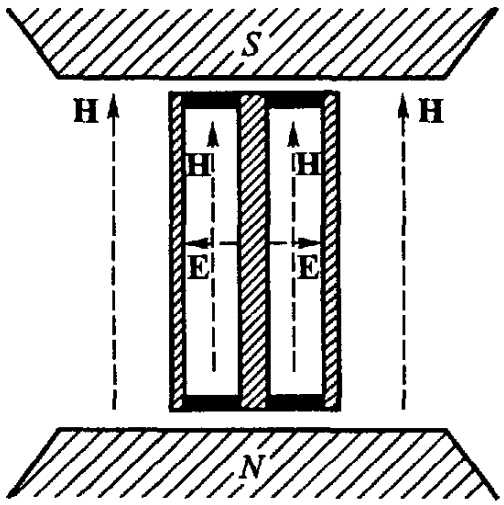

Рис. 86

Мы предполагаем, что длина конденсатора настолько больше его диаметра, что краевыми эффектами можно пренебречь, т. е. можно пользоваться формулой (4.5), строго справедливой лишь для бесконечно длинного конденсатора. Далее, для простоты предполагаем, что в полости конденсатора находится газ, отличием диэлектрической проницаемости которого от единицы можно пренебречь.

В пространстве между обкладками конденсатора вектор Пойнтинга отличен от нуля и равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] = \frac{ce}{2\pi r^2 l}[\mathbf{rH}].$$

Линии вектора Пойнтинга, т. е. линии потока энергии, представляют собой концентрические окружности, плоскости которых перпендикулярны к оси конденсатора.

Таким образом, мы приходим к представлению о беспрерывной циркуляции энергии по замкнутым путям в *статическом* электромагнитном поле. Представление это не приводит к каким-либо следствиям, могущим быть непосредственно проверенным на опыте, а потому лишено непосредственного физического смысла.

Примем, однако, во внимание, что, согласно (103.8), плотность электромагнитного количества движения $\mathbf{g}$ пропорциональна вектору Пойнтинга $\mathbf{S}$ [1]). Утверждение, что в рассматри-

[1]) Заметим, что соотношение $\mathbf{g} = \frac{1}{c^2}\mathbf{S}$ вытекает из основных положений теории относительности и должно выполняться для любых полей в вакууме, а также и для всех вообще форм энергии и импульса при строгой *микроскопической* их трактовке.

ваемом статическом поле локализовано определенное количество движения с объемной плотностью

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2}\mathbf{S} = \frac{e}{2\pi c r^2 l}[\mathbf{rH}], \tag{104.1}$$

является содержательным высказыванием и приводит к следствиям, доступным (по крайней мере принципиально) опытной проверке.

Правда, общее количество движения всего *статического* поля в целом по необходимости равно нулю. Однако, зная пространственное распределение электромагнитного количества движения, мы можем определить *момент* этого *количества движения* $\mathbf{K}$ относительно центра инерции конденсатора по формуле

$$\mathbf{K} = \int [\mathbf{Rg}]\, dV, \tag{104.2}$$

которая совершенно аналогична формуле

$$\mathbf{K} = \sum_i [\mathbf{R}_i \mathbf{g}_i] = \sum_i m_i [\mathbf{R}_i \mathbf{v}_i],$$

определяющей момент механического количества движения системы материальных точек массы m_i и скорости $\mathbf{v}_i$. Если мы разрядим конденсатор, то исчезнет как электрическое поле $\mathbf{E}$, так и электромагнитный момент количества движения $\mathbf{K}$. На основании закона сохранения момента количества движения мы должны заключить, что система конденсатор+магнит, возбуждающий поле $\mathbf{H}$, приобретает в процессе разряда равный $\mathbf{K}$ момент *механического* количества движения. Если, например, магнит закреплен неподвижно, а конденсатор может свободно вращаться около своей оси, то в процессе разряда он должен приобрести угловую скорость вращения, равную $\omega = K/I$, где I — момент инерции конденсатора относительно его оси. Этот доступный опытной проверке вывод, вытекающий из предположения о локализации в электромагнитном поле количества движения с плотностью $\mathbf{g}$, может быть подтвержден непосредственным расчетом, к которому мы теперь и перейдем.

2. Применение закона сохранения момента количества движения предполагает, что рассматриваемая система не подвергается во время разряда действию внешних сил (либо что момент этих сил равен нулю). Это условие будет удовлетворено, если мы предположим, например, что разряд конденсатора производится путем приближения к нему радиоактивного вещества, вызывающего ионизацию газа между обкладками конденсатора. Если плотность разрядного тока в газе равна $\mathbf{j}$, то каждый элемент объема газа dV будет во время разряда испытывать силу $\frac{1}{c}[\mathbf{jH}]\, dV$, момент же всех сил, испытываемых газом, будет равен

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c}\int [\mathbf{R}[\mathbf{jH}]]\, dV, \tag{104.3}$$

где интегрирование должно быть распространено на все пространство между обкладками конденсатора. Благодаря трению между газом и обкладками этот момент будет в конечном счете передан всему конденсатору в целом.

Введем цилиндрическую систему координат z, r, α, ось z которой совпадает с осью конденсатора. Если бы магнитного поля не было, то вектор плотности тока был бы радиальным ($j = |j_r|$). В магнитном поле $\mathbf{H}$ линии тока благодаря эффекту Холла приобретут спиралевидную форму, и слагающая j_α будет отличной от нуля, слагающая же j_z ввиду аксиальной симметрии поля останется равной нулю: $j_z = 0$.

Далее, ввиду той же симметрии момент $\mathbf{N}$ приложенных к газу сил будет направлен по оси z ($N_x = N_y = 0$).

Раскрывая тройное векторное произведение в формуле (104.3), получим

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c}\int \{\mathbf{j}(\mathbf{RH}) - \mathbf{H}(\mathbf{Rj})\}\, dV.$$

Приняв во внимание, что поле $\mathbf{H}$ однородно, что $j_z = 0$ и что поэтому $\mathbf{Rj} = \mathbf{rj} = rj_r$, получаем

$$N_z = -\frac{H_z}{c}\int r j_r\, dV.$$

Ток, протекающий в момент времени t через коаксиальную с конденсатором цилиндрическую поверхность радиуса r, равен

$$J(t) = 2\pi r l j_r,$$

причем ток считается положительным, если он направлен от оси конденсатора наружу. Сила тока $J(t)$ не зависит от радиуса r цилиндрической поверхности (мы пренебрегаем возможностью накопления объемных зарядов в полости конденсатора) [1]. Поэтому

$$N_z = -\frac{H_z J(t) V}{2\pi c l},$$

где V — объем полости конденсатора. Наконец, сила тока $J(t)$, протекающего через конденсатор от его внутренней обкладки к внешней, равна быстроте убыли заряда e на внутренней обкладке конденсатора:

$$J(t) = -\frac{de}{dt}.$$

Так как векторы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{H}$ направлены по оси Z, то окончательно

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{H}V}{2\pi c l}\frac{de}{dt}.$$

[1]) Если допустить образование объемных зарядов, то соответственно нужно видоизменить выражение для напряженности электрического поля в конденсаторе. В результате вновь придем к формуле (104.5).

Механический момент количества движения конденсатора $\mathbf{K}_м$ будет под воздействием момента сил $\mathbf{N}$ изменяться по закону

$$\frac{d}{dt}\mathbf{K}_м = \mathbf{N} = \frac{\mathbf{H}V}{2\pi cl}\frac{de}{dt}. \tag{104.4}$$

С другой стороны, общий момент количества движения поля внутри конденсатора, согласно (104.2) и (104.1), равен

$$\mathbf{K} = \int [\mathbf{Rg}]\, dV = \frac{e}{2\pi cl}\int \frac{[\mathbf{R}[\mathbf{rH}]]}{r^2}\, dV.$$

Тройное произведение под знаком интеграла равно

$$[\mathbf{R}[\mathbf{rH}]] = \mathbf{r}(\mathbf{RH}) - \mathbf{H}(\mathbf{Rr}),$$

причем

$$\mathbf{Rr} = r^2.$$

Поэтому

$$K_z = -\frac{eH_zV}{2\pi cl}.$$

Так как из соображений симметрии явствует, что слагающие по осям x и y вектора $\mathbf{K}$ равны нулю, то, сравнивая последнее уравнение с (104.4), получаем

$$\frac{d}{dt}\mathbf{K}_м = -\frac{d}{dt}\mathbf{K},$$

или окончательно

$$\frac{d(\mathbf{K}+\mathbf{K}_м)}{dt} = 0. \tag{104.5}$$

Таким образом, мы подтвердили непосредственным подсчетом, что сумма электромагнитного и механического моментов количества движения остается постоянной во времени, так что при разряде конденсатора в магнитном поле он должен приобрести равный $\mathbf{K}$ механический момент количества движения $\mathbf{K}_м$.

3. Рассмотренный пример показывает, что понятие электромагнитного момента количества движения оказывается плодотворным даже в случае статических полей. Еще бóльшую роль играет это понятие при изучении переменных полей, в особенности поля излучения.

Правда, в области макроскопических явлений экспериментальное измерение электромагнитного количества движения и его момента представляет очень трудную задачу ввиду ничтожной величины связанных с ними эффектов [1]. Однако в области атомарных явлений обмен моментом количества движения меж-

[1] Ср. сказанное в § 103 о давлении света. Экспериментально удалось измерить момент количества движения, передаваемый светом кварцевой пластинке при прохождении его через эту пластинку; передача момента связана с вращением плоскости поляризации света в пластинке.

ду светом и веществом имеет весьма существенное значение. Так, например, излучение света возбужденным атомом, вообще говоря, связано с изменением момента количества движения электронов в атоме, причем это изменение по порядку величины сравнимо с абсолютной величиной момента атома.

§ 105. Тензор натяжений и пондеромоторные силы электромагнитного поля

1. В § 34 и 84 мы нашли выражение тензора натяжений $\mathbf{T}$ в стационарных электрическом и магнитном полях. Покажем теперь, что если допустить применимость этих выражений и в случае произвольного переменного электромагнитного поля, то вытекающие из этого допущения выводы будут находиться в полном соответствии с результатами настоящей главы.

В § 34 и 84 мы убедились, что тензор напряжений электромагнитного поля $\mathbf{T}$ может быть разложен на сумму «максвеллова» тензора $\mathbf{T}'$ и тензора стрикционных натяжений $\mathbf{T}''$. В дальнейшем мы для простоты вовсе не будем рассматривать стрикционных натяжений $\mathbf{T}''$, приводящих лишь к перераспределению пондеромоторных сил по объему находящихся в поле тел, но не изменяющих результирующей этих сил, и будем отождествлять полный тензор натяжений $\mathbf{T}$ с максвелловым тензором $\mathbf{T}'$. При этих условиях тензор натяжений $\mathbf{T}$ выразится суммой выражений (34.2) и (84.4), которую можно представить в следующей форме:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}(E_i D_k + H_i B_k) - \frac{1}{8\pi}\delta_{ik}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB}). \qquad (105.1)$$

Индексы i и k в этом выражении могут пробегать значения x, y, z, а величина δ_{ik} определяется уравнениями

$$\delta_{ii} = \delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = 1, \quad \delta_{ik} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k. \qquad (105.2)$$

Впрочем, удобнее ввести обозначения $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ и придавать индексам i и k значения 1, 2, 3. В этих обозначениях формула (33.7), выражающая плотность пондеромоторных сил $\mathbf{f}$, принимает вид

$$f_i = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}.$$

Воспользовавшись значениями (105.1) слагающих T_{ik}, получаем

$$\sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi}\sum_k \left(E_i \frac{\partial D_k}{\partial x_k} + \frac{\partial E_i}{\partial x_k} D_k + H_i \frac{\partial B_k}{\partial x_k} + \frac{\partial H_i}{\partial x_k} B_k\right) -$$

$$- \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB}).$$

Последний член получается на основании (105.2):

$$-\frac{1}{8\pi}\sum_k \delta_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathbf{ED}+\mathbf{HB}) = -\frac{1}{8\pi}\delta_{ii}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{ED}+\mathbf{HB}) = \\ = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{ED}+\mathbf{HB}).$$

Примем во внимание, что, согласно максвелловым уравнениям (III) и (IV),

$$\sum_k \frac{\partial D_k}{\partial x_k} = \frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z} = \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \sum_k \frac{\partial B_k}{\partial x_k} = \operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

Далее,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{ED}) = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_i}(E_k D_k) = \sum_k \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i}D_k + E_k\frac{\partial D_k}{\partial x_i}\right)$$

и, стало быть,

$$\frac{1}{4\pi}\sum_k \frac{\partial E_i}{\partial x_k}D_k - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{ED}) = \\ = \frac{1}{4\pi}\sum_k\left(\frac{\partial E_i}{\partial x_k}-\frac{\partial E_k}{\partial x_i}\right)D_k + \frac{1}{8\pi}\sum_k\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i}D_k - E_k\frac{\partial D_k}{\partial x_i}\right).$$

Аналогичным образом можно преобразовать и члены

$$\frac{1}{4\pi}\sum_k \frac{\partial H_i}{\partial x_k}B_k - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{HB}).$$

В рассматриваемом нами случае неподвижной изотропной среды связь между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ и между $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ определяется уравнениями Максвелла (V), и поэтому

$$\sum_k\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i}D_k - E_k\frac{\partial D_k}{\partial x_i}\right) = -\sum_k E_k^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i} = -E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i},$$

$$\sum_k\left(\frac{\partial H_k}{\partial x_i}B_k - H_k\frac{\partial B_k}{\partial x_i}\right) = -H^2\frac{\partial\mu}{\partial x_i}.$$

Поэтому $\sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$ может быть представлена следующим образом:

$$\sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \rho E_i + \frac{1}{4\pi}\sum_k\left(\frac{\partial E_i}{\partial x_k}-\frac{\partial E_k}{\partial x_i}\right)D_k + \\ + \frac{1}{4\pi}\sum_k\left(\frac{\partial H_i}{\partial x_k}-\frac{\partial H_k}{\partial x_i}\right)B_k - \frac{1}{8\pi}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}+H^2\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\right). \quad (105.3)$$

Рассмотрим слагающую выражения (105.3) по оси x. Второй член справа при $i = 1$ равен

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_k}-\frac{\partial E_k}{\partial x_1}\right)D_k = \\ = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_2}-\frac{\partial E_2}{\partial x_1}\right)D_2+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3}-\frac{\partial E_3}{\partial x_1}\right)D_3.$$

В обычных обозначениях

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_2}-\frac{\partial E_2}{\partial x_1}=\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\operatorname{rot}_z\mathbf{E}$$

и

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_3}-\frac{\partial E_3}{\partial x_1}=\operatorname{rot}_y\mathbf{E}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_k}-\frac{\partial E_k}{\partial x_1}\right)D_k = \\ = -D_y\operatorname{rot}_z\mathbf{E}+D_z\operatorname{rot}_y\mathbf{E}=[\operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}]_x=[\operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}]_1.$$

Аналогично этому может быть преобразован и третий член справа в (105.3), так что сумма второго и третьего членов равна

$$\frac{1}{4\pi}\sum_k\left(\frac{\partial E_i}{\partial x_k}-\frac{\partial E_k}{\partial x_i}\right)D_k+\frac{1}{4\pi}\sum_k\left(\frac{\partial H_i}{\partial x_k}-\frac{\partial H_k}{\partial x_i}\right)B_k = \\ = \frac{1}{4\pi}[\operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}]_i+\frac{1}{4\pi}[\operatorname{rot}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}]_i.$$

На основании максвелловых уравнений (I) и (II)

$$[\operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}]+[\operatorname{rot}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}]=-\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\mathbf{D}\right]+\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{B}\right]+\frac{4\pi}{c}[\mathbf{jB}].$$

Далее,

$$-\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\mathbf{D}\right]+\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{B}\right]=\frac{1}{c}\left[\mathbf{D}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right]+\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{B}\right]=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{DB}].$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\sum_k\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=\rho E_i+\frac{1}{c}[\mathbf{jB}]_i-\frac{1}{8\pi}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}+H^2\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c}[\mathbf{DB}]\right)_i. \tag{105.4}$$

В рассматриваемом нами случае неподвижной изотропной среды последний член в уравнении (105.4) может быть представлен в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c}[\mathbf{DB}]\right)_i=\frac{\partial g_i}{\partial t}+\frac{\varepsilon\mu-1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}]_i,$$

где вектор

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]$$

означает, согласно уравнению (103.8), плотность количества движения электромагнитного поля.

Если ввести еще обозначения

$$f_i^{(1)} = \rho E_i + \frac{1}{c}[\mathbf{jB}]_i, \tag{105.5}$$

$$\mathbf{f}^{(2)} = -\frac{1}{8\pi}(E^2 \operatorname{grad}\varepsilon + H^2 \operatorname{grad}\mu) + \frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}], \tag{105.6}$$

то уравнение (105.4) примет вид

$$\sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = f_i^{(1)} + f_i^{(2)} + \frac{\partial g_i}{\partial t}. \tag{105.7}$$

Первый член справа $f_i^{(1)}$ равен слагающей по оси i плотности пондеромоторных сил, действующих на свободные заряды ρ и на электрические токи $\mathbf{j}$. Второй член справа в (105.4) $\mathbf{f}^{(2)}$ представляет собой плотность пондеромоторных сил, действующих на среду (т. е. на диэлектрики и магнетики). Действительно, в вакууме $\varepsilon = \mu = 1$ и поэтому, согласно (105.6), в вакууме $\mathbf{f}^{(2)} = 0$ [1]).

Кроме того, в постоянном поле последний член в уравнении (105.6) равен нулю и определенный этим уравнением вектор действительно совпадает с суммой вторых членов формул (32.10) и (83.5) для плотности сил, действующих на диэлектрики и магнетики.

2. Если обозначить через $\mathbf{f}$ полную плотность пондеромоторных сил:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}, \tag{105.8}$$

где $\mathbf{f}^{(1)}$ и $\mathbf{f}^{(2)}$ определяются уравнениями (105.5) и (105.6), то уравнение (105.4) примет вид

$$f_i + \frac{\partial g_i}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}. \tag{105.9}$$

В стационарных полях $\partial g_i/\partial t = 0$ и это уравнение совпадает с (33.7); в переменных полях оно отличается от (33.7) членом

[1]) Последний член в выражении (105.6) носит название плотности силы Абрагама. Ее появление частично связано с силовым действием магнитного поля на ток смещения. Недавно сила Абрагама была обнаружена экспериментально (Nature. 1975. V. 253. P. 3307). Наличие силы Абрагама дает основания для выбора тензора энергии-импульса в диэлектрике в виде, предложенном Абрагамом. Вопрос о тензоре энергии-импульса в среде обсуждается уже около 70 лет, но сейчас он в значительной мере выяснен (см. *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. 3-е изд. — М.: Физматлит, 1987). (*Примеч. ред.*)

$\partial g_i/\partial t$, учитывающим изменение во времени плотности электромагнитного количества движения $\mathbf{g}$. Этот дополнительный член обеспечивает сохранение суммы количества движения материальных тел и электромагнитного поля.

Действительно, проинтегрируем уравнение (105.9) по всему пространству, предполагая, что слагающие электромагнитного тензора натяжений достаточно быстро убывают по мере удаления в бесконечность. Интеграл правой части уравнения (105.9) при этих условиях обратится в нуль, ибо, например, при $i = 1$

$$\sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z},$$

и, стало быть, согласно уравнению, непосредственно предшествующему уравнению (33.7):

$$\int_V \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\, dV = \oint_S T_{xn}\, dS,$$

где поверхностный интеграл должен быть взят по поверхности S объема V и при удалении этой поверхности в бесконечность обратится, по предположению, в нуль. Таким образом, получаем

$$\int f_i\, dV + \frac{\partial}{\partial t} \int g_i\, dV = 0,$$

или, переходя от слагающих к векторам и заменяя частную производную по времени полной (ввиду того, что под знаком $\frac{\partial}{\partial t}$ стоит интеграл по всему пространству, зависящий только от t):

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{g}\, dV + \int \mathbf{f}\, dV = 0.$$

С другой стороны, изменение механического количества движения $\mathbf{G}_\text{м}$ всех находящихся в пространстве тел определяется равнодействующей всех пондеромоторных сил:

$$\frac{d\mathbf{G}_\text{м}}{dt} = \int \mathbf{f}\, dV.$$

Поэтому последнее равенство равносильно равенству

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{G}_\text{м} + \int \mathbf{g}\, dV\right) = 0, \qquad (105.10)$$

которое и выражает собой *закон сохранения полного количества движения* (механического плюс электромагнитного).

Важное уравнение (105.9) устанавливает в самой общей форме связь между плотностью пондеромоторных сил $\mathbf{f}$, количеством движения поля $\mathbf{g}$ и натяжениями T_{ik}.

§ 106. Пример неквазистационарных токов: волны вдоль кабеля

1. В гл. VI мы подробно рассмотрели свойства квазистационарных переменных токов. Теперь же рассмотрим на частном примере свойства *быстропеременных* токов, к которым теория, изложенная в гл. VI, вовсе неприменима Это рассмотрение мы будем вести методом последовательных приближений, основанным на учете следующего обстоятельства.

Как мы убедились в § 90, быстропеременные токи практически полностью сосредоточиваются на поверхности проводников (скин-эффект) в слое толщины δ:

$$\delta = \frac{1}{p} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\lambda\mu\omega}}, \tag{106.1}$$

где ω — циклическая частота тока, а λ — электропроводность проводника.

Той же величиной δ определяется и глубина проникновения переменного поля в толщу металла. Так как при возрастании ω толщина δ стремится к нулю, то при рассмотрении токов высокой частоты можно в первом приближении положить $\delta = 0$, т. е. считать *токи поверхностными*, что чрезвычайно облегчает решение задачи. В частности, плотность поверхностного тока $\mathbf{i}$ однозначно определяется в этом приближении тангенциальными слагающими магнитного поля $\mathbf{H}$ у внешней поверхности проводника, ибо поле внутри проводника при $\delta = 0$ равно нулю, и пограничное условие (I′) (§ 91, с. 425) принимает поэтому вид

$$\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{i} = [\mathbf{nH}], \tag{106.2}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности проводника.

Однако в этом первом приближении вовсе не учитываются потери энергии тока на джоулево тепло: пренебрегая проникновением поля внутрь проводника, мы тем самым пренебрегаем выделением в нем джоулева тепла

$$Q = \int \frac{j^2}{\lambda}\, dV.$$

Можно сказать, что в этом первом приближении проводник считается *идеальным*, т. е. обладающим бесконечно большой проводимостью λ, или, иными словами, что в этом приближении пренебрегается сопротивлением проводника, а вместе с тем и потерями на джоулево тепло. Действительно, при $\lambda = \infty$ обращается в нуль как толщина δ, так и джоулево тепло Q, что будет видно из второго приближения.

Так как в конкретных задачах, встречающихся в экспериментальной и технической физике, потери на джоулево тепло

отнюдь не малы и пренебрегать ими никак нельзя, то необходимо после решения первого приближения перейти ко второму. В этом втором приближении для поля *вне* проводников принимаются значения, полученные в первом приближении; эти значения служат граничными условиями для определения поля *внутри* проводников, определив которое, можно найти и выделяемое токами джоулево тепло, а вместе с тем и затухание волн вдоль проводников.

2. В качестве конкретного примера рассмотрим быстропеременные токи в кабеле, состоящем из двух коаксиальных цилиндрических проводников: внешнего полого, радиус внутренней поверхности которого пусть равен r_2, и внутреннего сплошного — радиуса r_1 (рис. 87). Предположим, что пространство между этими проводниками заполнено однородной непроводящей средой, обладающей диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. В первом приближении пренебрежем сопротивлением кабеля, т. е. будем считать проводники кабеля идеальными. Тогда внутри проводников переменное поле будет равно нулю и все токи полностью сосредоточатся на поверхности проводников. При этих условиях поле во внутренней полости кабеля будет, очевидно, совершенно независимым от поля во внешнем пространстве.

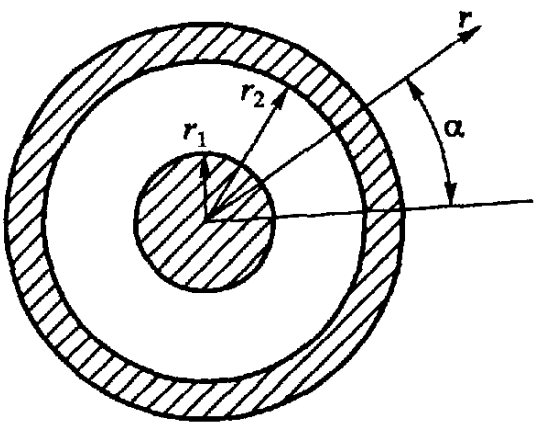

Рис. 87

Введем цилиндрическую систему координат r, α, z, в которой ось z направлена по оси кабеля, а r и α суть полярные координаты в плоскости, перпендикулярной к этой оси. Ввиду предполагаемой аксиальной симметрии кабеля поле в нем также будет аксиально симметричным, т. е. напряженности поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и плотность поверхностных токов $\mathbf{i}$ от полярного угла α зависеть не будут. По той же причине направление токов в кабеле должно совпадать с направлением его оси ($|i_z| = i$, $i_\alpha = 0$).

Следовательно, пограничное условие (106.2) примет вид

$$\text{при} \quad r = r_1 \quad \frac{4\pi}{c} i_1 = [\mathbf{n}_1\mathbf{H}]_z, \quad [\mathbf{n}_1\mathbf{H}]_\alpha = 0;$$

$$\text{при} \quad r = r_2 \quad \frac{4\pi}{c} i_2 = [\mathbf{n}_2\mathbf{H}]_z, \quad [\mathbf{n}_2\mathbf{H}]_\alpha = 0,$$

где i_1 и i_2 — соответственно плотности поверхностных токов на первом и втором цилиндрах, а $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — внешние нормали к их поверхностям. Легко убедиться, что эти уравнения могут быть

записаны в следующей форме:

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad r = r_1 \quad \frac{4\pi}{c} i_1 = H_\alpha, \quad H_z = 0, \\ &\text{при} \quad r = r_2 \quad \frac{4\pi}{c} i_2 = -H_\alpha, \quad H_z = 0. \end{aligned} \tag{106.3}$$

Далее, из пограничных условий (II″) и (III′) и из допущения, что переменное поле внутрь проводников не проникает, следует, что у поверхности этих проводников

$$E_\alpha = E_z = H_r = 0. \tag{106.4}$$

Наконец, из пограничного условия (IV′) следует, что

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad r = r_1 \quad D_r = \varepsilon E_r = 4\pi\sigma_1, \\ &\text{при} \quad r = r_2 \quad D_r = \varepsilon E_r = -4\pi\sigma_2. \end{aligned} \tag{106.5}$$

Условия (106.4) и часть условий (106.3) будут удовлетворены, если предположить, что *во всем пространстве* между обкладками кабеля отличны от нуля лишь радиальная слагающая $\mathbf{E}_r$ вектора $\mathbf{E}$ и азимутальная слагающая H_α вектора $\mathbf{H}$. Найдя соответствующее решение уравнений Максвелла, мы ввиду однозначности этих уравнений можем быть уверены, что это решение и есть единственное искомое решение рассматриваемой проблемы.

3. Итак, положим, что

$$E_\alpha = E_z = H_z = H_r = 0, \quad E_r = E_0(r, z)e^{i\omega t}, \quad H_\alpha = H_0(r, z)e^{i\omega t}, \tag{106.6}$$

где ω есть циклическая частота тока, а функции E_0 и H_0 зависят лишь от r и z, но не от α и t.

Пользуясь формулами (22*) и (32*), выражающими дивергенцию и ротор произвольного вектора $\mathbf{a}$ в цилиндрической системе координат, убеждаемся, что выражения (106.6) тождественно удовлетворяют третьему уравнению Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

(по предположению, μ и ε суть величины постоянные) и что уравнение Максвелла (IV) принимает вид

$$\frac{\partial(rE_0)}{\partial r} = 0,$$

откуда

$$E_0 = \frac{A(z)}{r}, \tag{106.7}$$

где $A(z)$ есть функция одной лишь координаты z. Далее, внося выражение (106.6) в основные уравнения (I) и (II):

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad \text{и} \quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E},$$

получим по сокращении на $e^{i\omega t}$

$$\frac{i\omega\varepsilon}{c}E_0 = -\frac{\partial H_0}{\partial z}, \quad 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_0), \quad \frac{i\omega\mu}{c}H_0 = -\frac{\partial E_0}{\partial z}. \qquad (106.8)$$

Остальные же три уравнения для слагающих, соответствующие векторным уравнениям (I) и (II), выражениями (106.6) удовлетворяются тождественно.

Из уравнений (106.8_3) и (106.8_1) получим

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} = -\frac{i\omega\mu}{c}\frac{\partial H_0}{\partial z} = -\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}E_0.$$

Введя, согласно уравнению (100.4), обозначение

$$k^2 = \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}, \quad k = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}$$

и приняв во внимание уравнение (106.7), получаем

$$\frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2} + k^2 A(z) = 0,$$

откуда

$$A_z = A_0 e^{-ikz} + A_0' e^{ikz},$$

где A_0 и A_0' — произвольные постоянные интегрирования.

Внося это в уравнения (106.6) и (106.7), получаем окончательно

$$E_r = \frac{A_0}{r}e^{i(\omega t - kz)} + \frac{A_0'}{r}e^{i(\omega t + kz)}.$$

Первый член этого выражения представляет собой волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z, а второй — волну, распространяющуюся в обратном направлении. Волны эти независимы друг от друга, так что мы можем ограничиться рассмотрением лишь одной из них, например первой, т. е. положить $A_0' = 0$ и

$$E_r = \frac{A_0}{r}e^{i(\omega t - kz)}. \qquad (106.9)$$

Внося это выражение в уравнение (106.8_3), получим после простых преобразований

$$H_\alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_r = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{A_0}{r}e^{i(\omega t - kz)}. \qquad (106.10)$$

Это выражение, как легко видеть, удовлетворяет также и первым двум уравнениям (106.8).

Нам остается еще выяснить связь между напряженностью волнового поля в кабеле и плотностью поверхностных зарядов

и токов на его обкладках. Внося выражения для E_r и H_α в уравнения (106.3) и (106.5), получим

$$\begin{aligned} \frac{4\pi i_1}{c} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{A_0}{r_1}\,e^{i(\omega t-kz)}, & 4\pi\sigma_1 &= \frac{\varepsilon A_0}{r_1}\,e^{i(\omega t-kz)}, \\ \frac{4\pi i_2}{c} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{A_0}{r_2}\,e^{i(\omega t-kz)}, & 4\pi\sigma_2 &= -\frac{\varepsilon A_0}{r_2}\,e^{i(\omega t-kz)}. \end{aligned} \tag{106.11}$$

Переходя к вещественным частям комплексных выражений и приняв во внимание, что общая сила токов J_1 и J_2, протекающих по поверхности цилиндрических проводников кабеля, равна произведению поверхностной плотности тока на окружность проводника, получим окончательно

$$J_1 = i_1 \cdot 2\pi r_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{cA_0}{2}\cos(\omega t - kz) = -i_2 \cdot 2\pi r_2 = -J_2.$$

Таким образом, в каждый данный момент t в каждом сечении кабеля силы токов, протекающих по внутреннему и внешнему проводникам кабеля, равны по величине и противоположны по знаку (т. е. по направлению).

Подобным же образом найдем, что величина зарядов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, приходящихся на единицу длины цилиндрических проводников кабеля, равна

$$\varkappa_1 = \sigma_1 \cdot 2\pi r_1 = \frac{\varepsilon A_0}{2}\cos(\omega t - kz) = -\sigma_2 \cdot 2\pi r_2 = -\varkappa_2.$$

4. Итак, в пространстве между обкладками кабеля распространяются электромагнитные волны, свойства которых во многих отношениях совпадают со свойствами рассмотренных нами в § 99, 100 волн шаровых и волн плоских. Действительно, из приведенных выражений следует, что векторы **E** и **H** взаимно перпендикулярны, перпендикулярны к направлению волны и образуют с этим направлением правовинтовую систему. Далее, значения этих векторов удовлетворяют уравнению (100.10), энергия поля — уравнению (100.11) и т. д. Наконец, скорость распространения волн в кабеле удовлетворяет ранее установленному уравнению (100.6)

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

т. е. определяется свойствами непроводящей среды, заполняющей пространство между обкладками кабеля.

Таким образом, проводники, образующие кабель, играют, в сущности, лишь роль *направляющих поверхностей*, определяющих направление *распространяющейся в диэлектрике волны* и препятствующих рассеянию электромагнитной энергии в окружающее пространство: при распространении волны вдоль кабеля ее амплитуда не уменьшается, и следовательно, вся энергия

волны передается вдоль кабеля без потерь (ведь сопротивлением кабеля мы пренебрегли). Роль направляющей поверхности в известной мере может играть не только кабель, но и обыкновенный одножильный провод, что технически используется, например, при телеграфировании по проводам токами высокой частоты.

5. Перейдем теперь *ко второму приближению*, учитывающему проникновение поля в проводники кабеля. Впрочем, практический интерес представляют не точные значения поля в проводниках кабеля, а только *потери энергии* и *затухание волны* при ее распространении вдоль кабеля, рассмотрением которых мы и ограничимся.

Если толщина проводящего ток слоя $\delta = 1/p$ [уравнение (106.1)] много меньше радиуса кабеля r_1 и r_2, то кривизна поверхности проводников кабеля не будет сказываться на распределении токов в проводящем слое. Поэтому мы можем воспользоваться результатами § 90, относящимися к случаю плоской поверхности проводника. Согласно (90.7),

$$j = j_0 e^{-p\zeta} \cos(\omega t - p\zeta),$$

где j_0 означает амплитуду объемной плотности тока на поверхности проводника $\zeta = 0$, а ζ — координату, направленную нормально в глубь проводника [1]). Если заменить это объемное распределение токов поверхностным, то плотность эквивалентного поверхностного тока i нужно, очевидно, положить равной

$$i = \int_0^\infty j\, d\zeta = j_0 \int_0^\infty e^{-p\zeta} \cos(\omega t - p\zeta)\, d\zeta = \frac{j_0}{p\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right),$$

где мы распространили интегрирование до $\zeta = \infty$, ибо при больших ζ плотность тока благодаря фактору $e^{-p\zeta}$ исчезающе мала. Таким образом, амплитуда эквивалентного поверхностного тока равна

$$i_0 = \frac{j_0}{p\sqrt{2}}.$$

Далее, вычисляя количество джоулева тепла, выделяемого за единицу времени в поверхностном слое проводника площадью в 1 см^2, и усредняя найденное значение по периоду поля, получим

$$\bar{q} = \int_0^\infty \frac{\overline{j^2}\, d\zeta}{\lambda} = \frac{j_0^2}{\lambda} \int_0^\infty e^{-2p\zeta} \overline{\cos^2(\omega t - p\zeta)}\, d\zeta = \frac{j_0^2}{2\lambda} \int_0^\infty e^{-2p\zeta}\, d\zeta = \frac{j_0^2}{4p\lambda},$$

[1]) Фаза плотности тока, помимо ζ, зависит также от координаты z, отсчитываемой вдоль оси кабеля. Так как, однако, значение фазы не сказывается на значении усредненных по времени величин q, Q и т. д., то мы эту зависимость учитывать не будем.

или, выражая j_0 через i_0:

$$\overline{q} = \frac{i_0^2 p}{2\lambda}. \tag{106.12}$$

Эта формула выражает тепловые потери в быстропеременных полях через амплитуду поверхностной плотности тока, для определения которой достаточно решить задачу о распространении волн вдоль проводников в первом приближении, считая проводники идеальными. В частности, из (106.12) непосредственно вытекает формула (90.16) для омического сопротивления цилиндрического провода быстропеременным токам.

6. В случае кабеля i_0 определяется формулами (106.11) и, например, на внутренней поверхности кабеля равно

$$i_{01} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{A_0}{r_1}.$$

Следовательно, на единице длины внутреннего проводника кабеля, поверхность которой составляет $2\pi r_1$ см^2, выделяется за единицу времени теплота

$$Q_1 = 2\pi r_1 \frac{i_{01}^2 p_1}{2\lambda_1} = \frac{\varepsilon c^2 A_0^2 p_1}{16\pi\mu\lambda_1 r_1},$$

где индекс 1 у λ и p означает, что эти величины относятся к внутреннему проводнику.

Аналогичное выражение получается и для теплоты Q_2, выделяемой во внешнем проводнике кабеля, так что полная величина тепловых потерь на единицу длины кабеля равна

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{\varepsilon c^2}{16\pi\mu} A_0^2 \left(\frac{p_1}{\lambda_1 r_1} + \frac{p_2}{\lambda_2 r_2}\right). \tag{106.13}$$

Подсчитаем теперь средний за период поток энергии Σ, переносимый волной за единицу времени через сечение кабеля:

$$\Sigma = \int_{r_1}^{r_2} \overline{S}_z \cdot 2\pi r\, dr = \frac{2\pi c}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2} \overline{E_r H_0} r\, dr,$$

где S_z означает составляющую вектора Пойнтинга $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]$ и где учтено, что в первом приближении, согласно (106.6), $H_r = E_\alpha = 0$.

Переходя при определении произведения $E_r H_\alpha$ к действительным частям комплексных выражений (106.9) и (106.10), получаем

$$\overline{E_r H_\alpha} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{A_0^2}{r^2}\overline{\cos^2(\omega t - kz)} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{A_0^2}{2r^2}.$$

Поэтому

$$\Sigma = \frac{c}{4}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}A_0^2\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{c}{4}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}A_0^2\ln\frac{r_2}{r_1}. \tag{106.14}$$

В первом приближении, как мы видели, амплитуда волны оказывается постоянной, так что волна при распространении не затухает. Однако тепловые потери Q должны вызвать затухание волны, т. е. должны повести к зависимости ее амплитуды A_0 от z. Эта зависимость может быть определена из того факта, что выделяемая за единицу времени на отрезке кабеля длины dz теплота $Q\,dz$ должна равняться разнице потоков энергии через два сечения кабеля, ограничивающие этот отрезок:

$$\Sigma - \left(\Sigma + \frac{d\Sigma}{dz}dz\right) = Q\,dz,$$

или

$$\frac{d\Sigma}{dz} = -Q. \tag{106.15}$$

Внося в это соотношение значения Q и Σ из (106.13) и (106.14), получаем после простых преобразований и после подстановки значений (106.1) постоянных p_1 и p_2:

$$\frac{dA_0}{dz} = -sA_0,$$

где

$$s = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{2\pi\mu}}\,\frac{1}{\ln(r_2/r_1)}\left(\frac{1}{r_1}\sqrt{\frac{\mu_1}{\lambda_1}} + \frac{1}{r_2}\sqrt{\frac{\mu_2}{\lambda_2}}\right). \tag{106.16}$$

Таким образом, при учете тепловых потерь амплитуда распространяющейся вдоль кабеля волны затухает по закону

$$A_0 = e^{-sz}a_0, \tag{106.17}$$

где a_0 — постоянная.

Заметим, что полученное нами приближенное выражение (106.16) для коэффициента затухания s совпадает в предельном случае больших частот ω с результатом точного, математически очень сложного, решения задачи.

7. Согласно (106.16), коэффициент затухания волн s пропорционален квадратному корню из их частоты. Поэтому, например, при передаче речи на большие расстояния по телефонным проводам речь искажается, так как отдельные ее гармоники (отдельные члены разложения звука в ряд Фурье по синусоидальным функциям времени) передаются с разной интенсивностью. Об этом см. также § 107, с. 520.

Из (106.16) следует, что если радиус r_2 внутренней поверхности внешнего проводника кабеля существенно превышает радиус r_1 внутреннего проводника, то коэффициент затухания s

в значительно большей степени зависит от электропроводности λ_1 этого внутреннего проводника, чем от электропроводности λ_2 внешнего проводника кабеля. Однако это справедливо лишь при условии

$$\frac{1}{r_1}\sqrt{\frac{\mu_1}{\lambda_1}} > \frac{1}{r_2}\sqrt{\frac{\mu_2}{\lambda_2}}.$$

Как раз обратное соотношение имеет место, например, в случае погруженного в море одножильного изолированного провода (морской кабель), когда роль внешнего проводника играет морская вода. Так как электропроводность морской воды несравненно меньше электропроводности металлов, то затухание волн высокой частоты в одножильном морском кабеле целиком определяется электропроводностью воды и практически не зависит от электропроводности металлического проводника.

§ 107. Приближенная теория быстропеременных токов. «Уравнение телеграфистов»

1. Исследование различных случаев распространения волн вдоль проводников связано, вообще говоря, с известными математическими трудностями. Поэтому в электротехнике быстрых токов при рассмотрении подобного рода вопросов прибегают иногда к упрощенному и, в сущности, весьма нестрогому способу рассуждений, который, однако, при определенных условиях, относящихся к конфигурации проводников и частоте волн, приводит к правильным результатам. Состоит этот способ в следующем.

Чтобы применить к быстропеременным токам, в сущности, вовсе неприменимую к ним теорию токов квазистационарных, рассматривают не всю цепь тока в целом, а отдельные малые ее участки длины dz и предполагают, что теория квазистационарных токов применима к каждому такому отдельному участку.

Если R^* есть сопротивление единицы длины проводника, то для отрезка длины dz закон Ома в той его форме, которая применима к постоянным токам:

$$R_{12}J = \varphi_1 - \varphi_2,$$

может быть записан следующим образом:

$$R^*\,dz\,J = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz,$$

ибо $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz$ равно разности потенциалов на концах отрезка dz. В приближенной теории, о которой идет речь, предполагается, что для переменных токов справедливо аналогичное соотношение

$$R^*\,dz\,J = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz - \frac{1}{c^2}\,L^*\,dz\,\frac{\partial J}{\partial t}, \qquad (107.1)$$

отличающееся от предшествующего лишь последним членом, учитывающим электродвижущую силу индукции [ср. уравнение (78.2)]. В этом члене L^* означает «самоиндукцию единицы длины проводника» (ср. § 81, с. 380), а $L^*\,dz$ — самоиндукцию отрезка dz. При этом делается допущение, что и в случае переменного поля, не обладающего потенциалом, первый член правой части приведенного уравнения имеет определенный физический смысл, а именно, что этим членом учитывается мгновенное кулоново поле электрических зарядов проводника. Далее, предполагается, что мгновенное значение потенциала этих зарядов определяется соотношением

$$\varphi = \frac{\varkappa}{C^*},$$

где $\varkappa$ и C^* суть соответственно заряд и емкость единицы длины проводника [ср. уравнение (9.2)]. На основании этого соотношения уравнение (107.1) по сокращении на dz может быть записано следующим образом:

$$R^*J = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varkappa}{C^*}\right) - \frac{1}{c^2}L^*\frac{\partial J}{\partial t}. \tag{107.2}$$

Чтобы исключить из этого уравнения величину $\varkappa$, воспользуемся уравнением непрерывности. Пусть участок проводника dz ограничен сечениями S и S', координаты которых обозначим соответственно через z и $z+dz$. Сила тока в проводе будет, вообще говоря, изменяться по его длине, т. е. будет функцией координаты z. Если за единицу времени через сечение S протекает J единиц электричества, то через сечение S' будет протекать $J+\frac{\partial J}{\partial z}\,dz$ единиц. Стало быть, величина заряда $\varkappa\,dz$, находящегося в рассматриваемом участке провода, уменьшается за единицу времени на $\frac{\partial J}{\partial z}\,dz$ единиц, откуда следует:

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial z}.$$

Дифференцируя (107.2) по t и затем исключая из него $\partial\varkappa/\partial t$, получим окончательно

$$\frac{1}{c^2}L^*\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + R^*\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{C^*}\frac{\partial J}{\partial z}\right). \tag{107.3}$$

Это и есть искомое приближенное уравнение неквазистационарного переменного тока. Если C^* от z не зависит, то (107.3) принимает вид

$$\frac{1}{c^2}L^*\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + R^*\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{C^*}\frac{\partial^2 J}{\partial z^2}. \tag{107.4}$$

Это последнее уравнение носит название *уравнения телеграфистов* и применяется в технике, например, при расчете распро-

странения телеграфных сигналов по проводам, распределения токов в антеннах и т. д.

2. Как вытекает из изложенного, приведенный вывод уравнения (107.3) основан на ряде допущений, которые, вообще говоря, действительности не соответствуют. Сами понятия емкости и самоиндукции единицы длины не имеют однозначного смысла, ибо, например, потенциал данной точки проводника, даже при стационарном распределении зарядов, должен зависеть не только от линейной плотности зарядов $\varkappa$ в этой точке, но и от распределения зарядов по всей длине проводников. Можно, однако, показать, что если поперечные размеры l системы проводников удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\omega}{\lambda\mu}} \ll \frac{l}{c} \ll \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{\lambda}{\omega\mu}},$$

где λ — электропроводность проводников, а μ — их магнитная проницаемость, и если проводники достаточно прямолинейны [1], то уравнения (107.3) представляют собой хорошее приближение к действительности.

На общем рассмотрении этого вопроса мы останавливаться не будем и ограничимся тем, что покажем применимость уравнения (107.4) к частному случаю цилиндрического кабеля, рассмотренному нами в предыдущем параграфе.

3. Предположим, что величины L^*, C^* и R^* постоянны вдоль всего провода. Рассмотрим переменный ток частоты ω:

$$J = A(z)e^{i\omega t},$$

где $A(z)$ от t не зависит. Внося это выражение в уравнение (107.4), сокращая его затем на $e^{i\omega t}$ и умножая на C^*, получаем

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = -u^2A(z),$$

где

$$u^2 = \frac{\omega^2 L^* C^*}{c^2} - i\omega R^* C^*. \qquad (107.5)$$

Общее решение этого уравнения есть

$$A(z) = J_0 e^{-iuz} + J_0' e^{iuz},$$

где J_0 и J_0' суть произвольные постоянные интегрирования, определяющие амплитуды двух волн, распространяющихся по проводу во взаимно противоположных направлениях. Достаточно,

[1] Проводники должны приближенно иметь форму прямых цилиндров произвольного сечения, причем радиус кривизны осей цилиндров должен быть велик как по сравнению с l, так и по сравнению с длиной электромагнитной волны в вакууме.

очевидно, рассмотреть одну из этих волн, т. е. положить, например, $J_0' = 0$; в этом случае сила тока в кабеле равна:

$$J = J_0 e^{i(\omega t - uz)}. \tag{107.6}$$

Полагая

$$u = k - is, \tag{107.7}$$

где k и s вещественны, получаем из (107.5):

$$k^2 - s^2 = \frac{\omega^2 L^* C^*}{c^2}, \qquad 2ks = \omega R^* C^*. \tag{107.8}$$

Таким образом, k и s имеют одинаковые знаки; для определенности выберем для них знак положительный. Внося (107.7) в (107.6), получаем

$$J = J_0 e^{-sz + i(\omega t - kz)},$$

откуда следует, что коэффициент затухания волны равен s, а ее фазовая скорость равна

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2s}{R^* C^*}. \tag{107.9}$$

Наконец, из (107.8) получаем

$$s^2 = \frac{C^* L^* \omega^2}{2c^2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{c^2 R^*}{\omega L^*} \right)^2} - 1 \right]. \tag{107.10}$$

При определении зависимости величин v и s от ω необходимо иметь в виду, что омическое сопротивление проводника быстропеременным токам, согласно (90.16) и (90.5), прямо пропорционально квадратному корню из частоты тока ω; следовательно,

$$R^* = \rho \sqrt{\omega}, \tag{107.11}$$

где ρ от ω не зависит [1]).

Предоставляем читателю доказать, что как фазовая скорость распространения волн v, так и их коэффициент затухания s монотонно возрастают с частотой волны ω и что при достаточно больших частотах, удовлетворяющих условию

$$\frac{c^2 R^*}{\omega L^*} = \frac{c^2 \rho}{\sqrt{\omega L^*}} \ll 1, \tag{107.12}$$

величины эти приближенно равны

$$v = \frac{e}{\sqrt{C^* L^*}} \quad \text{и} \quad s = \frac{cR^*}{2} \sqrt{\frac{C^*}{L^*}} = \frac{c\rho}{2} \sqrt{\frac{\omega C^*}{L^*}}. \tag{107.13}$$

[1]) В отличие от R^* емкость C^* от ω не зависит, а L^* стремится к постоянному пределу при $\omega \to \infty$ (см. § 90).

Таким образом, при $\omega \to \infty$ фазовая скорость стремится к постоянному пределу, тогда как коэффициент затухания возрастает как $\sqrt{\omega}$.

Для того чтобы по возможности уменьшить искажение речи при телефонировании по проводам на дальние расстояния, необходимо обеспечить выполнение в области акустических частот условия (107.12), ибо при этом условии достигается независимость фазовой скорости волн от частоты (коэффициент же затухания неизбежно возрастает с частотой). На практике выполнение условия (107.12) обеспечивается обыкновенно повышением самоиндукции линии путем включения в нее на известных промежутках специальных катушек самоиндукции (так называемые пупиновы катушки).

4. Нам остается показать на примере цилиндрического кабеля, что расчет быстропеременных токов в нем с помощью уравнения телеграфистов (107.4) совпадает с результатами, полученными нами в § 106 на основе более строгой теории.

Нетрудно убедиться, что в любом сечении кабеля в любой момент времени быстропеременный ток, текущий по внутреннему проводу, должен быть равен по величине и противоположен по направлению току, текущему по внешней обкладке кабеля [1]. Поэтому к рассматриваемому случаю применимы результаты решения примера 2 в § 81 [2], откуда следует, что самоиндукция единицы длины идеального кабеля должна выражаться уравнением (81.9)

$$L^* = 2\mu \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

С другой стороны, обкладки кабеля образуют собой цилиндрический конденсатор, емкость которого на единицу длины, согласно (9.2), равна

$$C^* = \frac{1}{2 \ln (r_2/r_1)},$$

если в пространстве между цилиндрами нет диэлектрика, и,

---

[1]) Действительно, благодаря скин-эффекту поле не проникает внутрь проводников. Поэтому циркуляция $\oint H_s\, ds$ магнитного вектора по окружности, проходящей внутри внешнего проводника и охватывающей оба тока, равна нулю. Так как из уравнения (88.2) следует уравнение

$$\oint_L H_s\, ds = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}})\, d\mathbf{S}$$

и так как током смещения $\mathbf{j}_{\text{см}}$ можно пренебречь по сравнению с током проводимости $\mathbf{j}$ (см. § 88), то алгебраическая сумма сил токов, протекающих через любое сечение S кабеля, должна в любой момент равняться нулю.

[2]) В этом примере мы считали кабель состоящим из двух коаксиальных полых цилиндрических проводящих поверхностей, что благодаря скин-эффекту допустимо при больших частотах.

стало быть, равна

$$C^* = \frac{\varepsilon}{2\ln(r_2/r_1)},$$

если между цилиндрами находится среда диэлектрической постоянной ε. Таким образом, $C^*L^* = \varepsilon\mu$.

Далее, сопротивление единицы длины кабеля слагается из сопротивления обоих его проводов и, согласно (90.16), равно

$$R^* = \frac{p_1}{2\pi r_1 \lambda_1} + \frac{p_2}{2\pi r_2 \lambda_2} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}\left(\frac{1}{r_1}\sqrt{\frac{\mu_1}{\lambda_1}} + \frac{1}{r_2}\sqrt{\frac{\mu_2}{\lambda_2}}\right),$$

где λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2 суть соответственно проводимость и магнитная восприимчивость внутреннего и внешнего проводников кабеля. Внося эти значения L^*, C^* и R^* в уравнения (107.13), справедливые при достаточно больших частотах [условие (107.12)], получаем

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad s = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{2\pi\mu}}\frac{1}{\ln(r_2/r_1)}\left(\frac{1}{r_1}\sqrt{\frac{\mu_1}{\lambda_1}} + \frac{1}{r_2}\sqrt{\frac{\mu_2}{\lambda_2}}\right), \quad (107.14)$$

что действительно полностью совпадает с (106.16).

§ 108. Свободная энергия ферромагнетиков. Гистерезис

1. Вопрос об энергии намагниченных ферромагнетиков не имеет прямого отношения к содержанию этой главы. Однако мы не могли рассмотреть этот вопрос в предшествующих главах потому, что для его выяснения необходимо воспользоваться понятием потока электромагнитной энергии, с которым мы познакомились только в § 92.

Рассмотрим неподвижный ферромагнетик объема V и поверхности S, окруженный неферромагнитной средой. Поскольку ферромагнетик неподвижен, то пондеромоторные силы над ним работы не совершают, и энергия может поступать из окружающего пространства через поверхность S внутрь занимаемого ферромагнетиком объема V только в двух формах: в форме тепла и в форме электромагнитной энергии. Стало быть, изменение за время dt полной энергии $W_{\text{полн}}$, локализованной внутри объема V, равно

$$dW_{\text{полн}} = Q - dt \cdot \oint_S S_n \, dS. \quad (108.1)$$

Здесь Q обозначает теплоту, поглощенную ферромагнетиком за время dt из окружающей среды, а S_n — проекцию вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$ на *внешнюю* нормаль $\mathbf{n}$ поверхности ферромагнетика S; поэтому второй член справа равен количеству электромагнитной энергии, поступившей за время dt извне, через поверхность S, внутрь объема V (см. § 92).

К окружающей ферромагнетик неферромагнитной среде применимы результаты § 92; поэтому вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ в этой среде, а стало быть, и на внешней поверхности ферромагнетика равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}].$$

Чтобы связать значения вектора Пойнтинга на поверхности ферромагнетика с электромагнитным полем внутри него, воспользуемся тем, что основные уравнения Максвелла остаются применимыми и в ферромагнетиках; нарушается применимость только уравнения $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ и выражения электромагнитной энергии (VI). Умножая максвеллово уравнение (I) на $\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}$, а уравнение (II) на $\frac{c}{4\pi}\mathbf{H}$ и складывая, получаем

$$\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{jE} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}) = -\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\mathbf{EH}].$$

Проинтегрировав это уравнение по объему ферромагнетика V и применив ко всем членам полученного таким образом уравнения, кроме последнего члена слева, те же преобразования, что и в § 92, получаем

$$-\int_S S_n \cdot dS = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int \varepsilon E^2\, dV + \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, dV + \int\left(\frac{j^2}{\lambda} - \mathbf{jE}^{\text{стр}}\right) dV.$$

Предположим, что сторонние электродвижущие силы в ферромагнетике отсутствуют ($\mathbf{E}^{\text{стр}} = 0$). Ограничимся, далее, рассмотрением бесконечно медленного изменения состояния ферромагнетика; при этом условии выделяющимся в ферромагнетике джоулевым теплом можно пренебречь. Действительно, плотность токов j, сопровождающих данное изменение состояния тела, обратно пропорциональна времени t, в течение которого происходит это изменение:

$$j \sim \frac{de}{t},$$

где de — количество электричества, протекшего в течение всего процесса через единицу сечения тела. Поэтому джоулево тепло $\int \frac{j^2}{\lambda}\, dt$, выделенное в единице объема тела за все время процесса, обратно пропорционально длительности процесса t:

$$\int j^2\, dt \sim tj^2 \sim \frac{1}{t}.$$

Таким образом, при сделанных предположениях можно пренебречь последним интегралом справа в выражении для потока электромагнитной энергии, так что уравнение (108.1) приобретает

вид

$$dW_{\text{полн}} = Q + d\int \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\,dV + \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}\,d\mathbf{B}\,dV.$$

Из полной энергии $W_{\text{полн}}$, локализованной в объеме ферромагнетика, можно выделить электрическую энергию:

$$dW = d\Big(W_{\text{полн}} - \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon E^2\,dV\Big) = Q + \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}\,d\mathbf{B}\,dV. \quad (108.2)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только энергию W, а не $W_{\text{полн}}$, и будем для краткости называть ее энергией ферромагнетика. Однозначное же выделение из W магнитной энергии невозможно, ибо последний член справа в уравнении (108.2) не является в ферромагнетиках полным дифференциалом характеризующих его состояние величин.

Впрочем, мы покажем в дальнейшем, что если в ферромагнетике отсутствует гистерезис, то из его *свободной* энергии можно рациональным образом выделить *свободную* энергию магнитного поля [см. уравнение (108.6)] [1].

2. До сих пор наши рассуждения носили совершенно общий характер. Для дальнейшего же необходимо раздельно рассмотреть среды, обладающие магнитным гистерезисом и не обладающие таковым. Допустим сначала, что среда не обладает ни гистерезисом, ни «постоянным» намагничением, т. е. что напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ в среде является однозначной функцией магнитной индукции $\mathbf{B}$ и температуры T (при заданном объеме или плотности среды) и что $\mathbf{H} = 0$ при $\mathbf{B} = 0$.

Это имеет место не только в диа- и парамагнетиках, но и в чистых недеформированных ферромагнитных монокристаллах [2]

---

[1]) Возможность выделения электрической энергии из $W_{\text{полн}}$ обусловлена тем, что при выводе теоремы Пойнтинга мы пренебрегли зависимостью диэлектрической проницаемости среды от температуры и вообще возможными изменениями значения ε. Только благодаря этому мы смогли в § 92 принять, что

$$\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E^2).$$

В общем же случае, при учете зависимости ε от состояния среды, зависимость энергии среды от электрического поля вполне аналогична ее зависимости от магнитного поля; отличие состоит только в том, что в диэлектриках (за исключением сегнетоэлектриков) нет электрического гистерезиса. В общем случае выражение

$$\psi_э = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbf{E}=\mathbf{D}=0}^{\mathbf{D}} (\mathbf{E})_T\,d\mathbf{D},$$

аналогичное выражению (108.6), определяет собой *свободную* энергию электрического поля.

[2]) В лишенных гистерезиса анизотропных средах значение $\mathbf{H}$ зависит не только от величины и направления вектора $\mathbf{B}$, но и от ориентации осей кристалла относительно этого вектора.

и, наконец, с достаточной степенью точности осуществляется в некоторых сортах мягкого железа и в некоторых технических сплавах (например, в пермаллое).

В случае отсутствия гистерезиса процесс намагничения среды (при условии достаточной его медленности) протекает *обратимо*. Количество теплоты Q, поглощенное телом при обратимом процессе, как известно, равно

$$Q = T\,dS,$$

где T — абсолютная температура, а dS — приращение энтропии тела S. Внесем это выражение для Q в (108.2) и предположим, кроме того, что уравнение это, доказанное для изменения энергии W всего ферромагнетика, остается справедливым и для изменения энергии каждого из элементов его объема. В результате получим следующее уравнение для изменения *плотности* w энергии ферромагнетика:

$$dw = T\,ds + \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{H}\,d\mathbf{B}, \tag{108.3}$$

где s означает удельную энтропию единицы объема тела.

Для многих целей удобно выразить плотность энергии w через свободную энергию единицы объема ψ, связанную с w известным термодинамическим соотношением

$$\psi = w - Ts. \tag{108.4}$$

Из (108.3) и (108.4) следует основное для интересующего нас круга вопросов соотношение

$$d\psi = -s\,dT + \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{H}\,d\mathbf{B}. \tag{108.5}$$

Пусть $\psi_0(T)$ означает плотность свободной энергии среды при $\mathbf{H} = \mathbf{B} = 0$. Интегрируя уравнение (108.5) *при постоянной* T от $\mathbf{B} = 0$ до произвольно заданного значения $\mathbf{B}$, получаем

$$\psi = \psi_0(T) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbf{H}=\mathbf{B}=0}^{\mathbf{B}} (\mathbf{H})_T\,d\mathbf{B}.$$

Ввиду однозначной зависимости $\mathbf{H}$ от $\mathbf{B}$ и T интеграл справа является однозначной функцией параметров состояния $\mathbf{B}$ и T. Таким образом, при отсутствии гистерезиса плотность свободной энергии среды может быть разложена на часть $\psi_0(T)$, зависящую только от температуры и нас здесь не интересующую, и на часть

$$\psi_{\text{м}} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbf{H}=\mathbf{B}=0}^{\mathbf{B}} (\mathbf{H})_T\,d\mathbf{B}, \tag{108.6}$$

которая и называется *плотностью свободной энергии магнитного поля.* В частном случае пара- и диамагнетиков $\mathbf{H} = (1/\mu)\mathbf{B}$ и (108.8) эквивалентно уже знакомому выражению

$$\psi_{\text{м}} = \frac{1}{8\pi\mu} B^2 = \frac{1}{8\pi} \mathbf{HB} = \frac{\mu H^2}{8\pi}. \tag{108.7}$$

В ферромагнетиках же, даже не обладающих заметным гистерезисом, зависимость $\mathbf{H}$ от $\mathbf{B}$, а следовательно, и $\psi_{\text{м}}$ от $\mathbf{B}$, вообще говоря, весьма сложна.

Так как работа пондеромоторных сил магнитного поля, совершаемая в изотермическом процессе, равна убыли в этом процессе свободной энергии магнитного поля, то, зная $\psi_{\text{м}}$, можно определить и пондеромоторные силы магнитного поля (ср. § 83).

3. Заметим, что часто плотностью свободной энергии ферромагнетика называют не величину ψ, определенную уравнениями (108.4) и (108.5), а величину ψ', равную

$$\psi' = \psi - \frac{H^2}{8\pi}.$$

Так как

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I},$$

то

$$\frac{1}{4\pi} \mathbf{H}\, d\mathbf{B} = d\left(\frac{H^2}{8\pi}\right) + \mathbf{H}\, d\mathbf{I},$$

и поэтому на основании (108.5)

$$d\psi' = d\left(\psi - \frac{H^2}{8\pi}\right) = -s\, dT + \mathbf{H}\, d\mathbf{I}. \tag{108.8}$$

Еще чаще плотностью свободной энергии ферромагнетика называют величину

$$\psi'' = \psi' - \mathbf{IH},$$

полный дифференциал которой равен

$$d\psi'' = -s\, dT - \mathbf{I}\, d\mathbf{H} \tag{108.9}$$

и которой, действительно, часто удобнее всего пользоваться в приложениях. Эта путаница в терминологии весьма прискорбна; существенно, однако, что величины ψ, ψ' и ψ'' являются равноправными характеристическими функциями состояния среды в смысле термодинамики, т. е. являются однозначными функциями состояния среды, и приращения, испытываемые ими при произвольном процессе, являются полными дифференциалами в переменных, характеризующих состояние среды. В качестве такой переменной может быть выбрано наряду с температурой T либо $\mathbf{B}$, либо $\mathbf{I}$, либо $\mathbf{H}$. Этим трем возможностям соответствует

выбор в качестве характеристической функции состояния одной из величин ψ, ψ' и ψ'' [1]).

4. Если среда обладает гистерезисом, то между **H** и **B** не существует однозначной функциональной зависимости, процесс намагничивания протекает необратимо, и состояние среды не может быть однозначно охарактеризовано такими параметрами, как **B**, **H**, T, ибо оно существенно зависит не только от мгновенного значения этих параметров, но и от предыстории среды. Поэтому к средам с гистерезисом применима лишь формула (108.2), но не формула (108.3) и последующие.

Ограничимся кратким рассмотрением гистерезиса в тех случаях, когда данный ферромагнетик уже неоднократно подвергался в прошлом намагничению и размагничению. Пусть намагничивающее поле H достигало при этом в двух противоположных направлениях (например, по оси x против этой оси) некоторого максимального значения $H_{\text{макс}}$. В этом случае состояние ферромагнетика при последующих изменениях H в пределах от $H_{\text{макс}}$ до $-H_{\text{макс}}$ и обратно (при условии, что **H** остается параллельным и антипараллельным оси x) может быть, как известно, изображено диаграммой рис. 88. Каждому значению напряженности поля H' соответствуют в данном случае д в а значения индукции B в зависимости от того, предшествовали ли этому полю H' поля меньшие (точка a) или бóльшие (точка b). Таким образом, точка, изображающая на диаграмме $H - B$ состояние ферромагнетика, пробегает при изменениях поля замкнутую *петлю гистерезиса* в направлении, указанном на рис. 88 стрелками.

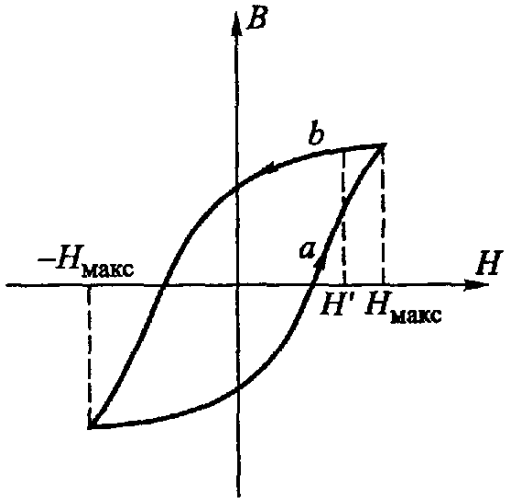

Рис. 88

Если система совершит полный цикл, т. е. если изображающая ее состояние точка, пробежав всю петлю гистерезиса, вер-

[1]) Это вполне аналогично тому, что в обычной теории уравнений состояния и фазовых переходов можно в качестве независимых переменных выбрать либо температуру T и объем системы V, либо T и давление p. Соответствующими характеристическими функциями являются свободная энергия Ψ, причем $d\Psi = -S\,dT - p\,dV$, и термодинамический потенциал $\Phi = \Psi + pV$, причем $d\Phi = -S\,dT + V\,dp$. Равновесие, как известно, соответствует минимуму Ψ (если заданы T и V) либо минимуму Φ (если заданы T и p). Совершенно так же, как доказываются эти положения, можно доказать, что устойчивое состояние магнетика определяется· 1) минимумом функции ψ, если заданы T и индукция магнитного поля **B**, либо 2) минимумом функции ψ', если заданы T и намагничение магнетика **I**, либо, наконец, 3) минимумом функции ψ'', если заданы T и **H**.

нется в исходное положение, то система вернется в исходное состояние (предполагается, что процесс происходит при постоянной температуре). В частности, входящая в уравнение (108.2) энергия ферромагнетика примет в конечном состоянии исходное значение. Поэтому, интегрируя уравнение (108.2) вдоль замкнутой петли гистерезиса, получаем

$$-\sum Q = \frac{1}{4\pi}\int dV \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{B}, \tag{108.10}$$

где $-\sum Q$ означает алгебраическую сумму количеств теплоты, *отданных* ферромагнетиком внешней среде в течение полного цикла. Интеграл $\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{B}$ существенно положителен, ибо в большей части цикла $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ параллельны друг другу [1]), следовательно, и $-\sum Q$, так называемое тепло гистерезиса, также положительно. Если обозначить через q тепло гистерезиса, отнесенное к единице объема ферромагнетика, то (108.10) можно представить в следующем виде:

$$q = \frac{1}{4\pi}\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{B} = \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{I}. \tag{108.11}$$

Последнее равенство написано на основании того, что разность

$$\frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\, d\mathbf{B} - \mathbf{H}\, d\mathbf{I} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\, d\mathbf{H} = \frac{1}{8\pi} d\mathbf{H}^2$$

является полным дифференциалом и, следовательно, интеграл этой разности по замкнутой петле гистерезиса равен нулю.

§ 109. Общая характеристика теорий близко- и дальнодействия

1. В этом заключительном параграфе главы мы постараемся подвести некоторые итоги сказанному об основных отличиях различных теорий электричества и о сущности воззрений на природу электромагнитных явлений, лежащих в основе этих теорий.

В господствовавших до середины прошлого столетия теориях *дальнодействия* роль основного, первичного понятия играло понятие электрической *субстанции* (зарядов). Все электромагнитные явления сводились к *взаимодействию зарядов на расстоянии* (actio in distans) и притом взаимодействию *мгновенному*. Иными словами, предполагалось, что силы взаимодействия как покоящихся, так и движущихся зарядов (*токи*) в каждый момент времени определяются распределением и состоянием движения этих зарядов *в тот же момент времени*. Допускалось,

[1]) Учитывая анизотропию ферромагнетика, правильнее сказать, что в большей части цикла $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ составляют острый угол.

что силы эти могут зависеть не только от скорости, но и от ускорения зарядов, от производной силы тока по времени и т. п.; существенно лишь, чтобы силы взаимодействия однозначно определялись *мгновенным* значением этих физических величин. Таким образом, в теориях дальнодействия понятие поля играет роль вспомогательного понятия, к пользованию которым, при желании, можно вовсе не прибегать. Типичными примерами законов дальнодействия являются закон Кулона (1.3) и закон механического взаимодействия элементов тока (43.1)

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{e_1 e_2}{R_{12}^3}\mathbf{R}_{12}, \quad \mathbf{F}_{12} = \frac{J_1 J_2}{c^2 R_{12}^3}[d\mathbf{s}_2[d\mathbf{s}_1\mathbf{R}_{12}]].$$

Наоборот, в классической фарадей-максвелловской теории *близкодействия* роль основного первичного понятия играет понятие поля, понятия же заряда и тока низводятся в ранг вторичных вспомогательных понятий, характеризующих свойства поля (§ 91, с. 423). С этой точки зрения все электромагнитные явления заключаются в изменениях поля и подчиняются *дифференциальным уравнениям в частных производных*, связывающим значения электромагнитных векторов *в смежных точках пространства в смежные моменты времени* (близкодействие) [1]. Соответственно этому всякое изменение или, как принято говорить, *возмущение* поля, возникающее в данном участке пространства, оказывает *непосредственное* воздействие лишь на смежные с ним участки поля. Таким образом, всякое электромагнитное возмущение постепенно передается от точки к точке и требует конечного времени для своего распространения (*конечная скорость распространения*).

Именно эта фарадей-максвелловская концепция электромагнитных явлений лежала в основе столь характерных для физики XIX столетия попыток механического истолкования этих явлений и сведения их к деформациям и движениям гипотетической упругой среды — *эфира*.

2. Однако если отвлечься от вопросов истолкования и от задачи создания наглядной картины явлений, то *по фактическому содержанию* отличие теории близкодействия от теории дальнодействия сводится, в сущности, к вопросу о скорости распространения электромагнитных возмущений (§ 97). Поэтому спор между теориями близкодействия и дальнодействия может быть разрешен (и был разрешен) лишь путем экспериментального изучения *быстропеременных* полей, характер явлений в которых существенно зависит от скорости распространения электромагнитных возмущений (скорость света, скорость радиотелеграф-

[1]) Так, например, значения пространственных производных div и rot в каждой точке поля зависят исключительно лишь от значений соответствующих векторов в смежных точках пространства.

ных сигналов и т. п.). Явления же в стационарных полях, как мы неоднократно указывали, могут быть одинаково хорошо истолкованы с точки зрения *обеих* теорий.

Совершенно неправильно, например, встречающееся иногда утверждение, что теория дальнодействия не может учесть роли среды в электромагнитных явлениях, ибо в действительности для этого вполне достаточно постулировать наличие в молекулах среды элементарных зарядов и токов. В частности, вся теория диэлектриков и магнетиков, изложенная нами в главах II и V, может быть полностью сохранена в теории дальнодействия. Наконец, законы *квазистационарных* токов также могут быть уложены в рамки теории дальнодействия, ибо индукционное взаимодействие квазистационарных токов определяется их взаимным расположением и мгновенным значением производной силы тока по времени [см. § 78, в частности уравнение (78.3), а также вторую половину § 97].

3. Обратимся теперь к вопросу об электромагнитной энергии.

В теории дальнодействия под электромагнитной энергией подразумевается, конечно, не энергия поля, а энергия взаимодействия зарядов или токов. Этому пониманию энергии вполне соответствует форма наших уравнений (15.5) и (79.6):

$$W_э = \frac{1}{2}\sum_{ik}\frac{e_i e_k}{R_{ik}} \quad (i \neq k), \qquad W_м = \frac{1}{2c^2}\sum_{ik} L_{ik} J_i J_k.$$

Вопрос о локализации энергии в пространстве теряет при этом всякий смысл, ибо общая энергия слагается из отдельных членов, каждый из которых выражает *энергию взаимодействия* определенной *пары зарядов или токов*, определяемую *мгновенным* состоянием этих зарядов или токов, находящихся в *различных* участках пространства [1].

Напротив, в теории близкодействия под электромагнитной энергией понимается *энергия поля*, которая считается вполне определенным образом *локализованной в пространстве*. Это значит, что теория вполне определенным образом отвечает на вопрос о количестве энергии, находящейся в каждом данном участке пространства, причем объемная плотность энергии определяется уравнением (VIa) (см. § 92):

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{8\pi}.$$

В пределах стационарных и квазистационарных полей обе эти точки зрения одинаково хорошо согласуются с данными опыта,

[1] В частности, под *собственной* энергией заряда (или тока) понимается энергия взаимодействия тех элементов заряда (или нитей тока), на которые может быть разложен данный заряд (или ток) (см. § 16 и 81)

ибо, как мы видели, формулы (15.5) и (79.6) в этих полях математически эквивалентны формуле (VIa). Однако в быстропеременных полях эквивалентность этих формул нарушается, а факт конечной скорости электромагнитных возмущений, в связи с законом сохранения энергии, решает вопрос в пользу локализации энергии в поле.

Пусть, например, в момент t_0 со станции A послан радиотелеграфный или световой сигнал. Это значит, что некоторое количество неэлектромагнитной энергии перешло в энергию электромагнитного излучения. Пусть станция B в момент t_1 восприняла этот сигнал. Это значит, что в этот момент в B выделилось некоторое количество энергии, принесенной из A электромагнитными волнами. Эта энергия могла, например, пойти на приведение в движение реле (прием радиосигнала) или на разложение бромистого серебра (прием светового сигнала на фотографическую пленку) и т. п.

Если расстояние между A и B равно R, то промежуток $t_1 - t_0$ между подачей и приемом сигнала должен равняться R/c. Если длительность сигнала мала, то существует такой промежуточный момент t' $(t_0 < t' < t_1)$, когда в B сигнал еще не воспринят, тогда как в A процесс излучения уже закончился и все пришло в состояние, соответствующее уменьшившемуся благодаря излучению запасу энергии. Где же в это время находится энергия, излученная станцией A?

Если мы не хотим отказаться от принципа сохранения энергии, то на этот вопрос можно ответить *только* в том смысле, что значение электромагнитной энергии определяется не мгновенным распределением токов и зарядов, а состоянием *поля* и что отданная на станции A энергия в момент t_0 переходит в *энергию электромагнитного поля излучения*. Энергия эта распространяется в пространстве вместе с распространением поля и лишь впоследствии, в момент t_1, частично устанавливается станцией B.

4. Итак, факт конечной скорости распространения электромагнитных возмущений подтверждает предположение о локализации энергии в электромагнитном поле и доказывает несостоятельность теорий дальнодействия. Однако из этого вовсе не вытекает, что единственно правильными являются воззрения классической теории поля с ее отрицанием субстанционального существования зарядов. Действительно, в § 94–96 мы показали, что электромагнитное поле однозначно определяется распределением зарядов и токов *проводимости*, при том, правда, непременном условии, что распределение это известно не только для рассматриваемого, но и для предшествующих моментов времени (*запаздывающие* потенциалы). На этом именно обстоятельстве и базируется современная *электронная теория*, являю-

щаяся своего рода *синтезом* теорий дальнодействия и фарадей-максвелловской теории поля.

С классическими теориями дальнодействия ее роднит признание первичной физической реальности электрической субстанции. Заряд не есть просто термин, характеризующий некоторые специфические особенности поля в данной точке пространства, напротив, поле может возбуждаться только зарядами и их движением. Наиболее ярким выражением родственных теориям дальнодействия представлений о субстанциональности электричества является характерный для электронной теории постулат об *атомистическом строении электричества*, совершенно чуждый последовательной фарадей-максвелловской концепции. С точки зрения электронной теории, первичный смысл понятия поля сводится к тому, что с помощью этого понятия облегчается изучение основного вопроса о силах, действующих на заряды; изучение поля есть лишь промежуточный этап решения задачи о взаимодействии зарядов С другой стороны, электронная теория восприняла из фарадей-максвелловской теории поля принцип конечности скорости распространения поля (т. е. распространения взаимодействия зарядов). Поэтому, с точки зрения электронной теории, можно говорить лишь о своего рода *запаздывающем дальнодействии* зарядов и токов (запаздывающие потенциалы), а не о дальнодействии мгновенном, как это предполагалось теориями прошлого века.

Впрочем, о запаздывающем дальнодействии в применении к электронной теории можно говорить лишь весьма условно. Электронная теория не только сохраняет для вакуума систему уравнений Максвелла, удовлетворяющих принципу близкодействия, но и считает эти уравнения для вакуума (дополненные членами, учитывающими плотность зарядов и токов, создаваемую элементарными электрическими зарядами) справедливыми также и для *микроскопического* поля в произвольной среде. Из всех уравнений поля вытекает принцип конечности скорости распространения поля, из которого, как мы видели, в свою очередь следует, что носителем электромагнитной энергии является электромагнитное поле. Из того же принципа, как легко показать, вытекает также, что поле является носителем не только определенной энергии, но и определенного количества движения, или импульса, о котором шла речь в § 103–105. Таким образом, и в электронной теории понятие поля из ранга понятия вспомогательного (облегчающего решение задачи о взаимодействии зарядов) в конечном счете возводится в ранг объективной реальности (носителя энергии и импульса).

ГЛАВА VIII

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В МЕДЛЕННО ДВИЖУЩИХСЯ СРЕДАХ

§ 110. Дифференциальные уравнения поля в движущихся средах

1. В предыдущей главе (как, впрочем, и в большей части всей вообще книги) мы ограничились рассмотрением электромагнитного поля в тех случаях, когда все находящиеся в поле тела неподвижны. Таким образом, результаты гл. VII, строго говоря, неприменимы ни к явлениям в динамо-машинах и электромоторах, в которых имеются вращающиеся части, ни к отражению света от движущегося зеркала, ни к целому ряду других важных явлений и процессов. Правда, сущность процессов, происходящих, например, в электромоторе, может быть понята на основе фактов, изложенных в гл. VI, однако развитие последовательной теории электромагнитных явлений в движущихся средах является, конечно, совершенно необходимым.

Последовательная теория этих явлений может основываться только на эйнштейновской теории относительности. Мы, однако, не будем предполагать, что читатель обладает достаточным знакомством с этой теорией, а потому ограничимся рассмотрением только *медленно* движущихся сред. При этом под медленными движениями мы будем подразумевать движения, скорость которых u весьма мала по сравнению со скоростью света c:

$$\frac{u}{c} \ll 1. \tag{110.1}$$

Другими словами, мы будем пренебрегать всеми эффектами, пропорциональными квадрату и старшим степеням отношения u/c. Дело в том, что теория медленно движущихся сред может быть в основном построена на базе классических, дорелятивистских физических представлений, так что нам придется заимствовать из теории относительности только два соотношения (111.8) и (111.9). Точная же теория эффектов, пропорциональных $\left(\frac{u}{c}\right)^2$, целиком основывается на теории относительности. Вместе с тем условие (110.1) медленности движения материальных сред выполняется в громадном большинстве практически интересных явлений и процессов (ведь $c = 3 \cdot 10^5$ км/с!).

2. Будем исходить из микроскопических уравнений электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H}_{\text{м}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}_{\text{м}}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{м}}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E}_{\text{м}} = 4\pi\rho_{\text{м}}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E}_{\text{м}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}_{\text{м}}}{\partial t} &= 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H}_{\text{м}} = 0, \end{aligned} \tag{110.2}$$

где индекс «м» означает микроскопическое значение соответствующей величины. Уравнения эти справедливы при любом движении элементарных электрических зарядов и, стало быть, при любом движении материальных тел, в состав которых входят эти заряды. Нашей задачей является получение из (110.2) уравнений *макроскопического* поля в движущихся средах.

Усредняя уравнения (110.2) по физически бесконечно малым объемам, как мы это делали, например, в § 26 и 62, используя соотношения типа (25.2) и вводя обозначения [ср. уравнение (62.6)]

$$\overline{\mathbf{E}}_{\text{м}} = \mathbf{E}, \quad \overline{\mathbf{H}}_{\text{м}} = \mathbf{B}, \tag{110.3}$$

получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\bar{\mathbf{j}}_{\text{м}}, \tag{110.4}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\bar{\rho}_{\text{м}}, \tag{110.5}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{110.6}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{110.7}$$

Разложим, как мы это делали в § 26 и 60, микроскопические плотности зарядов и токов $\rho_{\text{м}}$ и $\mathbf{j}_{\text{м}}$ на плотности, соответствующие свободным и связанным зарядам:

$$\rho_{\text{м}} = \rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{связ}}, \quad \mathbf{j}_{\text{м}} = \mathbf{j}_{\text{своб}} + \mathbf{j}_{\text{связ}}$$

[см. уравнения (26.2) и (60.1); в последнем из этих уравнений мы изменили обозначения $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ и $\mathbf{j}_{\text{мол}}$ соответственно на $\mathbf{j}_{\text{своб}}$ и $\mathbf{j}_{\text{связ}}$]. Далее, приравняем средние плотности, соответствующие *свободным* зарядам, макроскопическим плотностям зарядов и токов [ср. § 26 и 61, в частности уравнение (61.3)]:

$$\bar{\rho}_{\text{своб}} = \rho, \quad \bar{\mathbf{j}}_{\text{своб}} = \mathbf{j}. \tag{110.8}$$

Таким образом, получаем

$$\bar{\rho}_{\text{м}} = \rho + \bar{\rho}_{\text{связ}}, \quad \bar{\mathbf{j}}_{\text{м}} = \mathbf{j} + \bar{\mathbf{j}}_{\text{связ}}. \tag{110.9}$$

В случае покоящихся сред нами было показано, что

$$\bar{\rho}_{\text{связ}} = -\operatorname{div}\mathbf{P}, \quad \mathbf{j}_{\text{связ}} = c\operatorname{rot}\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \tag{110.10}$$

где $\mathbf{P}$ означает поляризацию, а $\mathbf{I}$ — намагничение среды. Действительно, первое из этих уравнений совпадает с (21.2) и (26.3).

Что же касается второго из уравнений (110.10), то в случае постоянного во времени поля оно совпадает с выражениями (61.9) для $\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}}$; в случае переменного поля к $\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}}$ нужно еще прибавить член

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\text{связ}} e_i \mathbf{r}_i = \sum_{\text{связ}} e_i \mathbf{v}_i,$$

учитывающий смещение зарядов, связанных с молекулами диэлектрика [ср. уравнение (88.7)].

В случае покоящихся сред наряду с уравнениями (110.10) справедливы также следующие соотношения [ср. уравнения (20.6) и (60.2)]:

$$\mathbf{P} = \sum e_i \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{I} = \frac{1}{2c} \sum e_i [\mathbf{R}_i \mathbf{v}_i], \tag{110.11}$$

где суммирование распространено на все связанные заряды, находящиеся в единице объема среды. Любую пару уравнений (110.10) или (110.11) можно рассматривать как *определение* векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$; физический смысл имеет только утверждение, что векторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$, определяемые одной из пар этих уравнений, удовлетворяют также и другой паре этих уравнений.

Однако в случае движущихся сред обе пары уравнений (110.10) и (110.11), как оказывается, не могут быть одновременно справедливыми. Поэтому в теории движущихся сред можно либо сохранить уравнения (110.10), видоизменив при этом соответствующим образом уравнения (110.11), либо, наоборот, сохранить уравнения (110.11) и видоизменить уравнения (110.10).

Первый вывод уравнений поля в движущихся средах из уравнений (110.2) электронной теории был дан Лоренцем, избравшим второй из указанных путей, в 90-х годах. Точнее говоря, Лоренц сохранил для движущихся сред определения (110.11) векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$ с тем уточнением, что под $\mathbf{v}_i$ в этих уравнениях надо понимать скорость связанных зарядов *относительно среды*, в состав которой они входят, а не относительно наблюдателя. Что же касается уравнения (110.10), то, по Лоренцу, единственное изменение, которое нужно внести в них в случае движущихся сред, заключается в замене $\mathbf{I}$ на $\mathbf{I} + \frac{1}{c}[\mathbf{P}\mathbf{u}]$, где $\mathbf{u}$ — скорость среды относительно наблюдателя. Однако теория Лоренца, естественно, не учитывала основных положений теории относительности, еще не существовавшей в прошлом веке, и поэтому оказалась противоречащей как теории относительности, так и опыту (даже в трактовке некоторых эффектов первого порядка относительно u/c).

Делленбах в 1919 г. [1]) показал, как нужно видоизменить рассуждения Лоренца, чтобы, следуя избранному им пути построе-

[1]) *Делленбах* // Ann. d. Physik. 1919 V 58. P. 523 (см. также *Паули В В.* Теория относительности. — М.· Наука, 1991. § 34).

ния электродинамики движущихся сред, учесть вместе с тем требования теории относительности. Мы, однако, изберем другой путь построения электродинамики движущихся сред, непосредственно примыкающий к обычной трактовке этой проблемы в теории относительности и вместе с тем носящий более феноменологический характер. А именно, мы, во-первых, сохраним для движущихся сред уравнения (110.10), рассматривая эти уравнения как *определения* векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$ и, во-вторых, отказавшись для движущихся сред от уравнений (110.11), вовсе не будем рассматривать явной зависимости поляризации $\mathbf{P}$ и намагничения $\mathbf{I}$ от координат и скоростей элементарных зарядов типа уравнений (110.11), а непосредственно установим зависимость $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$ от векторов поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

3. Итак, мы будем рассматривать уравнения (110.10) как определение векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$. Чтобы доказать непротиворечивость этого определения, достаточно воспользоваться уравнением непрерывности (IVa), которое в применении к средней плотности связанных зарядов и токов может быть записано так:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\rho}_{\text{связ}} + \operatorname{div}\bar{\mathbf{j}}_{\text{связ}} = 0. \tag{110.12}$$

Очевидно, что при любой зависимости $\rho_{\text{связ}}$ от координат и времени всегда можно найти бесконечное множество векторов $\mathbf{P}$, удовлетворяющих первому из уравнений (110.10). Внося это уравнение в (110.12), получаем

$$-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{P} + \operatorname{div}\bar{\mathbf{j}}_{\text{связ}} = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{div}\left\{\bar{\mathbf{j}}_{\text{связ}} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right\} = 0.$$

Отсюда следует, что вектор $\bar{\mathbf{j}}_{\text{связ}} - \partial\mathbf{P}/\partial t$ может быть приравнен ротору вспомогательного вектора $\mathbf{I}$. Именно это следствие и выражается вторым из уравнений (110.10).

На основании (110.8) и (110.10) уравнения (110.4) и (110.5) принимают вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + 4\pi\operatorname{rot}\mathbf{I} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho - 4\pi\operatorname{div}\mathbf{P}.$$

С помощью обычных обозначений

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad \text{и} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{I} \tag{110.13}$$

эти уравнения можно записать в форме

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{I}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{IV}$$

совпадающей с уравнениями (I) и (IV) гл. VII. Из (I) и (IV) следует уравнение непрерывности

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{IVa}$$

Вместе с тем уравнения (110.6) и (110.7) совпадают с уравнениями (II) и (III) гл. VII:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{II}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{III}$$

Таким образом, *дифференциальные* уравнения Максвелла оказываются без всяких модификаций применимыми не только к покоящимся, но и к движущимся средам [и притом вне всякой зависимости от того, выполняется или не выполняется условие медленности движения (110.1)].

Впрочем, этот результат пока имеет чисто формальный характер и обусловливается просто-напросто тем, что мы сохранили для векторов $\mathbf{P}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ прежние определения (110.10) и (110.13). Дифференциальные уравнения Максвелла (I)–(IV) теряют характер формальных определений и приобретают конкретное физическое содержание только при условии присоединения к ним дополнительных соотношений типа (V) (см. § 91), связывающих между собой значения основных векторов электромагнитного поля. Установлению этих соотношений посвящен следующий параграф.

4. Отметим в заключение, что в то время как дифференциальные уравнения Максвелла (I)–(IV) остаются справедливыми для движущихся сред, вытекающие из них граничные условия для векторов поля несколько изменяются (ср. § 91):

$$\operatorname{Rot}\mathbf{H} = [\mathbf{n}(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i} - \frac{v_n}{c}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1), \tag{I'}$$

$$\operatorname{Rot}\mathbf{E} = [\mathbf{n}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = \frac{v_n}{c}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), \tag{II'}$$

$$\operatorname{Div}\mathbf{B} = B_{2n} - B_{1n} = 0, \tag{III'}$$

$$\operatorname{Div}\mathbf{D} = D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \tag{IV'}$$

где v_n — проекция скорости элемента поверхности раздела на нормаль.

§ 111. Конвекционный ток. Поляризация и намагничение движущихся сред

1. В этом параграфе мы рассмотрим зависимость поляризации среды, ее намагничения и макроскопической плотности тока от напряженности поля. Начнем с плотности тока. Согласно (110.8) и (68.4),

$$\mathbf{j} = \bar{\mathbf{j}}_{\text{своб}} = (\overline{\rho\mathbf{v}})_{\text{своб}},$$

где, очевидно, под $\mathbf{v}$ нужно понимать скорость свободных электрических зарядов относительно наблюдателя. Точнее говоря,

предполагается, что все отсчеты положения и движения зарядов, материальных тел и различных сред производятся в некоторой определенной *инерциальной* системе отсчета, которую мы условно называем неподвижной и считаем связанной с наблюдателем (см. § 77). Кратко это выражается словами: «скорость относительно наблюдателя».

Конечно, все инерциальные системы равноправны. Однако результаты этого параграфа носят приближенный характер и справедливы лишь в случае достаточной медленности движения среды относительно наблюдателя [условие (110.1)]. Иными словами, они справедливы лишь в таких инерциальных системах, скорость которых относительно находящихся в поле материальных тел много меньше скорости света.

Обозначим через $\mathbf{v}'$ скорость зарядов относительно того элемента среды, в состав которой они входят. Тогда

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}, \tag{111.1}$$

где $\mathbf{u}$ — скорость элемента среды относительно наблюдателя. Внося это в предыдущее уравнение, получаем

$$\mathbf{j} = (\overline{\rho\mathbf{v}})_{\text{своб}} = \overline{\rho(\mathbf{v}' + \mathbf{u})}_{\text{своб}} = (\overline{\rho\mathbf{v}'})_{\text{своб}} + \overline{\mathbf{u}}\rho_{\text{своб}},$$

ибо скорость среды $\mathbf{u}$ как величину макроскопическую нужно считать постоянной во всех точках физически бесконечно малого объема, по которому производится усреднение в предшествующих формулах. Воспользовавшись обозначением (110.8) для $\rho_{\text{своб}}$ и введя обозначение

$$\mathbf{j}_{\text{пр}} = (\overline{\rho\mathbf{v}'})_{\text{своб}}, \tag{111.2}$$

для плотности тока проводимости получаем

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{u} + \mathbf{j}_{\text{пр}}. \tag{111.3}$$

Первый член в этой формуле $\rho\mathbf{u}$ называется плотностью *конвекционного*, или переносного, *тока* и учитывает тот факт, что свободные заряды среды плотности ρ движутся (переносятся) вместе со средой с ее скоростью $\mathbf{u}$. Так, например, ток, обусловленный движением заряженного диэлектрика, полностью сводится к конвекционному току, ибо ток проводимости $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ в этом случае отсутствует. Действительно, согласно определению (111.2) плотности тока проводимости, этот ток обусловливается движением свободных зарядов *относительно среды* (скорость $\mathbf{v}'$), а в диэлектрике это движение невозможно.

В случае покоящихся сред ток проводимости, согласно (38.1) или (V), равен

$$\mathbf{j}_{\text{пр}} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}), \tag{111.4}$$

где λ — электропроводность среды. При обобщении этого уравнения на случай движущихся сред необходимо учесть, что на заряды, увлекаемые средой со скоростью $\mathbf{u}$, действует не сила $e\mathbf{E}$,

а лоренцева сила $e\left(\mathbf{E}+\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{H}\right]\right)$. Так как речь идет о *макроскопической* величине $\mathbf{j}_{\text{пр}}$, то при замене в (111.4) вектора $\mathbf{E}$ на $\mathbf{E}+\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{H}\right]$ нужно под $\mathbf{H}$ понимать *среднее* значение микроскопической напряженности $\mathbf{H}_{\text{м}}$, согласно (110.3) равное $\mathbf{B}$. Другими словами, в движущихся средах сила, действующая на заряды среды, определяется не электрическим полем $\mathbf{E}$, а эффективным полем:

$$\mathbf{E}^{*}=\mathbf{E}+\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{B}\right]. \tag{111.5}$$

Таким образом, в движущихся средах вместо (111.4) получаем

$$\mathbf{j}_{\text{пр}}=\lambda(\mathbf{E}^{*}+\mathbf{E}^{\text{стр}})=\lambda\left(\mathbf{E}+\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{B}\right]+\mathbf{E}^{\text{стр}}\right). \tag{111.6}$$

Строго говоря, сумму в скобках нужно было бы еще дополнить членом $\left[\frac{\mathbf{v}'}{c}\cdot\mathbf{B}\right]$, ибо полная скорость свободных зарядов, согласно (111.1), равна $\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{v}'$. Учет этого члена соответствует учету эффекта Холла (см. § 45), которым ввиду его малости мы пренебрежем.

Совокупность уравнений (111.3) и (111.6) определяет зависимость макроскопического тока от векторов поля, от ρ, от проводимости и скорости среды. Впрочем, уравнения эти справедливы лишь для медленно движущихся сред [условие (110.1)].

2. Переходим к поляризации $\mathbf{P}$ и намагничению $\mathbf{I}$ среды. В случае покоящихся сред эти величины следующим образом зависят от $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ [см. уравнения (22 6), (63.1) и (63.2)]:

$$\mathbf{P}_0=\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\mathbf{E},\quad \mathbf{I}_0=\frac{\mu-1}{4\pi}\mathbf{H}=\frac{1}{4\pi}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\mathbf{B} \tag{111.7}$$

(индекс 0 означает, что соответствующие величины относятся к покоящейся среде). Как и в гл. VII, мы ограничимся случаем, когда постоянных магнитов и ферромагнетиков в поле нет, и будем считать материальные постоянные ε и μ не зависящими ни от напряженности поля, ни от скорости среды.

Обобщение уравнений (111.7) на случай медленно движущихся сред гласит:

$$\mathbf{P}=\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\left(\mathbf{E}+\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{B}\right]\right)+\frac{1}{4\pi}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{B}\right], \tag{111.8}$$

$$\mathbf{I}=\frac{1}{4\pi}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left(\mathbf{B}-\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{E}\right]\right)-\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{E}\right]. \tag{111.9}$$

Выражения эти могут быть получены из соответствующих формул теории относительности, если в этих формулах пренебречь величиной u^2/c^2 по сравнению с единицей. Мы, однако, не будем приводить теоретического обоснования выражений (111.8)

и (111.9), а будем считать их *данными опытом* и лишь укажем наглядный физический смысл некоторых из членов, входящих в эти выражения.

Первый член выражения (111.8) непосредственно получается из выражения (111.7) для $\mathbf{P}_0$ путем замены $\mathbf{E}$ напряженностью эффективного поля $\mathbf{E}^*$ [уравнение (111.5)], что попросту означает учет наряду с электрической силой $e\mathbf{E}$ также и лоренцевой силы, действующей в магнитном поле на связанные заряды диэлектрика, движущиеся со скоростью $\mathbf{u}$.

Последний член выражения (111.9) также имеет простой смысл — он учитывает магнитное поле, создаваемое движением поляризованного диэлектрика. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть простейший случай, экспериментально исследованный русским ученым А.А. Эйхенвальдом. Круглый эбонитовый диск вращался вокруг своей оси между обкладками конденсатора, представлявшими собой два плоских металлических кольца (рис. 89). Однородное (в первом приближении) поле $\mathbf{E}$ конденсатора вызывало равномерную поляризацию диска $\mathbf{P}$, перпендикулярную его плоскости. Таким образом, объемная плотность связанных зарядов внутри диэлектрика равнялась нулю, на верхней же и на нижней поверхностях диска сосредоточивались, согласно (21.2), связанные поверхностные заряды плотности

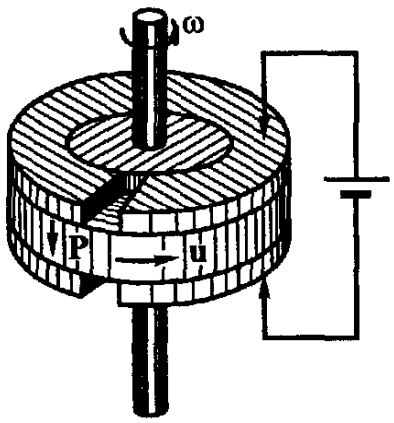

Рис 89

$$\bar{\sigma}_{\text{связ}} = \pm P = \pm\frac{\varepsilon-1}{4\pi}E.$$

Движение этих зарядов со скоростью $\mathbf{u}$ эквивалентно поверхностным токам плотности

$$\mathbf{i} = \mathbf{u}\bar{\sigma}_{\text{связ}} = \pm\mathbf{u}P = \pm\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\mathbf{u}E, \quad (111.10)$$

циркулирующим соответственно по верхней и нижней поверхностям диска. Токи эти обнаруживались по отклонению магнитной стрелки, поднесенной к вращающемуся диску. С целью количественных измерений оба плоских кольца, образовывавших конденсатор, делались разрезными, и через них при покоящемся диске пропускался ток во взаимно противоположных направлениях. Определялась сила тока, оказывающая на магнитную стрелку такое же действие, как и вращение диска. Опыт подтвердил справедливость формулы (111.10).

В излагаемой нами трактовке явлений в движущихся средах движение связанных зарядов среды, согласно (110.10), учитывается ее *намагничиванием* $\mathbf{I}$ (а также членом $\partial\mathbf{P}/\partial t$, в опытах Эйхенвальда равнявшимся нулю), причем, согласно (111.9), в среде, магнитная проницаемость которой μ равна единице,

$$\mathbf{I} = -\frac{\varepsilon-1}{4\pi c}[\mathbf{uE}]. \quad (111.11)$$

Легко убедиться, что система поверхностных токов (111.10) действительно эквивалентна такому намагничению среды. Внутри диска вектор $\mathbf{I}$ направлен по радиусу диска $\mathbf{r}$, причем его числовая величина зависит только от $\mathbf{r}$. Поэтому ротор $\mathbf{I}$ равен нулю и объемная плотность молекулярных токов, согласно (110.10), также равна нулю. Поверхностная же плотность молекулярных токов, соответствующая намагничению (111.11), согласно (61.10) и (61.11), равна нулю на вертикальной боковой поверхности диска и численно равна

$$i_{\text{мол}} = \pm cI = \pm\frac{\varepsilon-1}{4\pi}uE$$

на его плоских горизонтальных поверхностях, что совпадает с (111.10). Таким образом, опыты Эйхенвальда действительно могут быть истолкованы с точки зрения соответствующего уравнению (111.9) представления о радиальном намагничении диэлектрического диска, вращающегося в электрическом поле конденсатора.

Обобщая приведенные рассуждения, можно в общем виде показать, что последний член формулы (111.9) учитывает магнитное поле, создаваемое движением связанных зарядов поляризованного диэлектрика. Последний член в уравнении (111.8) и второй член первой векторной скобки в уравнении (111.9) не могут быть получены на основании подобных же элементарных соображений, не учитывающих теории относительности. Отметим только, что если по аналогии с (111.5) ввести понятие эффективной магнитной индукции $\mathbf{B}^*$:

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B} - \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{E}\right], \tag{111.12}$$

и если воспользоваться выражениями (111.7) для поляризации $\mathbf{P}_0$ и намагничения $\mathbf{I}_0$ *покоящейся* среды, то формулы (111 8) и (111.9) можно записать в следующем простом виде:

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\mathbf{E}^* + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{I}_0\right], \quad \mathbf{I} = \frac{1}{4\pi}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\mathbf{B}^* - \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{P}_0\right]. \tag{111.13}$$

Можно сказать, что подобно тому как движение поляризованной среды возбуждает поле магнитное ($\mathbf{I}\neq 0$ при $\mu = 1$ и $\mathbf{P}_0 \neq 0$), так и движение намагниченной среды возбуждает поле электрическое ($\mathbf{P}\neq 0$ при $\varepsilon = 1$ и $\mathbf{I}_0 \neq 0$).

3. Внося (111.8) и (111.9) в уравнения (110.13), получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon\mathbf{E} + \left(\varepsilon-\frac{1}{\mu}\right)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{B}\right] = \varepsilon\mathbf{E}^* - \frac{1}{\mu}\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{B}\right],\\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu}\mathbf{B} + \left(\varepsilon-\frac{1}{\mu}\right)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{E}\right] = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}^* + \varepsilon\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{E}\right].\end{aligned} \tag{111.14}$$

Таковы (с точностью до членов порядка u^2/c^2) соотношения между основными векторами электромагнитного поля в движущейся

среде, соответствующие соотношениям (V) гл. VII для среды покоящейся [1]). Эти соотношения наряду с выражениями для плотности тока (111.3) и (111.6) и дифференциальными уравнениями Максвелла (I)–(IV) достаточны для построения макроскопической теории электромагнитного поля в медленно движущихся средах. Изложению этой теории будут посвящены § 112–114.

Качественное отличие соотношений (111.14) от соответствующих соотношений в покоящихся средах состоит в том, что равенство нулю одного из электрических векторов поля $\mathbf{E}$ или $\mathbf{D}$ не влечет за собой с необходимостью равенства нулю и другого из этих векторов; то же самое относится и к магнитным векторам поля. Обусловливается это тем, что в движущихся средах, согласно (111.8) и (111.9), поляризация $\mathbf{P}$ может быть отличной от нуля при $\mathbf{E} = 0$, а намагничение $\mathbf{I}$ может быть отличным от нуля при $\mathbf{B} = 0$.

4. Уравнения (111.14) выражают $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, т. е. через средние напряженности микроскопического поля. Можно, конечно, разрешить эти уравнения, например, относительно $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Из первого уравнения (111.14) получаем непосредственно:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{B}\right]. \qquad (111.15)$$

Внося это во второе уравнение (111.14) и отбрасывая члены порядка u^2/c^2 (сохранить их было бы непоследовательно, так как основные соотношения излагаемой теории справедливы лишь с точностью до u^2/c^2), получаем

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{D}\right]. \qquad (111.16)$$

5. Отметим в заключение, что условием применимости формул этого и всех последующих параграфов, строго говоря, является не только достаточная медленность движения среды [условие (110.1)], но также и требование, чтобы среда двигалась *поступательно и равномерно* [2]): эффекты, связанные с ускоре-

---

[1]) Точные релятивистские соотношения, соответствующие уравнениям (111.14), формулируются обычно в следующем виде:

$$\mathbf{D} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{H}\right] = \varepsilon\left\{\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{B}\right]\right\}, \quad \mathbf{B} - \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{E}\right] = \mu\left\{\mathbf{H} - \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{D}\right]\right\}.$$

Разрешая эти уравнения относительно $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ и отбрасывая члены порядка $\mathbf{u}^2/c^2$, легко получить (111.4). [Точнее: по сравнению с единицей отбрасываются не только члены порядка $(u/c)^2$, но также и члены порядка $\varepsilon\mu(u/c)^2$. (*Примеч. ред.*).]

[2]) Точнее — требуется достаточная малость производных скорости среды $\mathbf{u}$ как по времени, так и по координатам.

нием движения среды, нами не учитывались. В частности, эффект Толмена (§ 40), проявляющийся при внезапном ускорении проводников, не может быть объяснен на основе изложенной теории. Если мы, тем не менее, будем применять эту теорию к средам, движущимся ускоренно, в частности к равномерно вращающимся дискам, цилиндрам и т. д. (рассмотренный уже в этом параграфе опыт Эйхенвальда, униполярная машина и т. д.), то это оправдывается исчезающе малым влиянием ускорения на интересующие нас в этой главе явления.

Из рассмотрения, к примеру, изложенной в § 40 теории эффекта Толмена следует, что влияние ускорения на движение среды определяется силой инерции $-m\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$, где m — масса электрона [1]. При этом под $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$ нужно понимать *полное* ускорение элемента среды, которое складывается из локального ускорения $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ и переносного ускорения $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}$:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}$$

[см. любой курс гидродинамики; ср. также уравнение (32.6)].

Таким образом, влияние ускорения, т. е. силы инерции $-m\left(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}\right)$, на электроны среды эквивалентно некоторому эффективному электрическому полю напряженности

$$\mathbf{E}' = -\frac{m}{e}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}\right). \tag{111.17}$$

Существенно, что отношение m/e массы электрона к его заряду равно $1{,}9 \cdot 10^{-18}$ абс. (эл.-стат.) СГС единиц, т. е. очень мало.

В качестве примера рассмотрим случай диска или цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси z с угловой скоростью ω:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad u_x = -y\omega, \quad u_y = x\omega, \quad u_z = 0;$$

$$(\mathbf{u}\nabla)u_x = -x\omega^2, \quad (\mathbf{u}\nabla)u_y = -y\omega^2, \; (\mathbf{u}\nabla)u_z = 0.$$

Если радиус вращающегося тела равен a, то максимальное значение E' равно

$$E' = \frac{m}{e}a\omega^2.$$

(Конечно, это выражение для E' можно было бы получить и непосредственно из выражения $u^2/a = a\omega^2$ для центробежного ускорения при вращении.) Полагая $a = 5$ см и $\omega = 100\pi$ с$^{-1}$, что соответствует 50 об/с, получаем $E' \sim 9 \cdot 10^{-13}$ эл.-ст. ед. $\sim 3 \cdot 10^{-10}$ В, т. е. совершенно ничтожную величину [2].

---

[1]) В § 40 скорость среды обозначалась буквой $\mathbf{w}$, а не буквой $\mathbf{u}$, как в этой главе.

[2]) Здесь не учитывается деформация диска, возникающая при его вращении, приводящая к появлению дополнительного электрического поля; не учтен также эффект Бернетта (см. с. 321). (*Примеч. ред.*)

§ 112. Закон Ома и электромагнитная индукция в движущихся проводниках. Униполярная индукция

1. Формула (111.6) для плотности токов проводимости в движущихся проводниках

$$\mathbf{j}_{\text{пр}} = \lambda(\mathbf{E}^* + \mathbf{E}^{\text{стр}}) = \lambda\left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}\right] + \mathbf{E}^{\text{стр}}\right) \tag{112.1}$$

отличается от соответствующей формулы (38.1) для неподвижных проводников

$$\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}})$$

только заменой $\mathbf{E}$ на эффективную напряженность электрического поля $\mathbf{E}^*$. Основываясь на этом, можно сразу перенести результаты теории токов в неподвижных проводниках на случай движущихся проводников. Так, например, сила тока J в участке *1*, *2* движущегося проводника сопротивления R_{12} по аналогии с (38.4) равна

$$J = \frac{\mathscr{E}^*_{12} + \mathscr{E}^{\text{стр}}_{12}}{R_{12}}, \tag{112.2}$$

где $\mathscr{E}^{\text{стр}}_{12}$ означает стороннюю электродвижущую силу, а $\mathscr{E}^*$ — эффективное напряжение, прилаженное к этому участку проводника

$$\mathscr{E}^*_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}^*\, d\mathbf{s} = \int_1^2 \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}\right]\right) d\mathbf{s}.$$

В случае лишенного разветвления замкнутого квазилинейного тока по аналогии с (38.6) получаем

$$JR = \mathscr{E}^* + \mathscr{E}^{\text{стр}}, \tag{112.3}$$

где $\mathscr{E}^*$ и $\mathscr{E}^{\text{стр}}$ есть полное эффективное напряжение и полная сторонняя ЭДС в цепи тока:

$$\mathscr{E}^* = \oint_L \mathbf{E}^*\, d\mathbf{s} = \oint_L \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}\right]\right) d\mathbf{s}. \tag{112.4}$$

Уравнение (112.3) совпадает с нашим прежним уравнением (77.2), ибо ЭДС индукции $\mathscr{E}^{\text{инд}}$, с которой мы оперировали в § 77 и вообще в гл. VI, и полное эффективное напряжение $\mathscr{E}^*$ являются тождественными понятиями. Действительно, на основании теоремы Стокса и уравнения Максвелла (II)

$$\oint_L \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{E}\, d\mathbf{S} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S},$$

где S означает поверхность, опирающуюся на контур L. Далее, заменяя в приведенном на с. 350 выводе уравнения (76.6) $\mathbf{v}$

на $\mathbf{u}$, $\mathbf{H}$ на $\mathbf{B}$ и Φ на Ψ, убеждаемся, что

$$\oint \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}\right] d\mathbf{s} = -\frac{1}{c}\oint \mathbf{B}[\mathbf{u}\, d\mathbf{s}] = -\frac{1}{c}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_{B=\text{const}}, \qquad (112.5)$$

где $(d\Psi/dt)_{B=\text{const}}$ означает скорость изменения потока магнитной индукции Ψ через поверхность S, вычисленную в предположении, что индукция $\mathbf{B}$ не меняется во времени, т. е. ту часть скорости изменения потока, которая обусловлена движением контура L. Таким образом,

$$\mathscr{E}^* = -\frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S} - \frac{1}{c}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_{B=\text{const}} = -\frac{1}{c}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_{u=0} - \frac{1}{c}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_{B=\text{const}},$$

так как $\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S}$ равно той части скорости изменения потока индукции Ψ через контур L, которая обусловлена изменением индукции во времени и в которой не учитывается движение контура. Очевидно, что

$$\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_{u=0} + \left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_{B=\text{const}} = \frac{d\Psi}{dt}, \qquad (112.6)$$

где $d\Psi/dt$ без индекса означает полную скорость изменения потока индукции через контур L, обусловленную как изменением во времени индукции $\mathbf{B}$, так и движением контура. Итак, окончательно

$$\mathscr{E}^* = -\frac{1}{c}\frac{d\Psi}{dt}, \qquad (112.7)$$

что, как и требовалось доказать, совпадает с выражением (77.1) для $\mathscr{E}^{\text{инд}}$.

2. Таким образом, формулы (112.4) и (112.7) эквивалентны сформулированному в § 77 закону индукции, согласно которому ЭДС индукции $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ в произвольном замкнутом контуре определяется скоростью изменения потока магнитной индукции Ψ через этот контур. Этот закон можно и должно, однако, уточнить в том смысле, что его нужно применять к *материальному контуру*, т. е. к образующей замкнутый контур совокупности материальных точек (элементов) среды. Другими словами, при вычислении изменения потока индукции через данный контур нужно считать, что в момент времени $t + dt$ этот контур образуется теми же материальными точками среды, которыми он образовывался в предшествующий момент t. Это ясно из приведенного вывода формулы (112.7), в особенности из уравнения (112.5), согласно которому $(d\Psi)_{B=\text{const}}$ равно разности потоков через данный контур и через контур, точки которого смещены относительно данного на расстояние $\mathbf{u}\, dt$.

3. Это правило вычисления $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ нуждается в дополнительном уточнении в тех случаях, когда материальный контур, бывший в момент t замкнутым, оказывается благодаря движению среды разомкнутым в последующий момент $t + dt$. Разберемся в

этом случае на примере так называемой *униполярной индукции* и униполярной машины.

В принципе униполярная машина (это неудачное название объясняется историческими причинами) состоит из вращающегося вокруг своей оси цилиндрического постоянного магнита. Если при помощи скользящих контактов A и B присоединить проводник к оси и к боковой поверхности вращающегося магнита (рис. 90), то по проводнику AVB пойдет ток. В случае равномерного вращения цилиндрического магнита напряженность электромагнитного поля и плотность тока в каждой точке пространства будут постоянными во времени [1]).

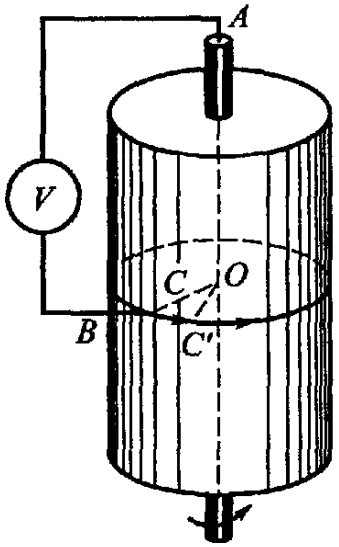

Рис. 90

Применим закон индукции к какому-либо контуру, проходящему по внешнему проводу AVB и по магниту, например к контуру $COAVBC$. В момент времени $t + dt$ материальные точки, находившиеся в момент t на этом контуре, сместятся на расстояние $\mathbf{u}\,dt$ и займут положение $C'OAVBC$. Стало быть, для определения ЭДС индукции $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ в контуре $COAVBC$ нужно вычислить разность $d\Psi$ потоков индукции через этот контур и через контур $C'OAVBC$. Обозначим эти потоки соответственно через Ψ и Ψ', так что $d\Psi = \Psi - \Psi'$.

Однако контур $C'OAVBC$ в отличие от контура $COAVBC$ не замкнут, так что, строго говоря, понятие потока Ψ' через этот незамкнутый контур не является определенным.

Обратимся поэтому к приведенному выше выводу закона индукции (112.7). Из (112.6) и (112.5) следует, что в рассмотренном случае под $d\Psi/dt$ надо понимать величину

$$\frac{d\Psi}{dt} = \oint \mathbf{B}[\mathbf{u}\,d\mathbf{s}],$$

причем интеграл должен быть взят по замкнутому контуру $COAVBC$. Так как $[\mathbf{u}\,d\mathbf{s}] \neq 0$ только на участке CO этого

[1]) В прошлом веке долго шла оживленная дискуссия по вопросу об униполярной индукции, связанная с попытками истолковать это явление в том смысле, что силовые линии магнитного поля, возбуждаемого магнитом, вращаются вместе с магнитом вокруг его оси. В движении силовых линий, пересекающих неподвижный проводник AVB, и усматривалась причина возникновения в этом проводнике электродвижущих сил индукции. Нечего и говорить, что такая интерпретация не выдерживает никакой критики: силовые линии являются лишь вспомогательным понятием, служащим для описания поля, а не какими-либо материальными образованиями, отдельные элементы которых можно было бы индивидуализировать, связывать их с определенными источниками поля (невозможность чего особенно ясна, например, в случае наложения полей двух магнитов — подвижного и неподвижного), следить за их перемещением в пространстве и т. д.

контура, то

$$d\Psi = \int_C^O \mathbf{B}\,[\mathbf{u}\,dt \cdot d\mathbf{s}].$$

Легко убедиться, что это выражение для $d\Psi$ с точностью до величин второго порядка относительно dt равно потоку индукции через бесконечно малый круговой сектор COC'. Поэтому при вычислении $d\Psi$ из соотношения $d\Psi = \Psi' - \Psi$ под Ψ' можно понимать поток через *замкнутый* контур $C'OAVBCC'$, получающийся *замыканием деформированного движением контура* $C'OAVBC$ *отрезком* CC' *траектории, описанной точкой* C' *разрыва контура*. В этом и заключается уточнение закона индукции (112.7), применимое, как нетрудно убедиться, к любому разрывному движению контура.

4. Возвращаемся к униполярной машине. Как мы убедились, ЭДС индукции $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ в контуре $COAVBC$ равна

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{1}{c}\int_C^O \mathbf{B}\,[\mathbf{u}\,d\mathbf{s}].$$

Подобным же образом можно вычислить $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ для любого другого замкнутого контура. Для каждого фиксированного в пространстве контура величина $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ имеет постоянное, не меняющееся во времени значение. При вычислении токов, возбуждаемых в магните и во внешнем проводнике этими ЭДС индукции, уже не нужно больше учитывать вращение магнита; влияние этого вращения полностью учитывается значением $\mathscr{E}^{\text{инд}}$.

Однако при рассмотрении униполярной машины проще исходить не из интегральной формы (112.7) закона индукции, а непосредственно из закона Ома для движущихся сред [уравнение (111.6)]. Из (111.6) следует, что сила тока во внешнем участке цепи AB и распределение токов по объему магнита будут такими же, как в случае покоящегося магнита, по объему которого распределены сторонние ЭДС напряженности:

$$\mathbf{E}^{\text{стр}} = \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}\right]. \qquad (112.8)$$

Этому же случаю покоящегося магнита с распределенной ЭДС $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ будет соответствовать и напряженность электрического поля внутри и вне магнита.

Действительно, из уравнения непрерывности [1]) $\operatorname{div}\mathbf{j}_{\text{пр}} = 0$ и закона Ома (111.6) следует, что $\operatorname{div}(\lambda\mathbf{E}) = -\operatorname{div}\lambda\,[(\mathbf{u}/c)\,\mathbf{B}]$.

[1]) На основании уравнения непрерывности (IVa) и уравнения (111.3) $\operatorname{div}\mathbf{j}_{\text{пр}} + \operatorname{div}\rho\mathbf{u} = 0$; легко, однако, убедиться, что дивергенция конвекционного тока $\rho\mathbf{u}$ равна нулю. Действительно, в цилиндрической системе координат z, r, α вектор $\rho\mathbf{u}$ имеет только одну отличную от нуля слагающую ρu_α, причем значение этой слагающей ввиду аксиальной симметрии задачи от угла α не зависит. Отсюда на основании (22*) следует, что $\operatorname{div}\rho\mathbf{u} = 0$.

Так как стационарное электрическое поле обладает потенциалом ($\mathbf{E} = -\nabla\varphi$), то этим уравнением вектор $\mathbf{E}$ определяется однозначно (если считать заданной индукцию $\mathbf{B}$ внутри магнита). То же самое уравнение для $\operatorname{div}\lambda\mathbf{E}$ получается из уравнения (38.1) и для неподвижного магнита, по объему которого распределены сторонние ЭДС напряженности (112.8).

Рассмотрим в виде примера равномерно вращающийся цилиндрический магнит, к которому никакие проводники не присоединены и в котором поэтому токи не циркулируют. Отсутствие токов означает, что направленная по радиусу r цилиндра лоренцева сила $e\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}\right]$ компенсируется внутри магнита радиальным электрическим полем $\mathbf{E}$, т. е. что внутри магнита

$$\mathbf{E} = -\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}\right]. \tag{112.9}$$

Допустив для простоты, что вектор $\mathbf{B}$ в магните имеет постоянное значение и направлен по оси вращения, получаем

$$E_r = -\frac{u}{c}B = -\frac{\omega r}{c}B,$$

где ω означает угловую скорость вращения магнита. Таким образом, между цилиндрической поверхностью магнита и его осью устанавливается разность потенциалов

$$\varphi_{\text{ось}} - \varphi_{\text{пов}} = \int_{r=0}^{r=a} E_r\,dr = -\frac{\omega a^2}{2c}B,$$

где a означает радиус магнита. Зная потенциал на поверхности магнита, можно определить поле и во внешнем пространстве. С другой стороны, если присоединить один конец A проводника AVB к оси, а другой его конец B к поверхности цилиндра (см. рис. 90), то благодаря разности потенциалов между точками A и B по проводнику потечет ток. Конечно, при замыкании цепи AVB разность потенциалов между A и B уменьшится, подобно тому как уменьшается разность потенциалов между электродами аккумулятора при замыкании внешней цепи, соединяющей эти электроды.

5. В чем причина возникновения в изолированном вращающемся магните радиального электрического поля (112.9)? Частично это поле обусловливается перераспределением электронов проводимости в магните под воздействием лоренцевой силы $e\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}\right]$. Однако основная часть электрического поля, возникающего при движении магнита, имеет чисто релятивистское происхождение и связана с тем отмеченным при обсуждении формулы (111.13) обстоятельством, что, согласно теории относительности, движение намагниченной среды возбуждает электрическое поле. В чистом виде этот релятивистский эффект проявляется не при вращении магнита, а при равномер-

ном поступательном его движении со скоростью $\mathbf{u}$, перпендикулярной оси магнита. В этом случае связанная с магнитом система координат S' будет инерциальной, причем в этой системе координат электрическое поле $\mathbf{E}$ будет, очевидно, равно нулю, если в поле магнита нет других тел, например скользящего по магниту внешнего проводника. Применяя к этому случаю релятивистские формулы преобразования поля (115.7), нетрудно убедиться, что в «неподвижной» (лабораторной) системе координат S напряженность электрического поля (вплоть до величин порядка u^2/c^2) будет равна

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}'\right] = -\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}'\right],$$

где $\mathbf{B}'$ — индукция магнитного поля, измеренная в системе S'. В этом выражении можно с точностью до величины порядка u^2/c^2 заменить $\mathbf{B}'$ значением $\mathbf{B}$ индукции в «неподвижной» системе координат S: $\mathbf{E} = -\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}\right]$, что совпадает с (112.9). Таким образом, в случае поступательного движения магнита формула (112.9) оказывается применимой ко всем точкам поля как внутри, так и вне магнита и притом вне всякой зависимости от того, является ли магнит проводником электричества или изолятором. Таким образом, возникновение электрического поля при поступательном равномерном движении магнита объясняется тем, что, как будет показано в § 115, деление электромагнитного поля на поле электрическое и поле магнитное имеет относительный характер и зависит от системы отсчета.

З а д а ч а 39. Железный намагниченный шар радиуса a, находящийся в проводящей среде (например, в электролите), вращается вокруг своего центра с постоянной угловой скоростью ω. Магнитная индукция $\mathbf{B}_0$ поля, возбуждаемого постоянным намагничением шара, постоянна по всему его объему и направлена параллельно оси вращения. Показать, что потенциал электрического поля, возбуждаемого вращением шара, равен

$$\varphi = \varphi_1 = -\frac{\omega}{3c} B_0 \left[\frac{\lambda_1 R^2}{2\lambda_1 + 3\lambda_2}(3\cos^2\theta - 1) + a^2 - R^2\right] \quad \text{при} \quad R \leqslant a,$$

$$\varphi = \varphi_2 = -\frac{\omega}{3c} B_0 \frac{\lambda_1 a^5}{(2\lambda_1 + 3\lambda_2)R^3}(3\cos^2\theta - 1) \quad \text{при} \quad R \geqslant a,$$

где λ_1 и λ_2 — соответственно электропроводности железа и электролита, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный из центра шара в данную точку пространства, а θ — полярный угол между $\mathbf{R}$ и осью вращения. Показать, что линии электрического тока в электролите начинаются у экваториальной области поверхности шара и заканчиваются в полярных областях этой поверхности, причем области эти разграничены параллельными кругами, соответствующими углам

$$\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} \sim 55°,$$

$$\theta = \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} \sim 125°.$$

§ 113. Диэлектрик, движущийся в электромагнитном поле

1. Первая последовательная теория электромагнитных явлений в движущихся средах была построена Герцем около 1890 г. В отношении индукции токов в медленно движущихся проводниках теория Герца приводит к тем же подтверждающимся опытом результатам, как и современная теория; этим и объясняется, что весьма простая, хотя принципиально и несостоятельная, теория Герца до сих пор широко применяется в электротехнике. Однако применение теории Герца к движению в электромагнитном поле диэлектриков и не проводящих электричества магнетиков приводит к неправильным результатам. Это было доказано, в частности, опытами Рентгена, Эйхенвальда и Вильсона, оказавшими большое влияние на развитие современной теории. Мы рассмотрим в этом параграфе принципиальную схему некоторых из этих опытов.

2. Плоский конденсатор, обкладки которого соединены между собой проводником, помещен в однородное магнитное поле $\mathbf{H}$, параллельное пластинам конденсатора. Пространство между пластинами конденсатора заполнено диэлектриком проницаемости ε. Если сообщить диэлектрику скорость $\mathbf{u}$, перпендикулярную к направлению магнитного поля $\mathbf{H}$ (рис. 91), то конденсатор заряжается (схема опыта Вильсона, в котором, однако, диэлектрик двигался не поступательно, а вращался между обкладками конденсатора).

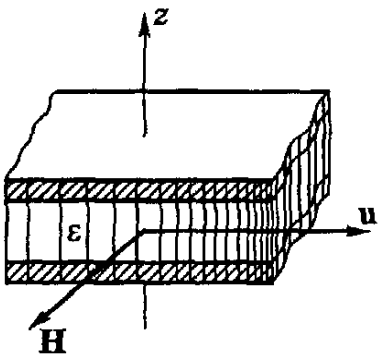

Рис. 91

Рассмотрим стационарный случай равномерно движущегося диэлектрика. Постоянное электрическое поле, согласно уравнению Максвелла (II), обладает потенциалом φ. Соединенные друг с другом обкладки конденсатора обладают одинаковым потенциалом. Поэтому электрическое поле будет равно нулю не только в металле обкладок, но и в диэлектрике между ними. Электрическая индукция $\mathbf{D}$ будет, очевидно, также равна нулю в металле обкладок, однако в движущемся диэлектрике, согласно (111.14), $\mathbf{D}$ будет равно (при $\mathbf{E} = 0$ и $\mu = 1$):

$$\mathbf{D} = (\varepsilon - 1)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}\right].$$

Вместе с тем на основании второго из уравнений (111.14) при $\mathbf{E} = 0$ и $\mu = 1$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}.$$

Поэтому магнитное поле в движущемся диэлектрике будет таким же, как если бы он покоился. Электрическая же индукция в нем будет равна (см. рис. 91):

$$D_x = D_y = 0, \quad D_z = -\frac{(\varepsilon - 1)u}{c} H.$$

Таким образом, нормальная слагающая D_z вектора $\mathbf{D}$ испытывает скачок на границах между диэлектриком и обкладками конденсатора. На основании пограничного условия (IV′) это означает, что на обкладках конденсатора находятся поверхностные свободные заряды плотности

$$\sigma = \pm\frac{1}{4\pi} D_z = \pm\frac{(\varepsilon-1)u}{4\pi c} H. \qquad (113.1)$$

Этот вывод теории был экспериментально подтвержден Вильсоном; теория же Герца приводила к неправильному выражению для σ, получающемуся из (113.1) путем замены $\varepsilon - 1$ на ε.

3. Опыт Эйхенвальда уже рассматривался нами в § 111; мы вновь рассматриваем его здесь в качестве примера применения общих уравнений теории.

Схема опыта Эйхенвальда отличается от только что рассмотренной схемы опыта Вильсона тем, что внешнего магнитного поля нет, обкладки конденсатора изолированы друг от друга и конденсатор заряжен. Движение диэлектрика в заряженном конденсаторе создает магнитное поле.

Так как в металле обкладок $\mathbf{E} = \mathbf{D} = 0$, то из пограничных условий (II′) и (IV′) следует, что в диэлектрике

$$E_x = E_y = 0, \quad D_z = 4\pi\sigma,$$

где σ — плотность заряда на нижней обкладке конденсатора (плотность заряда на верхней обкладке равна $-\sigma$, оси координат выбираем так же, как на рис. 91).

Индукция $\mathbf{B}$ магнитного поля, возникающего благодаря движению диэлектрика, будет, очевидно, пропорциональна его скорости; поэтому из первого уравнения (111.14), с точностью до членов порядка u^2/c^2, следует, что в диэлектрике $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ и, стало быть,

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}.$$

Внося это во второе из уравнений (111.14) и полагая $\mu = 1$, получаем, что внутри диэлектрика

$$H_x = B_x + \frac{4\pi(\varepsilon-1)u\sigma}{\varepsilon c}, \quad H_y = B_y, \quad H_z = B_z.$$

Напряженность (и индукцию магнитного поля в обкладках) конденсатора обозначим через $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{B}'$, причем, очевидно, $\mathbf{H}' = \mathbf{B}'$. Из непрерывности тангенциальных слагающих напряженности $\mathbf{H}$ и нормальной слагающей $\mathbf{B}$ следует, что

$$B'_x = H'_x = H_x = B_x + \frac{4\pi(\varepsilon-1)u\sigma}{\varepsilon c}, \quad B'_y = H'_y = H_y = B_y, \quad B'_z = B_z. \qquad (113.2)$$

Таким образом, тангенциальная слагающая B_x магнитной индукции испытывает на границах диэлектрик–металл скачок $\pm 4\pi(\varepsilon-1)u\sigma/(\varepsilon c)$, тогда как слагающие B_y и B_z непрерывны. Вместе с тем во всем пространстве

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = 0. \qquad (113.3)$$

Первое из этих уравнений есть уравнение Максвелла (III); второе же следует из того, что ввиду отсутствия токов $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$ во всем пространстве и что вне диэлектрика $\mathbf{B}$ совпадает с $\mathbf{H}$; внутри же диэлектрика B_x хотя и отличается от H_x, но на величину постоянную.

Совокупность дифференциальных уравнений (113.3) и пограничных условий (113.2) определяет поле вектора $\mathbf{B}$ во всем пространстве. Она тождественна с совокупностью уравнений и условий для напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$, возбуждаемого в неподвижной среде проницаемости $\mu = 1$ поверхностными токами плотности

$$i_y = \pm\frac{(\varepsilon - 1)u\sigma}{\varepsilon}, \tag{113.4}$$

протекающими в противоположных направлениях по нижней и верхней поверхностям раздела между диэлектриком и металлом. Так как вне диэлектрика $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, то, стало быть, магнитное поле вне диэлектрика совпадает с полем этой системы поверхностных токов. Этот вывод совпадает с результатами, полученными нами другим путем в § 111 [см. уравнение (111.10)].

§ 114. Распространение света в движущихся диэлектриках. Коэффициент увлечения Френеля. Отражение от движущегося зеркала

1. Рассмотрим плоскую световую волну частоты ω в однородном изотропном немагнитном ($\mu = 1$) диэлектрике, движущемся со скоростью $\mathbf{u}$. Обозначим через $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{D}_0$, $\mathbf{B}_0$ постоянные амплитуды векторов поля волны; тогда, например, напряженность электрического поля волны выразится формулой (101.3):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k\mathbf{nR})}, \tag{114.1}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении распространения волны, а k — волновое число. Аналогичные выражения будут иметь место и для остальных векторов $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$.

Согласно (100.8) действие дифференциального оператора набла (∇) на векторы поля волны сводится к умножению этих векторов на $-ik\mathbf{n}$, так что, например,

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -ik\,(\mathbf{nE}), \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -ik\,[\mathbf{nE}].$$

Поэтому уравнения Максвелла (I) и (II) после сокращения их на множитель $e^{i(\omega t - k\mathbf{nR})}$ принимают вид

$$\frac{\omega}{c}\mathbf{D}_0 = -k\,[\mathbf{nH}_0], \quad \frac{\omega}{c}\mathbf{B}_0 = k\,[\mathbf{nE}_0]. \tag{114.2}$$

Внося эти выражения в (111.15) и (111.16), получаем после сокращения на тот же множитель:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0 &= -\frac{ck}{\varepsilon\omega}[\mathbf{nH}_0] - \frac{ck}{\omega}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}[\mathbf{nE}_0]\right],\\ \mathbf{H}_0 &= \frac{ck}{\omega}[\mathbf{nE}_0] - \frac{ck}{\omega}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}[\mathbf{nH}_0]\right].\end{aligned} \tag{114.3}$$

Таким образом, векторы индукции $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ в поле волны перпендикулярны направлению ее распространения $\mathbf{n}$; векторы же

напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, вообще говоря, имеют отличные от нуля слагающие вдоль $\mathbf{n}$ (если только направление скорости диэлектрика не совпадает с направлением волны $\mathbf{n}$ или с прямо противоположным направлением). Вообще распространение света в движущемся *изотропном* диэлектрике вполне аналогично распространению света в покоящемся *анизотропном* диэлектрике (точнее говоря, в оптически одноосном кристалле, главная ось которого совпадает с направлением движения диэлектрика) [1].

Выберем ось z по направлению распространения волны, так что (114.1) примет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kz)},$$

и допустим для простоты, что направление скорости диэлектрика $\mathbf{u}$ совпадает с направлением волны или прямо ему противоположно:

$$u_x = u_y = 0, \quad u_z = \pm u.$$

В этом случае

$$[\mathbf{n}\mathbf{H}_0] = -\mathbf{i}H_{0y} + \mathbf{j}H_{0x},$$

$$\left[\frac{\mathbf{u}}{c}[\mathbf{n}\mathbf{E}_0]\right] = \mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{E}_0\right) - \mathbf{E}_0\left(\frac{\mathbf{u}\mathbf{n}}{c}\right) = -\mathbf{i}\frac{u_z}{c}E_{0x} - \mathbf{j}\frac{u_z}{c}E_{0y},$$

где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — единичные векторы, направленные по осям x и y. Приняв, кроме того, во внимание, что, согласно (100.6), отношение ω/k равно скорости волны v:

$$v = \frac{\omega}{k},$$

получим из (114.3) после умножения этих уравнений на ω/k:

$$\begin{aligned}
vE_{0x} &= \frac{c}{\varepsilon}H_{0y} + u_z\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)E_{0x},\\
vE_{0y} &= -\frac{c}{\varepsilon}H_{0x} + u_z\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)E_{0y}, \quad E_{0z} = 0,\\
vH_{0x} &= -cE_{0y} + u_z\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)H_{0x},\\
vH_{0y} &= cE_{0x} + u_z\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)H_{0y}, \quad H_{0z} = 0.
\end{aligned} \tag{114.4}$$

Как уже отмечалось, в рассматриваемом нами случае параллельности векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$ не только $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$, но и $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ перпендикулярны к $\mathbf{n}$, т. е. световая волна является поперечной. В два из уравнений (114.4) входят только слагающие E_{0x} и H_{0y}; в два

[1] Это, вообще говоря, не так. В движущемся изотропном диэлектрике имеется вырождение по поляризациям, которого нет в кристалле.

другие — только E_{0y} и H_{0x}. Рассмотрим, например, уравнения для E_{0x} и H_{0y}:

$$\left\{v - u_z\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right\} E_{0x} - \frac{c}{\varepsilon} H_{0y} = 0,$$
$$-cE_{0x} + \left\{v - u_z\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right\} H_{0y} = 0.$$

Из этих уравнений следует, если E_{0x} и H_{0y} отличны от нуля, что

$$\left\{v - u_z\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right\}^2 = \frac{c^2}{\varepsilon},$$

или

$$v - u_z\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

[выбор знака при извлечении корня определяется тем, что согласно (100.6), при $u = 0$ должно быть $v = c/\sqrt{\varepsilon}$]. Приняв во внимание, что, согласно (101.14), $\sqrt{\varepsilon}$ равен показателю преломления среды n, получаем окончательное выражение для скорости света в движущейся среде:

$$v = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_z. \qquad (114.5)$$

Проведя вычисления для случая произвольного угла между скоростью среды $\mathbf{u}$ и направлением волны $\mathbf{n}$, можно убедиться, что формула (114.5) остается справедливой и в этом общем случае, если в ней под u_z понимать проекцию скорости среды на направление распространения волны.

2. Формула (114.5) была впервые получена Френелем в 1818 г. на основании несостоятельных, с современной точки зрения, представлений о движении светового эфира, т. е. гипотетической среды, в которой распространяются световые волны. Если бы световой эфир, пронизывающий движущийся диэлектрик, оставался в покое, то, согласно этим представлениям, скорость света v в движущемся диэлектрике должна была бы равняться скорости света c/n в покоящемся диэлектрике [см. (100.6)]. Напротив, если бы эфир полностью увлекался движением диэлектрика, то результирующая скорость света должна была бы равняться сумме скорости c/n света в эфире и скорости u самого эфира:

$$v = \frac{c}{n} \pm u,$$

если $\mathbf{u}$ параллельно и антипараллельно направлению волны. Френель же, полагая, что эфир только частично увлекается движением среды, получил формулу (114.5); входящий в нее множитель $(1 - 1/n^2)$ носит название коэффициента увлечения Френеля.

Лоренц показал в 1895 г., что в формулу Френеля нужно внести некоторую поправку, учитывающую дисперсию среды, т. е. зависимость показателя преломления от длины волны. Формула Френеля была подтверждена на опыте Физо в 1851 г. и с особой точностью Зееманом в 1914 г., которому удалось также подтвердить правильность поправки Лоренца.

3. Рассмотрим еще вкратце отражение и преломление света в движущемся диэлектрике. Пусть на диэлектрик, движущийся по направлению оси z, падает из вакуума плоская волна, также распространяющаяся по направлению z:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - kz)}.$$

Пусть, далее, поверхность диэлектрика совпадает с плоскостью $z = ut$.

Величины, относящиеся к волне, отраженной от диэлектрика, и к преломленной волне в диэлектрике, обозначим соответственно индексами r и g, т. е. так же, как в § 101; например

$$\mathbf{E}^r = \mathbf{E}_0^r e^{i(\omega_r t + k_r z)}, \quad \mathbf{E}^g = \mathbf{E}_0^g e^{i(\omega_g t - k_g z)} \quad \text{и т. д.}$$

В выражении для напряженности $\mathbf{E}'$ отраженной волны в показателе стоит плюс, а не минус, ибо направление этой волны обратно направлению оси z.

Рассмотрим какое-либо из пограничных условий на поверхности диэлектрика, например условие (II′) непрерывности тангенциальных слагающих вектора $\mathbf{E}$:

$$E_{0t} e^{i(\omega t - kz)} + E_{0t}^r e^{i(\omega_r t + k_r z)} = E_{0t}^g e^{i(\omega_g t - k_g z)} \quad \text{при} \quad z = ut.$$

Для того чтобы это условие могло выполняться при любом значении времени t, необходимо, чтобы после замены z на ut показатели всех трех членов оказались бы одинаковыми:

$$\omega - ku = \omega_r + k_r u = \omega_g - k_g u \tag{114.6}$$

[ср. (101.5)].

Выразим волновые векторы через частоты. Для падающей и отраженной волн в вакууме

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \text{и} \quad k_r = \frac{\omega_r}{c}.$$

Что же касается преломленной волны в диэлектрике, то k_g в формуле (114.6) умножается на u; поэтому с точностью до величин порядка u^2/c^2 можно в эту формулу внести значение k_g для покоящегося диэлектрика:

$$k_g = \frac{\omega_g}{v} = \frac{n\omega_g}{c}.$$

Внося эти значения в (114.6), получаем

$$\omega\left(1 - \frac{u}{c}\right) = \omega_r\left(1 + \frac{u}{c}\right) = \omega_g\left(1 - \frac{nu}{c}\right),$$

или, с точностью до u^2/c^2,

$$\omega_r = \omega\left(1 - \frac{2u}{c}\right), \tag{114.7}$$

$$\omega_g = \omega\left[1 + \frac{u(n-1)}{c}\right]. \tag{114.8}$$

Таким образом, при отражении и преломлении света в движущейся среде частота света изменяется. При этом частота ω_r отраженной волны в отличие от частоты ω_g волны преломленной не зависит от показателя преломления среды n и вообще от свойства среды, так что формула (114.7) применима, например, и к металлам.

Выражение для ω_r допускает следующее простое истолкование Свет какого-либо источника S, отражающийся, например, от зеркала, представляется идущим из изображения S' этого источника света в зеркале. Если зеркало перпендикулярно падающему лучу света и движется по направлению этого луча со скоростью u, то изображение S' источника в зеркале перемещается в том же направлении с удвоенной скоростью $2u$. Поэтому, если заменить изображение S' источника S реальным источником света той же собственной частоты ω, как и наш источник S, то благодаря эффекту Доплера частота света ω', излучаемого этим движущимся источником в направлении отраженной волны (т. е. в направлении, обратном движению источника), оказалась бы равной

$$\omega' = \omega\left(1 - \frac{2u}{c}\right), \tag{114.9}$$

что совпадает с выражением (114.7) для ω_r.

§ 115. Преобразования системы отсчета. Относительный характер различия между электрическими и магнитными полями

1. В предшествующем изложении (за исключением только § 77) мы предполагали, что при изучении электромагнитных явлений все отсчеты положения и движения зарядов и материальных тел, а также отсчеты всех вообще физических величин приводятся к некоторой определенной инерциальной системе отсчета, которую мы условно называем неподвижной (см. § 111). Изложенные нами законы электродинамики применимы лишь к таким наблюдениям и измерениям, которые произведены относительно *инерциальной* системы отсчета. Вместе с тем, как известно, все инерциальные системы отсчета равноправны, так что законы электромагнитных, как и всех вообще физических, явлений не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета S к какой-либо другой системе S', движущейся относительно S прямолинейно и равномерно с произвольной скоростью $\mathbf{v}$.

Однако конкретные физические величины изменяются при переходе от одной системы отсчета S к другой системе S': результаты измерения *одного и того же явления* в двух различных системах S и S', вообще говоря, отличны друг от друга. Так, например, если скорость и ускорение какого-либо тела относительно системы S равны соответственно $\mathbf{u}$ и $\mathbf{a}$, то скорость и ускорение $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{a}'$ того же самого тела относительно системы S' в нерелятивистском приближении (т. е. с точностью до членов порядка v^2/c^2 и uv/c^2) равны

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad \text{и} \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a}. \tag{115.1}$$

Поэтому теория электромагнитных явлений должна, во-первых, дать ответ на вопрос о том, как изменяются значения электромагнитных величин (векторов поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, плотности зарядов и токов ρ и $\mathbf{j}$ и т. д.) при изменении системы отсчета, и, во-вторых, должна показать, что из установленного способа пересчета физических величин из одной системы отсчета в другую вытекает инвариантность законов электродинамики при переходе от какой-либо системы отсчета S к системе S', равномерно движущейся относительно S.

2. В современной электродинамике принимается, что значение произвольного электрического заряда e не зависит от системы отсчета. Что же касается векторов поля, то их значения, как легко видеть, существенно зависят от системы отсчета.

Пусть, например, измерениями в системе S установлено, что в данной области пространства V электрическое поле $\mathbf{E} = 0$, тогда как магнитное поле $\mathbf{H} \neq 0$ (для простоты предполагаем, что в рассматриваемой области пространства V имеется вакуум: $\varepsilon = \mu = 1$). Это значит, что если помещенный в V заряд e покоится относительно системы S, то на него никакие силы не действуют; если же он движется относительно S со скоростью $\mathbf{u}$, то на него действует сила

$$\mathbf{f} = e\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{H}\right].$$

Так как скорость u' заряда относительно системы S' равна

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v},$$

то

$$\mathbf{f} = e\left[\frac{\mathbf{u}' + \mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{H}\right] = e\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{H}\right] + e\left[\frac{\mathbf{u}'}{c}\mathbf{H}\right]. \tag{115.2}$$

Стало быть, на заряд, покоящийся относительно системы S' (т. е. при $\mathbf{u}' = 0$), действует сила

$$\mathbf{f} = e\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{H}\right].$$

Так как, по определению (см. § 45), напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ равна силе, испытываемой *покоящимся* единичным положительным зарядом, то из наблюдений, произведенных

относительно системы S', будет следовать, что в пространстве V существует электрическое поле напряженности

$$\mathbf{E}' = \left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{H}\right]. \tag{115.3}$$

Вместе с тем из (115.2) следует, что в системе S' имеется также и магнитное поле

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H}, \tag{115.4}$$

ибо сила $\mathbf{f}$ должна выражаться в системе S', вполне равноправной системе S, формулой Лоренца [1])

$$\mathbf{f} = e\left(\mathbf{E}' + \left[\frac{\mathbf{u}'}{c}\mathbf{H}'\right]\right).$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что *деление электромагнитного поля на поле электрическое и на поле магнитное имеет относительный характер*: поле, которое в системе S является только магнитным ($\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} \neq 0$), оказывается, с точки зрения равноправной системы S', полем электромагнитным в узком смысле этого слова ($\mathbf{E}' \neq 0$, $\mathbf{H}' \neq 0$). Подобно этому и в том случае, если в системе S $\mathbf{E} \neq 0$, то в системе S', вообще говоря, отличны от нуля как $\mathbf{E}'$, так и $\mathbf{H}'$. Это следует из общих формул преобразования векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{H}\right], \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H} - \left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{E}\right], \tag{115.5}$$

частными случаями которых для $\mathbf{E} = 0$ являются выведенные нами формулы (115.3) и (115.4). В формулах (115.5), так же как в (115.3) и (115.4), отброшены члены порядка v^2/c^2. Вывод формул (115.5) можно найти в учебниках теории относительности; наглядное обоснование их без прямого обращения к представлениям теории относительности возможно лишь в рассмотренном выше частном случае $\mathbf{E} = 0$.

Поскольку значение напряженности электрического поля оказывается зависящим от системы отсчета, то, естественно, возникает вопрос об инвариантных, т. е. не зависящих от системы отсчета, количественных характеристиках электромагнитного поля. Существуют два таких инварианта: из (115.5) легко убедиться, что с точностью до членов порядка v^2/c^2

$$\mathbf{E}'\mathbf{H}' = \mathbf{E}\mathbf{H}$$

и

$$E'^2 - H'^2 = E^2 - H^2. \tag{115.6}$$

[1]) В этих рассуждениях мы исходим из того, что с точностью до v^2/c^2 сила не зависит от системы отсчета. Действительно, в этом приближении сила пропорциональна вызываемому ею ускорению $\mathbf{a}$, а ускорение не зависит от системы отсчета [формула (115.1)]

Если исходить не из приближенных формул (115.5), а из соответствующих точных формул, учитывающих члены порядка v^2/c^2, то можно доказать, что формулы (115.6) строго справедливы при всех возможных значениях относительной скорости $\mathbf{v}$ систем отсчета.

Заметим еще, что обобщение формул преобразования (115.5) на случай материальной среды гласит.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{B}\right], \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{E}\right], \\ \mathbf{D}' &= \mathbf{D} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{H}\right], \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H} - \left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{D}\right]. \end{aligned} \tag{115.7}$$

Таким образом, введенные нами в § 111 эффективные значения электрической напряженности и магнитной индукции в движущейся среде

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}\right], \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{B} - \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{E}\right]$$

[см. уравнения (111.5) и (111.12)] представляют собой не что иное, как истинные значения этих величин в системе отсчета S', скорость $\mathbf{v}$ которой равна скорости $\mathbf{u}$ среды, т. е. в той системе отсчета, в которой среда покоится.

Формулы (115.7) распадаются на две группы: в первую входят только значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в системах S и S', во вторую — только значения векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$. Это соответствует тому, что по физическому смыслу аналогом электрической напряженности $\mathbf{E}$ является магнитная индукция $\mathbf{B}$, а не магнитная напряженность $\mathbf{H}$ (см., например, § 62).

3. Нам остается еще показать, что из формул преобразования векторов поля (115.5) и (115.7) вытекает инвариантность законов электродинамики при изменении системы отсчета. Конечно, при изменении системы отсчета необходимо преобразовать не только электромагнитные величины, но также и пространственные координаты и время.

Дорелятивистская физика покоилась на допущении, что отсчеты промежутков времени имеют абсолютный характер (при пользовании «правильными» часами) и не зависят от движения системы отсчета:

$$t' = t, \tag{115.8}$$

так что при изменении системы отсчета подвергаются изменению лишь пространственные координаты:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \mathbf{v}t. \tag{115.9}$$

Однако эти формулы преобразования координат и времени несовместимы с инвариантностью законов электродинамики. В этом проще всего убедиться следующим образом. Из законов электродинамики вытекает, что скорость распространения света в ва-

кууме равна электродинамической постоянной c. Если эти законы остаются инвариантными при преобразовании координат, то в любой инерциальной системе скорость света в вакууме должна быть одинаковой и равняться c. Между тем из классических формул преобразования времени и координат (115.8) и (115.9) вытекает преобразование скорости (115.1):

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v},$$

которое, в частности, должно быть применимо и к скорости света. Если в системе S скорость света равна c, то в равноправной системе S', движущейся относительно S со скоростью $\mathbf{v}$, например, вдоль луча света, скорость этого луча должна бы равняться $c' = c - v \neq c$. Таким образом, классические формулы преобразования координат и времени (115.8) и (115.9) несовместимы с инвариантностью законов электродинамики.

Именно это обстоятельство и явилось причиной длительных и напряженных экспериментальных и теоретических исследований, завершившихся созданием теории относительности. Эйнштейн, подвергнувший глубокому анализу понятие одновременности, доказал относительность этого понятия и несостоятельность выражаемого уравнением (115.8) допущения, что промежуток времени между двумя событиями не зависит от системы отсчета [1]). Постоянство скорости света в вакууме было возведено Эйнштейном в ранг одного из основных постулатов теории относительности, так что можно сказать, что формулы преобразования координат и времени выводятся в теории относительности из требования инвариантности законов электродинамики.

Однако изложение теории относительности выходит за рамки этой книги.

---

[1]) В теории относительности соотношение (115.8) заменяется следующим:

$$t' = \frac{t - \mathbf{vR}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

или, с точностью до членов порядка v^2/c^2,

$$t' = t - \frac{\mathbf{vR}}{c^2}. \qquad (115.10)$$

Соотношение это имеет следующий смысл: если по измерениям в системе S промежуток времени между двумя событиями A и B равен t, а векторное расстояние между точками, в которых происходят эти события, равно $\mathbf{R}$, то по измерениям в системе S' промежуток времени между этими событиями оказывается равным $t' = t - \mathbf{vR}/c^2$. В частности, если по измерениям в системе S события одновременны ($t = 0$), но не одноместны ($\mathbf{R} \neq 0$), то в системе S' они, вообще говоря, окажутся неодновременными ($t' \neq 0$): понятие одновременности неодноместных событий относительно.

1. (С. 31.) Вследствие симметрии вектор **E** параллелен (или антипараллелен) **r** и является функцией лишь от **r**. Рассмотрим цилиндр высоты 1 и радиуса r. Вследствие того, что **E** параллельно **r**, поток вектора **E** через основание цилиндра равен нулю Поэтому применение к цилиндру теоремы Гаусса дает

$$\pm 2\pi r E = 4\pi \varkappa \quad \text{для} \quad r > a;$$

$$2\pi r E = 0 \qquad \text{для} \quad r < a$$

(где a — радиус заряженного бесконечного цилиндра), откуда и получим результат (4.5). Скачок вектора **E** при прохождении через поверхность цилиндра равен

$$E_e - E_i = 2\,\frac{\varkappa}{a} - 0 = 4\pi\sigma,$$

ибо

$$\varkappa = 2\pi a\sigma.$$

2. (С. 31.) Вследствие симметрии вектор **E** параллелен (или антипараллелен) **R** и является функцией лишь от **R**. Применение теоремы Гаусса к сфере радиуса R дает

$$\pm E \cdot 4\pi R^2 = 4\pi e \quad \text{для} \quad R > a;$$

$$E \cdot 4\pi R^2 = 0 \qquad \text{для} \quad R < a$$

(a — радиус заряженной сферы), откуда и получаются формулы (4.6)

Скачок вектора **E** при прохождении через поверхность сферы равен

$$E_e - E_i = \frac{e}{a^2} - 0 = 4\pi\sigma,$$

ибо

$$e = \sigma \cdot 4\pi a^2.$$

3. (С. 31.) Вследствие симметрии вектор **E** параллелен (или антипараллелен) **R** и является функцией лишь от **R**. Применение теоремы Гаусса к сфере радиуса R дает

$$\pm E \cdot 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{4}{3}\,\pi a^3 \rho = 4\pi e \text{ для } R > a;$$

$$\pm E \cdot 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{4}{3}\,\pi R^3 \rho = 4\pi\,\frac{R^3}{a^3}\,e \text{ для } R < a$$

(ибо $e = (4/3)\pi a^3\rho$), откуда и получим формулы (4.7) и (4.8).

Непрерывность вектора **E** при прохождении через поверхность сферы следует из того, что для $R = a$ будет

$$\mathbf{E}_e = \frac{4}{3}\,\pi\rho\mathbf{R} = \mathbf{E}_i.$$

4. (С. 34.) Согласно (4.5), в полости конденсатора поле внешнего цилиндра равно нулю. Стало быть, в этой полости поле возбуждается лишь внутренним цилиндром и определяется формулой (4.5). В том, что заряды единицы длины обкладок конденсатора равны по величине и противоположны по знаку, можно убедиться, применяя теорему Гаусса к замкнутой

поверхности, частью проходящей по толще внешнего металлического цилиндра, частью же ограниченной двумя параллельными сечениями, перпендикулярными оси конденсатора. Поток электрического вектора через такую поверхность равен нулю.

5. (С 34.) Решение этой задачи вполне аналогично решению задачи предыдущей.

6. (С. 48.) В формуле (8.2) выберем в качестве пути интегрирования соответственно ось x (для плоскости) и перпендикулярный оси цилиндра радиус-вектор $\mathbf{r}$. Внося значение вектора $\mathbf{E}$ из (4.4) и (4.5), получим для плоскости и для цилиндра соответственно:

$$\varphi - \varphi_0 = -\int 2\pi\sigma \cdot dx = -2\pi\sigma x;$$

$$\varphi - \varphi_0 = -\int_{r_1}^{r} \frac{2\varkappa}{r}\, dr = -2\varkappa \lg \frac{r}{r_1} \quad \text{для } r > r_1;$$

$$\varphi - \varphi_0 = 0 \qquad \text{для } r < r_1.$$

7. (С. 48.) Выбирая в формуле (8.3) в качестве пути интегрирования радиус-вектор $\mathbf{R}$, получим на основании (4.7) для точек, лежащих вне шара:

$$\varphi_e = \int_R^{\infty} \frac{e}{R^2}\, dR = \frac{e}{R}.$$

Стало быть, на поверхности шара $\varphi = \varphi_0 = e/a$. Воспользовавшись формулами (8.2) и (4.8), получаем для точек, лежащих внутри шара:

$$\varphi_i - \varphi_0 = -\int_a^R \frac{4}{3}\pi R\rho\, dR = 2\pi\rho\left(\frac{a^2}{3} - \frac{R^2}{3}\right),$$

что по внесении значения φ_0 совпадает с формулой текста.

8. (С. 52.) Из (5.3) следует, что разность потенциалов обкладок плоского конденсатора равна $\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi ed/S$.

В случае цилиндрического и сферического конденсатора поле в пространстве между его обкладками возбуждается единственно лишь зарядом внутренней обкладки. Поэтому, согласно результатам решения задачи 6, для цилиндрического конденсатора

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -2\varkappa \lg \frac{r_2}{r_1}; \qquad \varkappa = \frac{e}{l},$$

а для конденсатора сферического

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{e}{R_2} - \frac{e}{R_1} = \frac{(R_1 - R_2)e}{R_1 R_2}.$$

Внося эти выражения в (9.1) и выбрав для C, как обычно, положительный знак [знак выражения (9.1) зависит от того, какую из обкладок считать первой и какую второй], получим искомые результаты.

9. (С. 56.) Из (8.10) и (43*) следует

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}_a \frac{(\mathbf{p}R)}{R^3} = -\frac{1}{R^3}\operatorname{grad}_a(\mathbf{pR}) - (\mathbf{pR})\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{R^3}\right).$$

Приняв во внимание, что на основании (8*), (9*) и (11*)

$$\operatorname{grad}_a(\mathbf{pR}) = \mathbf{p}$$

и

$$\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{R^3}\right)=\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R^3}\right)\cdot\operatorname{grad}_a R=-\frac{3\mathbf{R}}{R^5},$$

получаем (10.4).

В сферической системе координат слагающие постоянного вектора $\mathbf{p}$ в произвольной точке R, ϑ, α равны соответственно:

$$p_R=p\cos\vartheta,\quad p_\vartheta=-p\sin\vartheta,\quad p_\alpha=0,\quad \text{так что}\quad \mathbf{pR}=pR\cos\vartheta.$$

Внося это в (10.4), получаем (10.5).

10. (С. 60.) Принимая точку P за начало координат, имеем

$$R^2=x^2+y^2+z^2,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{x}{R},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)=-\frac{x}{R^3},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{1}{R^3}-x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R^3}\right)=-\frac{1}{R^3}+\frac{3x^2}{R^5}$$

Аналогичные выражения получим для

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{R}\right)\quad\text{и}\quad\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Следовательно,

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{3}{R^3}+3\,\frac{x^2+y^2+z^2}{R^5}=0.$$

11. (С. 60.) Из соображений симметрии следует, что потенциал φ зависит только от координаты x и что, стало быть, уравнение Лапласа (11.3) принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-4\pi\rho.$$

Внутри пластинки $\rho=\text{const}$ и, следовательно,

$$\varphi_i=-2\pi\rho x^2+Ax+B,$$

а вне пластинки $\rho=0$ и, следовательно,

$$\varphi_e=Cx+D,$$

где A, B, C и D суть произвольные постоянные интегрирования. Полагая $A=B=0$ и определяя значения постоянных C и D из условия непрерывности φ и $\partial\varphi/\partial x$ на поверхностях пластинки, т. е. при $x=\pm a$, получаем искомые значения φ_i и φ_e, из которых по формуле (10.2) определяется и значение вектора $\mathbf{E}$.

Чтобы перейти к бесконечной заряженной *плоскости*, достаточно в полученных формулах перейти к пределу $a\to 0$, $\rho\to\infty$, полагая при этом переходе, что заряд, приходящийся на единицу поверхности пластинки, остается постоянным:

$$2a\rho=\sigma=\text{const}.$$

12. (С. 61.) Из соображений симметрии следует, что потенциал φ зависит только от расстояния R от центра заряженного шара. Полагая в (21*) $f(R)=\varphi$, получаем из (11.1)

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)=-4\pi\rho.$$

Внутри шара $\rho=\text{const}$ и, следовательно,

$$\varphi_i=-\frac{2\pi\rho}{3}R^2+\frac{A}{R}+B,$$

а вне шара $\rho = 0$ и, следовательно,

$$\varphi = \frac{C}{R} + D,$$

где A, B, C и D суть произвольные постоянные интегрирования. Чтобы φ оставалось конечным при $R = 0$, необходимо, чтобы $A = 0$. Чтобы φ обращалось в нуль при $R = \infty$, необходимо, чтобы $D = 0$. Значение постоянных B и C определяется из условия непрерывности φ и $\partial\varphi/\partial R$ на поверхности шара $R = a$ и приводит к формуле (8 12).

13. (С. 71.) Введем цилиндрическую систему координат, ось z которой направлена вправо и проходит через заряд e, а плоскость $z = 0$ совпадает с поверхностью проводника. Расстояние произвольной точки P с координатами r и z от зарядов $+e$ и $-e$ будет равно соответственно.

$$r_1 = \sqrt{r^2 + (z-d)^2}, \quad r_2 = \sqrt{r^2 + (z+d)^2}.$$

Потенциал поля в правом полупространстве будет, очевидно, равен

$$\varphi = e\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Внося в выражение

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

для слагающей поля по оси z значения φ, r_1 и r_2, выполняя дифференцирование и полагая затем $z = 0$, получим значение нормальной слагающей поля у поверхности проводника, откуда по формуле (5.1) найдем σ.

В том, что полный заряд, индуцированный на проводнике, равен $-e$, можно убедиться непосредственным интегрированием.

14. (С. 85.) Применим формулу (15.6). В случае поверхностного распределения заряда весь этот заряд находится при постоянном потенциале $\varphi = e/a$; стало быть,

$$W = \frac{1}{2}\int \sigma\varphi\, dS = \frac{1}{2}\varphi e = \frac{e^2}{2a}.$$

В случае объемного распределения заряда

$$\sigma = 0, \quad \rho = \frac{e}{(4/3)\pi a^3}, \quad \varphi = 2\pi\rho\left(a^2 - \frac{R^2}{3}\right),$$

где R — расстояние от центра сферы (см. с. 48, задачу 7). Стало быть,

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV = \frac{1}{2}\int_0^a \rho \cdot 2\pi\rho\left(a^2 - \frac{R^2}{3}\right)\cdot 4\pi R^2\, dR,$$

откуда после интегрирования получается искомый результат.

15. (С. 85.) Выражая в (16.6) $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ через градиенты соответствующих потенциалов φ_1 и φ_2, получим

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int (\nabla\varphi_1)(\nabla\varphi_2)\, dV.$$

Выделим из полного поля малую сферу S, охватывающую заряд e_2. Пренебрегая долей взаимной энергии, локализованной внутри этой сферы, и применяя теорему Грина (52*), можем написать

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi}\oint_S \varphi_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\, dS - \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \varphi_1\nabla^2\varphi_2\, dV.$$

В пространстве V', расположенном вне сферы S, $\nabla^2\varphi_2 = 0$; стало быть, последний интеграл равен нулю. Если заряды e_1 и e_2 достаточно удалены

друг от друга, то на поверхности сферы S потенциал φ_1 можно считать постоянным и равным e_1/R. Следовательно,

$$W_{12} = \frac{\varphi_1}{4\pi}\oint \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\,dS = -\frac{e_1}{4\pi R}\oint E_{2n}\,dS.$$

Приняв во внимание, что в данном случае нормаль нужно считать направленной *внутрь* сферы S, и воспользовавшись теоремой Гаусса (3.6), получаем искомый результат.

16. (С. 109.) По определению,

$$\operatorname{tg}\beta_i = \frac{E_{it}}{E_{in}} \qquad (i = 1,\ 2)$$

Воспользовавшись (22.8) и (22.9), получаем искомый результат.

17. (С. 109.) Приведенные утверждения следуют непосредственно из формулы (22.9) для щели, параллельной $\mathbf{E}$, и из (22.8) (при $\sigma = 0$) для щели, перпендикулярной к $\mathbf{E}$. В концевых же участках щели ограничивающие ее поверхности сходятся под углом либо, во всяком случае, обладают значительной кривизной, направление нормали к ним испытывает резкие изменения, так что поле в прилегающих участках щели отличается значительной неоднородностью.

18. (С. 110.) Приведенные в этой задаче условия однозначности решения полной системы (А) уравнений электростатического поля отличаются от приведенных на с. 107 тем, что здесь для проводников не задано распределения зарядов σ на их поверхности. Поэтому в примененной там формуле

$$\int_V \varepsilon E''^2\,dV = -\oint_S D''_n\varphi''\,dS$$

к поверхности S должны быть причислены все поверхности проводников. Но на каждой такой поверхности либо $\varphi'' = 0$ (задача А), либо $\varphi'' = \text{const}$ (задача В). В последнем случае можем вынести φ'' за знак интеграла и получаем

$$\oint D''_n\,dS = \oint D_n\,dS - \oint D'_n\,dS = 4\pi e - 4\pi e' = 0.$$

Стало быть, все интегралы по этим поверхностям в обоих случаях равны нулю, и приведенное на с. 108 доказательство однозначности решения сохраняет силу.

19. (С. 110.) Согласно (22.8) и (22.10) электрическая индукция D будет иметь во всем пространстве между обкладками постоянное значение $D = 4\pi\sigma$, где σ — плотность заряда на обкладках конденсатора. Напряженность поля в первом и во втором слое будет равна соответственно $E_1 = 4\pi\sigma/\varepsilon_1$ и $E_2 = 4\pi\sigma/\varepsilon_2$. Наконец, разность потенциалов между обкладками будет равна $\varphi_2 - \varphi_1 = E_1 d_1 + E_2 d_2$. Отсюда на основании соотношения $e = S\sigma$ и формулы (9 1) легко найти C.

20. (С. 165.) По соображениям симметрии, результирующая $\mathbf{F}$ натяжений, приложенных к диэлектрику, должна быть перпендикулярна его поверхности, т. е. параллельна оси z. Поэтому

$$F = F_z = \int_S T_{zz}\,dx\,dy,$$

где интегрирование распространяется по поверхности диэлектрика $z = 0$, а T_{zz} — значение соответствующей слагающей натяжений с *внешней* стороны поверхности диэлектрика. Переходя к цилиндрическим координатам z, r, α,

получаем

$$F = \int_0^\infty T_{zz} \cdot 2\pi r\, dr.$$

Полагая в (23.12) $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon$, убеждаемся, что поле вне диэлектрика равно сумме поля $\dfrac{e\mathbf{R}}{R^3}$ заряда e и поля $\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\dfrac{e\mathbf{R}'}{R'^3}$ фиктивного заряда $\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}e$, помещенного в точку P', являющуюся изображением в плоской поверхности диэлектрика точки нахождения заряда e. Поэтому у внешней поверхности диэлектрика

$$E_z = -\frac{ez_0}{R^3} + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{ez_0}{R^3} = -\frac{2\varepsilon e z_0}{(1+\varepsilon)R^3},$$

$$E_r = \frac{er}{R^3} + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{er}{R^3} = \frac{2er}{(1+\varepsilon)R^3},$$

$$E_\alpha = 0, \quad \text{где} \quad R = \sqrt{r^2 + z_0^2}.$$

Так как в вакууме $T'' = 0$ и поэтому $\mathbf{T} = \mathbf{T}''$, то на основании (34.2)

$$T_{zz} = \frac{1}{4\pi}\left(E_z^2 - \frac{1}{2}E^2\right) = \frac{1}{8\pi}(E_z^2 - E_r^2).$$

Следовательно,

$$F = \frac{e^2}{(1+\varepsilon)^2}\int_0^\infty \frac{r\,dr(\varepsilon^2 z_0^2 - r^2)}{(z_0^2 + r^2)^3} = \frac{\varepsilon - 1}{4(\varepsilon+1)}\frac{e^2}{z_0^2}.$$

Предоставляем читателю получить тот же результат, определяя равнодействующую натяжений, приложенных к произвольно малой сфере, окружающей заряд e.

21. (С. 176.) Ввиду отсутствия зарядов внутри однородного проводника [уравнение (37.7)], можем повторить рассуждения, приведшие нас при решении задачи 12 к формуле $\varphi = C/R + D$. Таков будет потенциал внутри конденсатора, а разность потенциалов на его обкладках будет

$$\varphi_1 - \varphi_2 = C\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{a}$$

Поле $\mathbf{E}$ будет направлено по радиусу шара ($E = |E_R|$) и

$$E_R = -\frac{\partial\varphi}{\partial R} = \frac{C}{R^2}, \quad j_R = \lambda E_R = \frac{\lambda C}{R^2}.$$

Наконец, сила тока, протекающего через конденсатор, т. е. через концентрическую его обкладкам шаровую поверхность произвольного радиуса R (при условии $R_1 < R < R_2$), будет равна

$$J = \oint j_R\, dS = \lambda C \oint \frac{dS}{R^2} = 4\pi C\lambda. \tag{b}$$

Разделив почленно уравнение (a) на уравнение (b), получим на основании (35.1) искомое значение сопротивления R.

22. (С. 177.) По определению,

$$\operatorname{tg}\beta_i = \frac{j_{it}}{j_{in}} \quad (i = 1, 2).$$

Воспользовавшись уравнениями (37.5), (36,5) и (7.7), получаем искомый результат.

23. (С. 177.) Отнесем значок 1 к проводнику, а значок 2 к окружающему его диэлектрику. Так как $j_{2n} = 0$, то вследствие (37.5) и $j_{1n} = 0$. Отсюда на основании (36.5) имеем $E_{1n} = 0$ и $D_{1n} = 0$. Поэтому уравнение (22.7) дает искомый результат:

$$D_{2n} = 4\pi\sigma.$$

Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ перестают быть перпендикулярными поверхности проводника по той причине, что тангенциальные их слагающие уже не равны нулю, как при отсутствии тока. Последнее вытекает из (22.9) и (36.5).

24. (С. 181.) Нарушение изоляции означает соединение с землей через некоторое неизвестное сопротивление r. В первом случае ток J, возбуждаемый электродвижущей силой батареи $\mathscr{E}^{\text{стр}}$, разветвляется в точке нарушения изоляции на два тока J_1 и J_2, которые идут через сопротивления r и $(c - x)s$ в землю (s есть сопротивление единицы длины телеграфного провода). Применяя к этому случаю первый и второй законы Кирхгофа (37.1) и (38.8), получим (полагая сопротивление земли, а также сопротивление заземления на станциях равными нулю):

$$J = J_1 + J_2, \quad Jxs + J_1 r = \mathscr{E}^{\text{стр}}, \quad -J_1 r + J_2(c - x)s = 0.$$

Аналогичные уравнения получим для второго случая; в третьем же случае имеем только одно уравнение, ибо тут остается только один замкнутый контур, так что $J_2'' = 0$, $J_1'' = J''$ Из полученных семи уравнений удается исключить семь неизвестных:

$$J_1,\ J_2,\ J_1',\ J_2',\ r,\ \mathscr{E}^{\text{стр}} \text{ и } s.$$

В результате получаем

$$x = (1 + p)\frac{bk - ck'}{k - k'},$$

где

$$k = \frac{J''}{J - J''}, \quad k' = \frac{J''}{J' - J''}, \quad p = \sqrt{\frac{c - b}{bk - ck'}}.$$

25. (С. 203.) В случае прямолинейного тока входящий в (42.4) вектор $[ds\,\mathbf{R}]$ имеет одинаковое направление для всех элементов тока (при фиксированной точке наблюдения). Поэтому числовое значение вектора $\mathbf{H}$ равно сумме числовых значений подынтегрального выражения формулы (42.4)

$$H = \frac{J}{c}\int \frac{ds\,\sin(ds, \mathbf{R})}{R^2}.$$

Если r есть длина перпендикуляра, опущенного из точки наблюдения на прямую тока, а α — угол между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$, то

$$R = \frac{r}{\cos\alpha} \quad \text{и} \quad ds\,\sin(d\mathbf{s}, \mathbf{R}) = R\,d\alpha.$$

Следовательно,

$$H = \frac{J}{c}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{R} = \frac{J}{rc}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha\,d\alpha = \frac{2J}{cr}.$$

В справедливости приведенных в тексте утверждений относительно формы и направления силовых линий убедиться весьма легко.

26. (С. 203.) Радиус-вектор от произвольного элемента тока $d\mathbf{s}$ до точки оси тока равен $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{d}$ (если считать вектор $\mathbf{R}_0$ направленным от окружности к центру), поэтому $[d\mathbf{s}\,\mathbf{R}] = [d\mathbf{s}\,\mathbf{R}_0] + [d\mathbf{s}\,\mathbf{d}]$. Если мы подставим этот результат в формулу (42.4), то вследствие симметрии задачи интеграл по $[d\mathbf{s}\,\mathbf{d}]$ будет равен нулю, ибо вектор $[d\mathbf{s}\,\mathbf{d}]$ параллелен $\mathbf{R}_0$. Вектор же

$[d\mathbf{s}\,\mathbf{R}_0]$ параллелен вектору $-\mathbf{d}$ и действительно составляет с направлением тока правовинтовую систему. Наконец, ввиду перпендикулярности $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{d}$ $R^2 = R_0^2 + d^2$. Таким образом, числовое значение вектора $\mathbf{H}$ равно

$$H = \frac{J}{c}\oint \frac{ds \cdot R_0}{(R_0^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{J \cdot 2\pi R_0^2}{c\,(R_0^2 + d^2)^{3/2}}.$$

27. (С. 206.) Согласно правилам перемножения векторов,

$$[d\mathbf{s}_2\,[d\mathbf{s}_1\mathbf{R}_{12}]] = d\mathbf{s}_1\,(d\mathbf{s}_2\mathbf{R}_{12}) - \mathbf{R}_{12}\,(d\mathbf{s}_1\,d\mathbf{s}_2).$$

Вносим это в (43.1) и интегрируем по контурам L_1 и L_2 обоих токов. Интеграл первого члена равен [ср. (10*)]:

$$\oint_{L_1}\oint_{L_2} d\mathbf{s}_1\,\frac{(d\mathbf{s}_2\mathbf{R}_{12})}{R_{12}^3} = -\oint_{L_1} d\mathbf{s}_1 \oint_{L_2}\left(d\mathbf{s}_2\,\mathrm{grad}_a\,\frac{1}{R_{12}}\right) =$$

$$= -\oint_{L_1} d\mathbf{s}_1 \oint_{L_2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}_2}\left(\frac{1}{R_{12}}\right)\right) d\mathbf{s}_2 = 0,$$

ибо подынтегральное выражение второго интеграла является полным дифференциалом. Следовательно, результирующая сила $\mathbf{f}_{12}$, с которой весь первый ток действует на весь второй, равна

$$\mathbf{f}_{12} = -\frac{J_1 J_2}{c^2}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{\mathbf{R}_{12}(d\mathbf{s}_1\,d\mathbf{s}_2)}{R_{12}^3}.$$

Соответствующее выражение для $\mathbf{f}_{21}$ получим, обменяв местами индексы 1 и 2. Приняв во внимание, что $\mathbf{R}_{12} = -\mathbf{R}_{21}$, получаем

$$\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}.$$

28. (С. 206.) Рассмотрим разность между выражением (43.1) для силы $\mathbf{E}_1$ и ее выражением, данным Ампером. Опуская фактор J_1J_2/c^2, получаем для этой разности следующее выражение (ср. предыдущую задачу):

$$\frac{d\mathbf{s}_1}{R_{12}^3}\,(\mathbf{R}_{12}\,d\mathbf{s}_2) - \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}\,(d\mathbf{s}_1\,d\mathbf{s}_2) - \frac{3\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^5}\,(d\mathbf{s}_1\mathbf{R}_{12})(d\mathbf{s}_2\mathbf{R}_{12}) + 2\,\frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}\,(d\mathbf{s}_1\,d\mathbf{s}_2) =$$

$$= \frac{d\mathbf{s}_1}{R_{12}^3}\,(\mathbf{R}_{12}\,d\mathbf{s}_2) + \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}\,(d\mathbf{s}_1\,d\mathbf{s}_2) - \frac{3\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^5}\,(d\mathbf{s}_1\mathbf{R}_{12})(d\mathbf{s}_2\mathbf{R}_{12}).$$

Наша задача сводится к тому, чтобы доказать, что интеграл этого выражения по замкнутому контуру тока J_1 равен нулю. Что это действительно имеет место, следует из того, что приведенное выражение совпадает с последним членом уравнения (43 5), если в этом уравнении положить

$$f(R_{12}) = -\frac{1}{R_{12}^3} \quad \text{и} \quad \Phi(R_{12}) = 0.$$

В самом деле, приняв во внимание, что $d\mathbf{R}_{12} = -d\mathbf{s}_1$ (см. с. 206) имеем (см. также (9*)]:

$$-d\left(\mathbf{R}_{12}(d\mathbf{s}_2\mathbf{R}_{12})\frac{1}{R_{12}^3}\right) = d\mathbf{s}_1\,\frac{(d\mathbf{s}_2\mathbf{R}_{12})}{R_{12}^3} - \frac{\mathbf{R}_{12}(d\mathbf{s}_2\cdot(-d\mathbf{s}_1))}{R_{12}^3} -$$

$$- \mathbf{R}_{12}(d\mathbf{s}_2\mathbf{R}_{12})\left(\mathrm{grad}_q\,\frac{1}{R_{12}^3},\,d\mathbf{s}_1\right) = \frac{d\mathbf{s}_1(d\mathbf{s}_2\mathbf{R}_{12})}{R_{12}^3} +$$

$$+ \frac{\mathbf{R}_{12}(d\mathbf{s}_2\,d\mathbf{s}_1)}{R_{12}^3} - \frac{3\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^5}\,(d\mathbf{s}_2\mathbf{R}_{12})(\mathbf{R}_{12}\,d\mathbf{s}_1).$$

29. (С. 209.) Проведем через лежащую внутри цилиндра точку P ряд меридиональных плоскостей, рассекающих поверхность цилиндра на ряд прямолинейных полосок (рис. 92). Ширина противолежащих полосок равна соответственно $ds_1 = r_1\,d\varphi$ и $ds_2 = r_2\,d\varphi$; силы же токов, протекающих по этим полоскам, пропорциональны их ширине:

$$dJ_1 = k\,ds_1 = kr_1\,d\varphi \quad \text{и} \quad dJ_2 = k\,ds_2 = kr_2\,d\varphi.$$

Стало быть, напряженности полей dH_1 и dH_2, возбуждаемых каждой из этих прямолинейных полосок тока в точке P, равны друг другу [см. (42.5)]:

$$dH_1 = \frac{2\,dJ_1}{cr_1} = \frac{2k\,d\varphi}{c} = \frac{2\,dJ_2}{cr_2} = dH_2.$$

Так как, кроме того, векторы $d\mathbf{H}_1$ и $d\mathbf{H}_2$ направлены противоположно друг другу, то поля каждой пары противолежащих полосок взаимно компенсируются.

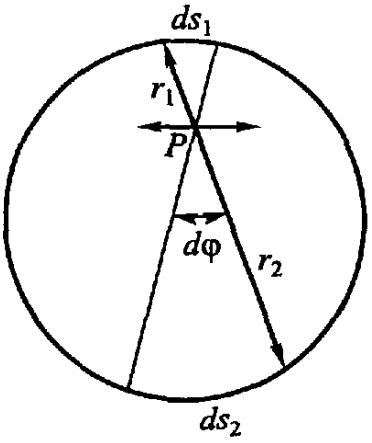

Рис. 92

30. (С. 220.) Вследствие симметрии вектор $\mathbf{H}$ есть функция только от $\mathbf{r}$. Чтобы найти слагающую H_α (вводим цилиндрические координаты r, α, z), применим формулу (47.4), в которой в качестве замкнутой кривой L возьмем концентрическую току окружность радиуса r. Получаем

$$H_\alpha \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}\int j_n\,dS.$$

Для $r \geqslant r_0$

$$\int j_n\,dS = J;$$

для $r < r_0$ (ввиду $j_n = J/(\pi r_0^2)$)

$$\int j_n\,dS = \frac{J}{\pi r_0^2}\,\pi r^2 = J\frac{r^2}{r_0^2},$$

отсюда и найдем значения $H_{e\alpha}$ и $H_{i\alpha}$. Что же касается слагающей H_z, то она равна нулю, ибо напряженность поля каждого из элементов тока, согласно (44.2), перпендикулярна направлению тока z. Наконец, из (47.1) и (22*) следует, что $rH_r = \text{const}$, что ввиду конечности вектора $\mathbf{H}$ при $r = 0$ может иметь место лишь при $H_r = 0$.

31. (С. 227) Введем цилиндрическую систему координат z, r, α, ось z которой совпадает с осью провода. Магнитные силовые линии поля каждой из прямолинейных нитей тока, на которые может быть разложен рассматриваемый ток, представляют собой окружности, плоскость которых перпендикулярна оси z. Это обстоятельство, а также симметрия задачи дают основание предположить, что и магнитные силовые линии поля рассматриваемого тока будут окружностями, концентрическими с цилиндрическим проводником, т. е. что $H_z = H_r = 0$ и $H = H_\alpha$. Ввиду симметрии задачи H_α может зависеть только от координаты r, так что уравнение $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ будет удовлетворено. Далее, ввиду отсутствия объемных токов $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$. На основании (32*) и сделанных предположений относительно слагающих вектора $\mathbf{H}$ это уравнение сводится к уравнению $\dfrac{\partial}{\partial r}(rH_\alpha) = 0$, откуда $H_\alpha = a/r$, где a — постоянная.

Внутри цилиндра значение постоянной в этом выражении должно равняться нулю, ибо в противном случае H_α на оси проводника при $r = 0$ обращалось бы в бесконечность. Стало быть, внутри цилиндра $H = 0$, т. е. поля нет. Значение постоянной вне цилиндра определяется из пограничного

условия (49 3), которое в нашем случае принимает вид

$$(H_\alpha)_{r=r_0} = \frac{a}{r_0} = \frac{4\pi i}{c},$$

где r_0 — радиус полого цилиндрического проводника, а i — поверхностная плотность тока, связанная с полной силой J тока, протекающего по цилиндру, соотношением $2\pi r_0 i = J$. Следовательно, $a = 2J/c$ и напряженность поля вне цилиндра равна $H = H_\alpha = 2J/(cr)$, что и требовалось доказать.

Согласно общей теореме, полученное нами решение системы уравнений (B) единственно.

32. (С. 295.) Согласно результатам задачи 30 (с. 220), магнитные линии рассматриваемого тока при $\mu = \mu' = \mu'' = 1$ представляют собой концентрические окружности. Если неоднородные в магнитном отношении участки поля разделены коаксиальными цилиндрическими поверхностями, то эта круговая симметрия магнитных линий нарушиться не может. Применение формулы (47.4), остающейся справедливой для произвольной среды, приводит в нашем случае к тем же значениям вектора $\mathbf{H}$, как и в задаче 30.

33. (С. 298.) См. решение задачи 17.

34. (С. 344.) Из симметрии задачи и из аналогии с электрическим полем диэлектрического шара, поляризованного однородным внешним полем [см. уравнение (24.5)], явствует, что поле $\mathbf{H}_i$ внутри магнита будет однородным, а поле $\mathbf{H}_e$ вне магнита будет полем диполя. Соответственно этому полагаем, что скалярные потенциалы внутреннего и внешнего магнитных полей равны

$$\varphi_i = -zH_i, \quad \varphi_e = \frac{zM}{R^3}, \tag{a}$$

причем ось z предполагается выбранной по направлению постоянного намагничения магнита $\mathbf{I}_0$. Из условия непрерывности потенциала на поверхности магнита получаем

$$-H_i = \frac{M}{a^3}, \tag{b}$$

где a означает радиус магнита.

Далее, условие непрерывности нормальной слагающей магнитной индукции на поверхности магнита имеет вид

$$B_{iR} = \mu_i H_{iR} + 4\pi I_{0R} = B_{eR} = \mu_e H_{eR} \quad \text{при} \quad R = a. \tag{c}$$

Радиальные слагающие магнитного поля равны

$$H_{iR} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial R} = H_i \cos\theta, \quad H_{eR} = -\frac{\partial \varphi_e}{\partial R} = \frac{2M}{R^3}\cos\theta,$$

где θ — полярный угол, отсчитываемый от оси z.

Поэтому из (c) следует:

$$\mu_i H_i + 4\pi I_0 = 2\frac{\mu_e M}{a^3}. \tag{d}$$

Из (b) и (d) получаем окончательно:

$$M = \frac{4\pi I_0 a^3}{\mu_i + 2\mu_e}.$$

Таким образом, в соответствии с (74.13) потенциал φ_e, а следовательно, и внешнее поле $\mathbf{H}_e$ сферического постоянного магнита обратно пропорциональны величине $\mu_i + 2\mu_e$.

35. (С. 373.) Применим формулу (77.2), в которой положим

$$\mathscr{E}^{\text{стр}} = 0 \quad \text{и} \quad \mathscr{E}'^{\text{инд}} = \mathscr{E}'^{\text{инд}}_{\text{внш}} + \mathscr{E}'^{\text{инд}}_{\text{витр}},$$

где

$$\mathscr{E}'^{\text{инд}}_{\text{витр}} = -L'\frac{dJ'}{dt}$$

есть электродвижущая сила самоиндукции Общее решение получаемого таким образом неоднородного дифференциального уравнения

$$J'R' + L'\frac{dJ'}{dt} = \Psi'_0\omega\sin\omega t \qquad \text{(а)}$$

выражается суммой произвольного частного решения этого уравнения и общего решения $Ae^{-\frac{R'}{L'}t}$ соответствующего однородного уравнения

$$J'R' + L'\frac{dJ'}{dt} = 0.$$

Через достаточно большой промежуток времени последний член этой суммы сделается вследствие затухания сколь угодно малым и останется только первый член.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в форме

$$J' = J'_0\sin(\omega t - \varphi).$$

Подставляя это выражение для J' в наше уравнение (а), разлагая

$$\sin(\omega t - \varphi) \quad \text{и} \quad \cos(\omega t - \varphi)$$

и приравнивая коэффициенты при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ в обеих частях уравнения, имеем

$$J'_0R'\cos\varphi + L'J'_0\omega\sin\varphi = \Psi'_0\omega, \qquad -J'_0R'\sin\varphi + L'J'_0\omega\cos\varphi = 0,$$

откуда и получим искомое значение J'_0.

Чтобы найти работу, необходимую для поддержания вращения контура, заметим, что потенциальная функция тока во внешнем магнитном поле, согласно (65.4), равна (в практических единицах):

$$U' = -J'\Psi' = -J'\Psi'_0\cos\omega t.$$

Следовательно, за элемент времени dt силы магнитного поля должны совершать работу [см. уравнение (79.1)]:

$$-(dU)_J = J'\Psi'_0 d\cos\omega t = -\omega J'\Psi'_0\sin\omega t\,dt;$$

затрата же работы извне должна быть равна по величине и обратна по знаку. Стало быть, затрата внешней работы за время одного периода равна

$$\omega J'_0\Psi'_0\int_0^T \sin(\omega t - \varphi)\sin\omega t\,dt = \frac{1}{2}\omega J'_0\Psi'_0\cos\varphi\cdot T.$$

Внеся сюда значения $\cos\varphi$ и J'_0 и произведя пересчет на единицу времени, получим приведенное в тексте выражение.

36. (С. 412.) Так как, согласно § 86 (с. 399), наличие приложенного извне напряжения эквивалентно наличию в цепи соответствующей сторонней ЭДС, то уравнение (89.9) примет в рассматриваемом случае вид

$$J'R' = \mathscr{E}'^{\text{инд}} + \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}'_{cd},$$

или [ср. уравнение (89.3)]

$$R'J' = \frac{e'}{c'} - L'\frac{dJ'}{dt} + \mathscr{E}'_0\cos\omega t.$$

Дифференцируя это уравнение по t и воспользовавшись соотношением (89.2), получаем окончательно:

$$L'\frac{d^2J'}{dt^2} + R'\frac{dJ'}{dt} + \frac{1}{C'}J' = -\omega\mathscr{E}'_0\sin\omega t.$$

Общее решение этого неоднородного уравнения выражается суммой общего решения соответствующего однородного уравнения (89.5) и произвольного частного решения рассматриваемого неоднородного уравнения. Первое

слагаемое представляет собой собственные колебания контура, амплитуда которых благодаря затуханию с течением времени стремится к нулю. Что же касается частного решения рассматриваемого уравнения, то мы можем искать его в форме

$$J' = J'_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

Внеся это выражение в наше уравнение и приравняв коэффициенты при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ в правой и левой частях уравнения (ср. задачу 35), получим два соотношения для определения J'_0 и $\operatorname{tg}\varphi$.

37. (С. 474.) Из (98.9) следует, что в случае гармонических колебаний осциллятора средний квадрат тока равен

$$\overline{J^2} = \frac{1}{l^2}\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2} = \frac{\omega^2}{l^2}\overline{p_0^2\cos^2\omega t} = \frac{\omega^2 p_0^2}{2l^2}.$$

Воспользовавшись соотношением $\omega = 2\pi c/\lambda$ и внеся полученное для p_0^2 выражение в формулу (99.17), находим

$$\overline{\sum} = \frac{2}{3c}\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)^2 \overline{J^2},$$

что и требовалось доказать.

38. (С. 474.) Допустим, что магнитный момент системы равен

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_0 \cos\omega t,$$

где $\mathbf{M}_0$ — постоянный вектор. В волновой зоне, т. е. при $R \gg c/\omega = \lambda/2\pi$, первым членом выражения (98.13) можно пренебречь по сравнению со вторым членом, так что

$$\mathbf{A} = -\frac{\omega}{cR^2}[\mathbf{M}_0\mathbf{R}]\sin\omega\left(t - \frac{R}{c}\right).$$

В сферической системе координат с центром в диполе, ось которой направлена по вектору $\mathbf{M}_0$,

$$A_R = A_\vartheta = 0, \quad A_\alpha = -\frac{\omega}{cR} M_0 \sin\vartheta \cdot \sin\omega\left(t - \frac{R}{c}\right).$$

Так как скалярный потенциал поля магнитного диполя равен нулю, то

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

и

$$E_R = E_\vartheta = 0, \quad E_\alpha = \frac{\omega^2}{c^2 R} M_0 \sin\vartheta \cdot \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right).$$

Далее, вычисляя $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ с помощью (31*) и ограничиваясь старшими членами, в знаменатель которых R входит в первой степени, получаем

$$H_R = H_\alpha = 0, \quad H_\vartheta = E_\alpha.$$

39. (С. 549.) Из уравнения Максвелла (II) следует, что статическое электрическое поле является потенциальным не только в покоящихся, но и в движущихся средах:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

Из (111.3) и (111.6) следует, что

$$\mathbf{j}_1 = \rho\mathbf{u} + \lambda_1\left(-\nabla\varphi_1 + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}\right]\right), \quad \mathbf{j}_2 = -\lambda_2\nabla\varphi_2,$$

где индексы 1 и 2 относятся соответственно к железному шару и к электролиту. В выражениях для $\mathbf{j}_1$ можно заменить магнитную индукцию $\mathbf{B}$ во вращающемся шаре значением $\mathbf{B}_0$ этой индукции в *покоящемся* шаре, ибо

относительная разность между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}_0$ должна быть порядка u/c, а в выражении для $\mathbf{j}_1$ эта разность множится в свою очередь на u/c, т. е. приводит к членам порядка u^2/c^2, которыми мы пренебрегаем. Индукция $\mathbf{B}_0$ в шаре, по условию, постоянна по величине и направлена по оси вращения, так что

$$[\mathbf{u}\mathbf{B}_0] = [[\omega\mathbf{r}]\,\mathbf{B}_0] = \omega B_0 \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}$ — векторное расстояние точки от оси вращения. Стало быть,

$$\mathbf{j}_1 = \rho\mathbf{u} - \lambda_1 \nabla\varphi_1 + \frac{\lambda_1\omega}{c} B_0\mathbf{r}.$$

Внося выражения для $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{j}_2$ в уравнение

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0,$$

которое на основании уравнения непрерывности справедливо для любой системы постоянных токов, получаем

$$-\nabla^2\varphi_1 + \frac{2\omega}{c} B_0 = 0, \quad \nabla^2\varphi_2 = 0, \tag{A}$$

ибо $\operatorname{div}\mathbf{r} = 2$ и $\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$ Действительно, в сферической системе координат R, θ, α вектор $\rho\mathbf{u}$ имеет только одну, отличную от нуля, слагающую ρu_α, причем значение этой слагающей ввиду аксиальной симметрии задачи от угла α не зависит. Отсюда на основании (20*) следует, что $\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$.

На поверхности шара, т. е. при $R = a$, должен быть, во-первых, непрерывен электрический потенциал:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{при} \quad R = a, \tag{B}$$

и, во-вторых, непрерывна нормальная слагающая плотности тока:

$$j_{1R} = j_{2R} \quad \text{при} \quad R = a.$$

Последнее уравнение может быть записано так:

$$-\lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial R} + \frac{\lambda_1\omega}{c} B_0 R \sin^2\theta = -\lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial R} \quad \text{при} \quad R = a, \tag{C}$$

ибо слагающая вектора $\mathbf{r}$ по направлению радиуса-вектора $\mathbf{R}$ равна $r\sin\theta = R\sin^2\theta$. Наконец, необходимо, чтобы потенциал был всюду конечен, а на бесконечности стремился бы к нулю.

Приведенные в тексте выражения для φ_1 и φ_2, как легко убедиться, удовлетворяют уравнениям (A), (B), (C) и условию в бесконечности, совокупностью которых потенциал определяется однозначно.

I. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

В этом приложении векторный анализ изложен в объеме, необходимом для чтения настоящей книги; ни к полноте, ни к математической строгости изложения мы не стремились.

§ 1. Векторная алгебра

Векторная алгебра предполагается читателю известной, и здесь мы лишь напомним некоторые основные ее определения и формулы.

Скалярное произведение векторов

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы по осям координат x, y, z, равно

$$\mathbf{ab} = (\mathbf{ab}) = \mathbf{ba} = ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Векторное произведение $[\mathbf{ab}]$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ является вектором, перпендикулярным к $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и по абсолютной величине равным площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

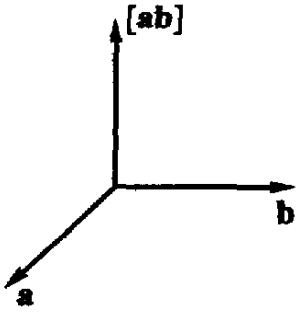

Рис. 93

$$|[\mathbf{ab}]| = ab\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k};$$

$$[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}].$$

Направление вектора $[\mathbf{ab}]$ определяется из требования, чтобы векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $[\mathbf{ab}]$ образовывали *правовинтовую* систему (рис. 93) [1].

[1] Назовем совокупность трех взаимно ортогональных единичных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, проведенных из общего начала, ортогональной тройкой. Все такие тройки разделяются на два класса, носящих название право- и левовинтовых троек. Тройки одного и того же класса могут быть приве-

Смешанное, или векторно-скалярное, произведение трех векторов **a**, **b** и **c** является скаляром и численно равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = \mathbf{b}[\mathbf{ca}] = \mathbf{c}[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = -\mathbf{b}[\mathbf{ac}] = -\mathbf{a}[\mathbf{cb}].$$

Двойное векторное произведение векторов **a**, **b** и **c** равно

$$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}) = -[[\mathbf{bc}]\mathbf{a}].$$

Если векторы являются функциями некоторой скалярной переменной t, то при соблюдении обычных условий можно дифференцировать векторы *по этой переменной*. *При этом имеют место* соотношения

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{a},$$

$$\frac{d(\mathbf{ab})}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b}\right) + \left(\mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right) \text{ и т. д.}$$

дены в совпадение вращением (так, чтобы **a** совпадало с **a**′, **b** с **b**′ и т. д.). Тройки же правовинтовые переходят в тройки левовинтовые путем *зеркального отражения*, т. е. путем обращения направления всех трех векторов тройки (а также путем обращения направления одного, но не двух из этих векторов).

Весьма важно, что не существует инвариантного геометрического определения этих двух классов троек: чтобы определить, например, правые тройки, необходимо конкретно указать какую-либо тройку этого класса (ссылкой на пальцы человеческой руки, на буравчик определенной нарезки и т. п.). Очевидно, что все имеющие геометрический и физический смысл соотношения не могут зависеть от того, какой из классов троек мы условимся называть правым. Это утверждение принято формулировать так: все соотношения должны быть инвариантны по отношению к зеркальному отражению, или, просто, зеркально инвариантны.

Направление векторного произведения двух векторов определяется требованием, чтобы [**ab**] образовывало с **a** и **b** правую тройку, поэтому направление [**ab**] *изменяется* на обратное при зеркальном отражении в плоскости, параллельной [**ab**], и не меняет знака при отражении в плоскости, перпендикулярной [**ab**]. Векторы этого класса называются *аксиальными* в отличие от векторов в собственном смысле слова, направление которых задается непосредственно, вне зависимости от выбора координат или правых троек, и которые называются *полярными*. Аксиальные векторы, в отличие от полярных, не меняют знака при отражении в трех *взаимно ортогональных* плоскостях. Равенства между двумя полярными векторами или между двумя аксиальными векторами зеркально инвариантны; равенство же между одним полярным и одним аксиальным вектором не инвариантно и физического смысла иметь не может.

Легко убедиться, что градиент скаляра является полярным вектором; ротор полярного вектора является аксиальным вектором. В *частности*, напряженность электрического поля есть полярный вектор, напряженность же магнитного поля — аксиальный вектор.

§ 2. Векторные и скалярные поля. Градиент

1 Векторным или скалярным *полем* называется область пространства, каждой точке которой отнесено значение некоторого вектора или скаляра. Поскольку каждая точка поля определяется ее радиусом-вектором $\mathbf{R}$, задание векторного или скалярного поля эквивалентно заданию некоторой векторной функции $\mathbf{a}(\mathbf{R})$ или соответственно скалярной функции $\varphi(\mathbf{R})$. Функции $\mathbf{a}(\mathbf{R})$ и $\varphi(\mathbf{R})$ могут, конечно, зависеть, помимо $\mathbf{R}$, также и от каких-либо скалярных аргументов, например времени. Функции $\mathbf{a}(\mathbf{R})$ и $\varphi(\mathbf{R})$ мы будем считать непрерывными и дифференцируемыми относительно всех их аргументов.

Рассмотрим скалярное поле функции $\varphi(\mathbf{R}) = \varphi(x, y, z)$. Таким полем является, например, поле температуры неравномерно нагретого тела ($\varphi = T$), поле плотности неоднородного тела ($\varphi = \tau$), поле электростатического потенциала и т. п.

2. Пусть скаляр φ имеет в точке P_0 значение φ_0 и пусть при перемещении $d\mathbf{s}$ по направлению вектора $\mathbf{s}$ мы приходим из точки P_0 в точку P, где скаляр φ имеет значение φ_s. Приращение φ при этом перемещении равно $d\varphi = \varphi_s - \varphi_0$. Предел отношения этого приращения $d\varphi$ к числовому значению перемещения ds обозначается через $\partial\varphi/\partial s$ и называется *производной скаляра* φ *в точке* P_0 *по направлению* $\mathbf{s}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \lim_{ds\to 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{ds}. \qquad (1^*)$$

Очевидно, что значение этой производной существенно зависит от выбора направления $\mathbf{s}$ и что ее ни в коем случае нельзя смешивать с обыкновенной частной производной по скалярному параметру s.

3. Для изучения зависимости производной $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ от направления дифференцирования $\mathbf{s}$ рассмотрим те точки поля, в которых φ имеет одинаковое значение, равное, например, φ_0. Совокупность этих точек, вообще говоря, образует собой поверхность [1], которая называется *поверхностью уровня, или эквипотенциальной поверхностью.* Аналитически поверхность эта характеризуется уравнением

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0.$$

Рисунок 94 изображает сечение плоскостью чертежа ряда поверхностей уровня, соответствующих значениям скаляра φ, равным φ_0, $\varphi_0 \pm \Delta\varphi$, $\varphi_0 \pm 2\Delta\varphi$ и т. д. В поле точечного заряда

[1]) Помимо участков пространства, в которых $\varphi = \text{const}$, исключение могут составлять те изолированные точки поля, в которых значение φ достигает максимума или минимума

или заряженного шара поверхности уровня электростатического потенциала представляют собой концентрические сферы, в поле заряженного бесконечного цилиндра — коаксиальные цилиндры и т. д. Вообще же в более сложных случаях последовательные эквипотенциальные поверхности различны не только по своему положению и размерам, но и по своей форме. Однако, во всяком случае, *поверхность каждого проводника является эквипотенциальной* поверхностью, ибо потенциал проводника в электростатическом поле постоянен на всем его протяжении (§ 9).

Обозначим через $\mathbf{n}$ нормаль к поверхности уровня $\varphi = \varphi_0$, направленную в сторону *возрастания* φ, и покажем, что, зная производную $\partial\varphi/\partial n$ по направлению этой нормали, можно определить значение производной скаляра φ по любому направлению $\mathbf{s}$.

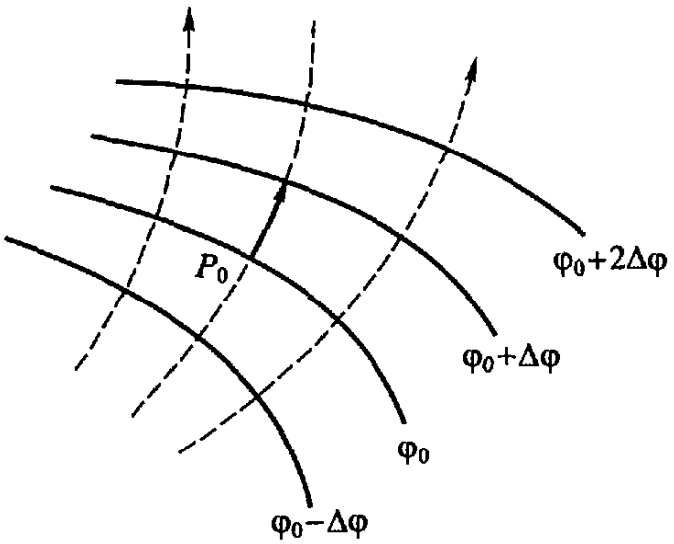

Рис. 94

Пусть поверхность уровня, проходящая через лежащую в направлении $\mathbf{s}$ точку P_s,

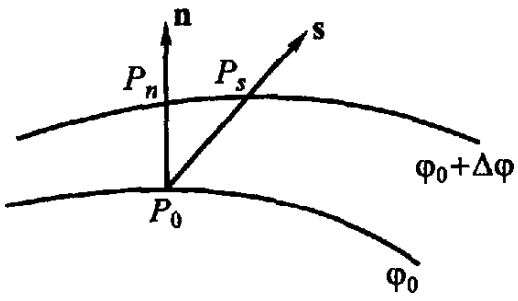

Рис 95

пересекает нормаль $\mathbf{n}$ (или ее продолжение в обратном направлении) в точке P_n (рис. 95). Значение φ в точке P_n равно значению φ в точке $P_s(\varphi_n - \varphi_s)$ и

$$P_0P_s = \frac{P_0P_n}{\cos(\mathbf{s}, \mathbf{n})}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_0 = \lim_{P_0P_s\to 0}\frac{\varphi_s - \varphi_0}{P_0P_s} =$$

$$= \cos(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \lim_{P_0P_n\to 0}\frac{\varphi_n - \varphi_0}{P_0P_n} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_0 \cos(\mathbf{s}, \mathbf{n}).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos(\mathbf{s}, \mathbf{n}). \qquad (2^*)$$

Вектор, численно равный $\partial\varphi/\partial n$ и направленный по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания φ, носит название *градиента скаляра* φ:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathbf{n}. \qquad (3^*)$$

Поэтому уравнение (2*) может быть записано так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = |\operatorname{grad} \varphi| \cdot \cos(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = \operatorname{grad}_s \varphi. \qquad (4^*)$$

Стало быть, производная φ по направлению $\mathbf{s}$ равна проекции вектора градиента φ на направление $\mathbf{s}$. Если, в частности, ввести систему декартовых координат x, y, z, оси которой направлены параллельно единичным векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, то, согласно уравнению (4*), получим

$$\operatorname{grad}_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \operatorname{grad}_y \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \operatorname{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \qquad (5^*)$$

т. е.

$$\operatorname{grad} \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$
$$|\operatorname{grad} \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}. \qquad (6^*)$$

Из уравнения (4*) следует, как это, впрочем, и непосредственно явствует из рис. 95, что направление градиента $\mathbf{n}$ есть направление наиболее быстрого возрастания скаляра φ, а направление $(-\mathbf{n})$ есть направление наиболее быстрого убывания φ. В направлениях же, перпендикулярных к $\mathbf{n}$, т. е. касательных к поверхности уровня, значение φ вовсе не изменяется $(\partial\varphi/\partial s = 0)$.

Чтобы наглядно изобразить зависимость значения производных φ от направления, проведем из данной точки P_0 два равных и противоположных вектора $\operatorname{grad} \varphi$ и $-\operatorname{grad} \varphi$ и опишем вокруг каждого из них, как вокруг диаметра, шаровые поверхности S и S' (рис. 96). Тогда абсолютная величина производной $\partial\varphi/\partial s$ в точке P_0 по произвольному направлению $\mathbf{s}$ изобразится отрезком P_0P_s луча, проведенного из P_0 в направлении $\mathbf{s}$, ибо угол P_0P_sN равен 90°, и

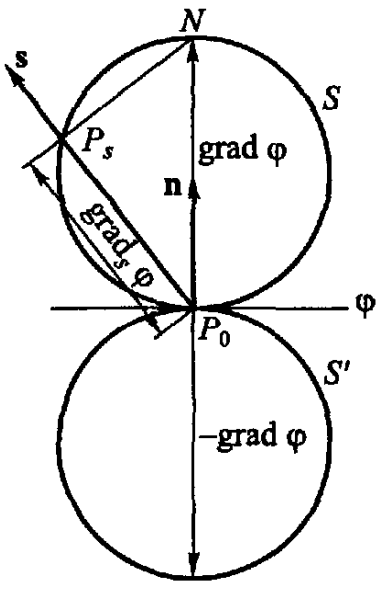

Рис. 96

$$P_0P_s = P_0N \cos(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \cos(\mathbf{s}, \mathbf{n}).$$

Аналогичное соотношение справедливо и для того случая, когда $\mathbf{s}$ направлено в сторону шаровой поверхности S'. Поверхность, касательная к сферам S и S' в точке P_0, есть, очевидно, поверхность уровня.

4. Итак, если известно поле скаляра φ, то в каждой точке этого поля можно определить вектор $\operatorname{grad} \varphi$, перпендикулярный поверхностям уровня этого скаляра. Если провести систему *ортогональных траекторий* поверхностей уровня, т. е. систему линий, перпендикулярных этим поверхностям (на рис. 94 эти линии обозначены штриховыми), то в каждой точке поля *направление*

градиента будет совпадать с направлением этих линий. Поэтому ортогональные траектории поверхностей уровня носят название *линий градиента.*

Если проводить поверхности уровня так, чтобы значение φ на последовательных поверхностях возрастало в арифметической прогрессии, т. е. равнялось бы φ_0, $\varphi_0 \pm \Delta\varphi$, $\varphi_0 \pm 2\Delta\varphi$ и т. д. (см. рис. 94), то расстояния смежных поверхностей уровня при достаточно малом $\Delta\varphi$ будут обратно пропорциональны значениям градиента. Действительно, если измеренное по нормали расстояние между смежными поверхностями уровня обозначить через Δn, то из приближенного соотношения

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Delta n = \operatorname{grad}\varphi \Delta n$$

при постоянном $\Delta\varphi$ следует

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\text{const}}{\Delta n}.$$

Поэтому при указанном способе черчения поверхностей уровня густота их расположения дает приближенное представление о числовом значении градиента.

Заметим также, что если скаляр φ выражен в функции от другого скаляра ψ, являющегося функцией точки $[\varphi = f(\psi)]$, то при любом выборе направления дифференцирования $\mathbf{s}$

$$\operatorname{grad}_s\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\operatorname{grad}_s\psi,$$

так как

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi(\psi)}{\partial\psi}\operatorname{grad}\psi, \qquad (7^*)$$

что следует из формулы обычного дифференцирования функции от функции.

Пример 1. *Градиент числового значения радиуса-вектора* $\mathbf{R}$. Прежде всего заметим, что числовое значение радиуса-вектора $\mathbf{R}$ есть скалярная функция положения *двух точек*: начальной точки радиуса-вектора O и его конечной точки P (рис. 97). Мы будем называть первую из этих точек *точкой истока*, а вторую — *точкой наблюдения*, ибо часто приходится рассматривать радиусы-векторы, проведенные из истоков поля (например, электрических зарядов) в ту «точку наблюдения», в которой определяется значение потенциала или напряженности поля.

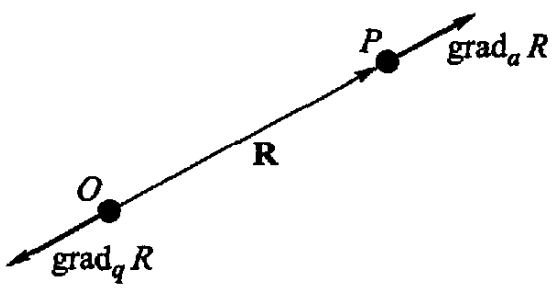

Рис. 97

При определении значения $\operatorname{grad} R$ в зависимости от условий задачи необходимо различать два случая: 1) точка истока O фиксирована, и $\mathbf{R}$ рассматривается как функция положения точки

наблюдения P, и 2) точка P фиксирована, и $\mathbf{R}$ рассматривается как функция положения точки истока O. Значение $\operatorname{grad} R$, соответствующее первому случаю, мы будем обозначать через $\operatorname{grad}_a R$, а соответствующее второму — через $\operatorname{grad}_q R$.

Определим сначала $\operatorname{grad}_a R$, т е. предположим, что точка истока O фиксирована. Направление $\operatorname{grad}_a R$, т. е. направление наиболее быстрого возрастания расстояния R при возможных перемещениях точки P, совпадает, очевидно, с направлением радиуса-вектора $\mathbf{R}$ из O в P. Числовое же значение производной R по этому направлению, очевидно, равно единице, ибо при перемещении точки P по направлению $\mathbf{R}$ на отрезок ds расстояние R возрастает на ту же величину ds Стало быть, $\operatorname{grad}_a R$ есть единичный вектор, направленный по $\mathbf{R}$, т. е.

$$\operatorname{grad}_a R = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Что же касается $\operatorname{grad}_q R$, то он должен быть направлен *обратно* $\mathbf{R}$, ибо расстояние R *возрастает* наиболее быстро при перемещении точки O в противоположную от P сторону (см. рис. 97). Абсолютная же величина $\operatorname{grad}_q R$, очевидно, тоже равна единице, так что

$$\operatorname{grad}_q R = -\frac{\mathbf{R}}{R} = -\operatorname{grad}_a R. \qquad (8^*)$$

Определив, таким образом, $\operatorname{grad} R$, мы можем с помощью (7*) определить градиент любой скалярной функции $f(R)$ от числового значения R:

$$\operatorname{grad} f(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R} \operatorname{grad} R; \qquad (9^*)$$

абсолютная величина этого вектора равна

$$|\operatorname{grad} f(R)| = \left|\frac{\partial f(R)}{\partial R}\right|.$$

В частности,

$$\operatorname{grad}_q\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\operatorname{grad}_a\left(\frac{1}{R}\right). \qquad (10^*)$$

Предоставляем читателю в виде упражнения доказать формулу (8*) путем непосредственного вычисления слагающих $\operatorname{grad} R$ в декартовых координатах, выразив предварительно R в функции координат x, y, z и x', y', z' точек O и P.

Пример 2. Показать, что если $\mathbf{b}$ есть постоянный по величине и направлению вектор, то

$$\operatorname{grad}_a(\mathbf{bR}) = \mathbf{b} \qquad (b = \text{const}). \qquad (11^*)$$

Вектор $\mathbf{R}$ имеет слагающие $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$; поэтому $\mathbf{bR} = b_x(x' - x) + b_y(y' - y) + b_z(z' - z)$. Слагающая по оси вектора $\operatorname{grad}_a(\mathbf{bR})$ равна $\frac{\partial}{\partial x'}(\mathbf{bR}) = b_x$; две другие соответственно равны b_y и b_z, откуда и следует формула (11*).

§ 3. Поток вектора через поверхность

Если задано поле произвольного, но дифференцируемого скаляра $\varphi(\mathbf{R})$, то тем самым задано и поле производных этого скаляра по произвольному направлению. Инвариантной, т. е. не зависящей от выбора системы координат характеристикой этого поля производных является, как мы видели, поле вектора $\operatorname{grad}\varphi$. Нам предстоит теперь определить инвариантные характеристики поля пространственных производных произвольного вектора $\mathbf{a}(\mathbf{R})$. К этим характеристикам, естественно, приводит рассмотрение поверхностных и криволинейных интегралов вектора $\mathbf{a}$. Мы начнем с исследования поверхностных интегралов.

В поле произвольного вектора выделим мысленно бесконечно малую плоскую площадку dS, т. е. площадку столь малую, что во всех ее точках вектор $\mathbf{a}$ с заданной степенью точности остается постоянным по величине и направлению. Проведем нормаль к этой площадке и условимся одно из направлений этой нормали $\mathbf{n}$ считать положительным, или внешним, а другое — отрицательным, или внутренним. Если задано направление обхода контура площадки, то направление положительной нормали мы будем выбирать так, чтобы нормаль эта образовала вместе с контуром *правовинтовую* систему Это значит, что при повороте ручки буравчика правой нарезки по направлению заданного обхода контура острие буравчика пойдет по *положительной* нормали (рис. 98). Обратно, если задано направление внешней нормали, то мы будем соответственным образом выбирать направление положительного обхода контура площадки.

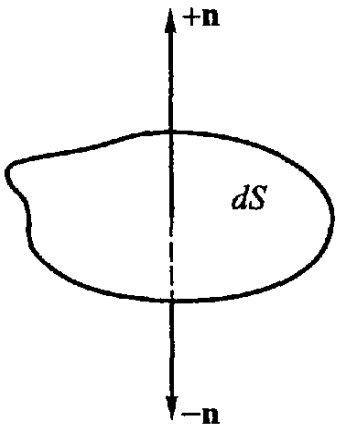

Рис 98

Наконец, если направление обхода контура и направление нормали к его плоскости заданы независимо друг от друга, то мы будем для краткости говорить, что направление обхода и направление нормали составляют *правовинтовую систему*, если они удовлетворяют упомянутому условию, и *левовинтовую* систему, если они ему не удовлетворяют.

Направление нормали мы будем характеризовать совпадающим с ней единичным вектором $\mathbf{n}$ $(n = 1)$.

Потоком вектора $\mathbf{a}$ через бесконечно малую площадку dS называется величина

$$dN = \mathbf{an}\,dS = a\cos(\mathbf{a}, \mathbf{n})\,dS = a_n\,dS, \qquad (12^*)$$

где a — значение вектора на площадке dS, а a_n — слагающая его по направлению $\mathbf{n}$ Площадка dS выбрана нами бесконечно малой именно для того, чтобы вектор $\mathbf{a}$ имел на этой площадке одно определенное значение.

Чтобы определить поток вектора через поверхность конечных размеров, нужно разбить ее на бесконечно малые площадки dS так, чтобы не только вектор $\mathbf{a}$ оставался постоянным на каждой площадке, но чтобы и самые площадки могли считаться плоскими (рис. 99). Одну из сторон поверхности S назовем внутренней, а другую — внешней и выберем соответственным образом направление внешних нормалей к каждому из элементов dS. Потоком N вектора $\mathbf{a}$ через поверхность S называется алгебраическая сумма потоков $a_n\,dS$ через отдельные элементы этой поверхности. Это суммирование тождественно с операцией нахождения определенного интеграла:

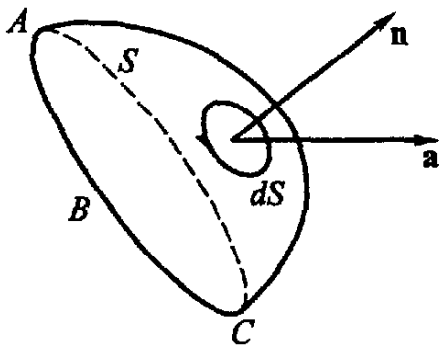

Рис. 99

$$N = \iint\limits_S a_n\,dS,$$

и называется *интегрированием по поверхности* S. Оно обозначается двойным интегралом потому, что поверхность имеет два измерения. Однако для упрощения записи мы в этой книге обозначали двукратные интегралы, как и интегралы однократные, одним-единственным знаком интеграла:

$$N = \int\limits_S a_n\,dS. \qquad (13^*)$$

Напомним, что во всех поверхностных (и только в поверхностных) интегралах мы обозначали элемент интегрирования через dS.

Данное величине N название потока вектора взято из гидродинамики. В гидродинамике изучается векторное поле скорости жидкости: в каждый данный момент с каждой точкой заполненного жидкостью пространства связано определенное значение вектора скорости $\mathbf{v}$, а именно, то значение этой скорости, которым обладает находящийся в этой точке элемент жидкости. Поток вектора скорости жидкости через элемент поверхности dS

$$dN = v_n\,dS$$

есть не что иное, как объем жидкости, протекающий через этот элемент за единицу времени в направлении внешней нормали к dS. Действительно, за единицу времени каждый элемент жидкости переместится на расстояние $\mathbf{v}$; стало быть, через площадку dS пройдут все те и только те частицы жидкости, которые в начале рассматриваемого промежутка времени занимали цилиндрический объем с основанием dS и образующими $\mathbf{v}$ [1]) (рис. 100). Объем этого цилиндра равен $v_n\,dS$, если $v_n > 0$.

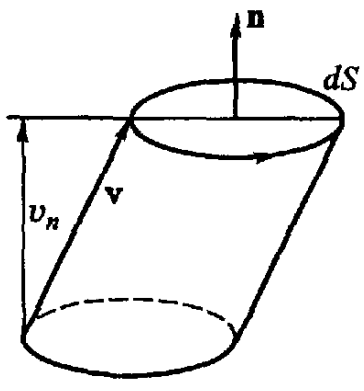

Рис. 100

[1]) Для простоты предполагаем, что скорость $\mathbf{v}$ не зависит от времени и постоянна на всем протяжении этого цилиндра. В противном случае указанные рассуждения нужно применить не к единице времени, а к элементу времени dt, тогда поток через площадку dS равен $v_n\,dS\,dt$.

Если векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$ образуют тупой угол, то $v_n < 0$, и поток жидкости отрицателен. Это значит, что жидкость протекает через dS в направлении, обратном внешней нормали $\mathbf{n}$.

Поток жидкости через конечную поверхность S равен, очевидно, потоку вектора скорости $\mathbf{v}$ через эту поверхность:

$$N = \int_S v_n \, dS.$$

Часто приходится вычислять поток вектора через замкнутые поверхности (поверхность шара, куба и т. д.). При интегрировании по *замкнутой* поверхности мы будем отмечать это обстоятельство кружком у знака интеграла, так что, например, поток жидкости через замкнутую поверхность S запишется следующим образом:

$$N = \oint_S v_n \, dS.$$

Очевидно, что поток этот равен количеству жидкости, вытекающей в единицу времени из объема, ограниченного замкнутой поверхностью S. Если $N < 0$, то это значит, что внутрь поверхности втекает больше жидкости, чем вытекает из нее.

§ 4. Теорема Гаусса. Дивергенция

1. Поверхностный интеграл $\oint a_n \, dS$ можно преобразовать в объемный; в этом заключается содержание одной из важнейших теорем векторного анализа — *теоремы Гаусса*.

Рассмотрим сначала поток dN произвольного, но дифференцируемого вектора $\mathbf{a}$ через поверхность бесконечно малого параллелепипеда и выберем для удобства вычислений направление осей координат x, y, z так, чтобы они совпадали с ребрами этого параллелепипеда dx, dy, dz (рис. 101). Интеграл

$$dN = \oint a_n \, dS$$

сводится в этом случае к сумме шести интегралов по каждой из граней параллелепипеда. Воспользовавшись известной из интегрального исчисления теоремой о среднем, можно каждый из этих шести интегралов представить как произведение площади грани на некоторое среднее значение нормальной слагающей вектора $\mathbf{a}$ на данной грани.

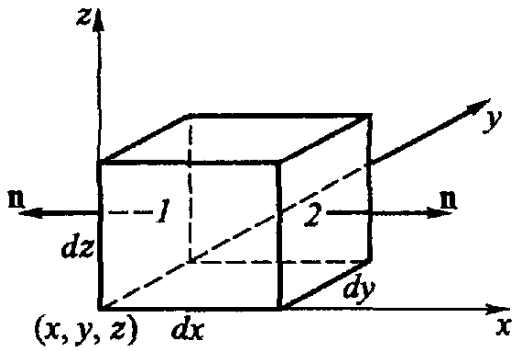

Рис. 101

Рассмотрим сначала поток вектора $\mathbf{a}$ через две параллельные грани *1* и *2*, перпендикулярные оси x. Поток через переднюю

грань *2* равен

$$a_{2n}(x+dx,\,\overline{y},\,\overline{z})\,dS = a_{2x}(x+dx,\,\overline{y},\,\overline{z})\,dy\,dz,$$

где $\overline{y}$ и $\overline{z}$ — некоторые средние значения координат y и z на грани *2* и a_2 — значение вектора $\mathbf{a}$ на грани *2*; поток через заднюю грань *1* равен

$$a_{1n}\,dS = -a_{1x}\,dy\,dz \qquad (a_{1n} = a_{1n}(x,\,\overline{y},\,\overline{z})),$$

где a_1 — значение вектора $\mathbf{a}$ на грани *1*, ибо внешняя нормаль к этой грани направлена противоположно оси x. Стало быть, общий поток через грани *1* и *2* равен

$$(a_{2x} - a_{1x})\,dy\,dz.$$

Разность $a_{2x} - a_{1x}$ есть приращение слагающей вектора a_x при изменении координаты x на расстояние dx между гранями *1* и *2*. С точностью до бесконечно малых второго порядка приращение это равно

$$a_{2x}(x+dx,\,y,\,z) - a_{1x}(x,\,y,\,z) = \frac{\partial a_x}{\partial x}\,dx,$$

где ввиду бесконечной малости параллелепипеда под $\partial a_x/\partial x$ можно понимать значение этой производной в любой точке параллелепипеда. Таким образом, общий поток через обе грани, перпендикулярные к оси x, равен

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Для потоков через пары граней, перпендикулярных осям y и z, получим аналогично:

$$\frac{\partial a_y}{\partial y}\,dy\,dx\,dz \quad \text{и} \quad \frac{\partial a_z}{\partial z}\,dz\,dx\,dy.$$

Складывая полученные выражения, получим общий поток вектора $\mathbf{a}$ через все шесть граней элементарного параллелепипеда:

$$dN = \oint a_n\,dS = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz. \qquad (14^*)$$

Стоящую в скобках сумму производных вектора $\mathbf{a}$ по осям координат принято для краткости обозначать символом $\operatorname{div}\mathbf{a}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \qquad (15^*)$$

(читай «дивергенция $\mathbf{a}$», смысл слова см. дальше). Если, кроме того, ввести для бесконечно малого элемента объема обозначение dV:

$$dV = dx\,dy\,dz,$$

то выражение потока dN примет вид

$$dN = \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV. \qquad (16^*)$$

2. Эту формулу, выражающую поток вектора $\mathbf{a}$ через поверхность *бесконечно малого* параллелепипеда, нетрудно обобщить для поверхности произвольной формы и размеров. Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность S. Разобьем ограниченный ею объем V системой взаимно перпендикулярных плоскостей на совокупность бесконечно малых кубических элементов. Конечно, крайние, смежные с поверхностью S, элементы объема, вообще говоря, не будут иметь кубической формы; однако путем дальнейшего дробления их можно достигнуть того, чтобы грани крайних кубиков с любой степенью точности совпадали с заданной поверхностью S. Вычислим с помощью уравнения (16*) поток вектора $\mathbf{a}$ через поверхность каждого кубика, лежащего внутри S, и сложим полученные выражения:

$$\sum dN = \sum \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = \iiint\limits_V \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV.$$

В этом уравнении тройной интеграл означает, что суммирование подынтегрального выражения должно быть произведено по всем элементам трехмерного объема V, заключенного внутри поверхности S. Однако на протяжении всей этой книги мы обозначали *интегралы любой кратности одним-единственным знаком* $\int$; различение же интегралов разной кратности достигалось различным обозначением элементов интегрирования:

элемент объема (трехкратного интеграла) обозначался через dV,

элемент поверхности (двукратного интеграла) через dS,

элемент линии (одинарного интеграла) через ds.

Грани всех элементарных кубиков, составляющих в совокупности объем V, могут быть разделены на два класса — грани внешние, совпадающие с элементами поверхности S, и грани внутренние, отграничивающие смежные кубики друг от друга. Очевидно, что в сумму $\sum dN$ поток вектора $\mathbf{a}$ через каждую *внутреннюю грань* войдет дважды: при подсчете потока через поверхность кубика, лежащего по одну сторону от этой грани, и при подсчете потока через поверхность кубика, лежащего по другую сторону от нее. Так как нормаль к грани, внешняя по отношению к первому кубику, противоположна нормали к той же грани, внешней по отношению ко второму кубику, то оба потока через эту грань будут иметь противоположные знаки. Следовательно, все члены суммы $\sum dN$, относящиеся ко внутренним граням, сократятся, и сумма эта сведется к сумме потоков вектора $\mathbf{a}$ через одни лишь внешние грани кубиков, совпадающие

с элементами поверхности S [1]). Таким образом, $\sum dN$ оказывается равной потоку N вектора $\mathbf{a}$ через заданную поверхность S, и, стало быть,

$$N = \oint_S a_n\, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV. \qquad (17^*)$$

Это выражение представляет собой *теорему Гаусса*: поток вектора $\mathbf{a}$, являющегося непрерывной функцией точки, через произвольную замкнутую поверхность S равен интегралу дивергенции этого вектора по объему V, ограниченному этой поверхностью.

3. Если поверхность S столь мала, что во всех лежащих внутри нее точках $\operatorname{div} \mathbf{a}$ можно считать величиной постоянной, то в уравнении (17*) $\operatorname{div} \mathbf{a}$ можно вынести за знак интеграла. Стало быть, поток dN через бесконечно малую замкнутую поверхность S *произвольной* формы выражается той же формулой (16*):

$$dN = \oint a_n\, dS = \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV,$$

как и поток через поверхность элементарного параллелепипеда. Так как эта формула справедлива лишь в предельном случае бесконечно малой поверхности, то ее правильнее записать в следующей форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint a_n\, dS}{\Delta V}. \qquad (18^*)$$

Правильнее всего считать эту формулу *определением* понятия *дивергенции*: дивергенция вектора $\mathbf{a}$ в данной точке поля есть предел, к которому стремится отношение потока вектора $\mathbf{a}$ через произвольную, окружающую эту точку, поверхность к ограниченному этой поверхностью объему ΔV (при $\Delta V \to 0$). Из этого определения дивергенции следует, что значение ее вовсе не зависит от выбора системы координат, т. е. что дивергенция вектора есть истинный скаляр. Исходя из (18*) и воспользовавшись (16*), мы в частном случае декартовых координат, очевидно, вновь придем к (14*).

Отметим в заключение, что в гидродинамике дивергенция скорости жидкости $\mathbf{v}$ имеет непосредственное физическое значение. Действительно, в каждой точке жидкости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint v_n\, dS}{dV}$$

равна рассчитанному на единицу объема количеству жидкости, вытекающей из элемента объема dV, окружающего рассматриваемую точку. Название «дивергенция», что значит по-латыни

[1]) Утверждение, что поток через внешние грани кубиков совпадает в пределе с потоком через поверхность S, нуждается, в сущности, в более строгом математическом доказательстве, на котором мы останавливаться не будем

расхождение или *расходимость*, было избрано для этой величины именно потому, что жидкость растекается или расходится из тех и только тех точек или участков занимаемого ею пространства, в которых $\operatorname{div}\mathbf{v} > 0$. Очевидно, что в этих точках должны быть расположены источники жидкости. По аналогии, те точки поля произвольного вектора $\mathbf{a}$, в которых $\operatorname{div}\mathbf{a} \neq 0$, принято называть *истоками* этого поля. Числовое же значение $\operatorname{div}\mathbf{a}$ называется *силой*, или *обильностью*, *истоков* поля; в зависимости от знака дивергенции сила истоков может быть как положительной, так и отрицательной. Иногда отрицательным истокам поля дают название *стоков* поля. Векторные поля, у которых $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$, называются свободными от источников, или *соленоидальными*.

Пример 1. Определить дивергенцию вектора $\mathbf{a}$, который в каждой точке поля направлен параллельно или антипараллельно радиусу-вектору $\mathbf{R}$, проведенному в эту точку из точки O

Применим с этой целью формулу (18*) к элементу объема dV, вырезаемому из шарового слоя, ограниченного сферами радиуса R и $R + dR$, конусом с центром в O, который пересекается с этими сферами по дугам меридианов α и $\alpha + d\alpha$ и дугам параллельных кругов ϑ и $\vartheta + d\vartheta$ (рис. 102). Так как, по условию, вектор $\mathbf{a}$ параллелен $\mathbf{R}$, то поток его через боковую (образованную конусом) поверхность объема dV равен нулю. Далее, так как вырезаемый конусом элемент dS поверхности сферы радиуса R равен

$$dS = R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\alpha,$$

то поток вектора $\mathbf{a}$ через него равен

$$a_n \, dS = -a_R R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\alpha,$$

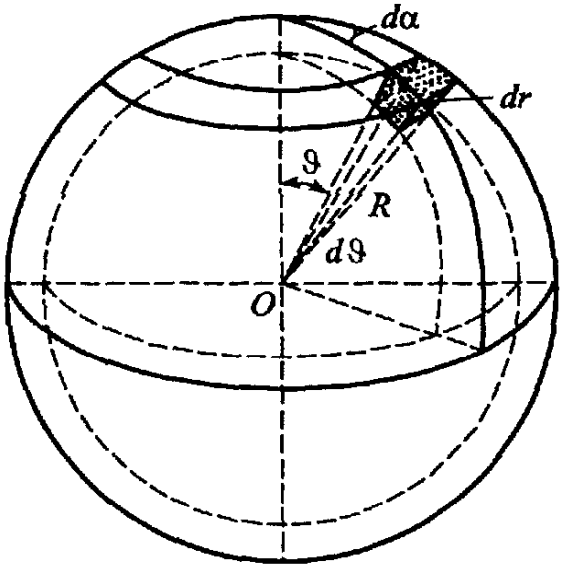

Рис 102

где a_R — слагающая $\mathbf{a}$ по направлению $\mathbf{R}$ ($a_R = \pm a$), ибо внешняя нормаль к dS направлена обратно радиусу-вектору $\mathbf{R}$. Поток же через элемент поверхности сферы радиуса $R + dR$, вплоть до величины второго порядка малости, равен, очевидно:

$$a_R R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\alpha + \frac{\partial}{\partial R}\left(a_R R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\alpha\right) dR.$$

Таким образом, полный поток равен

$$\oint a_n \, dS = \frac{\partial}{\partial R}\left(a_R R^2\right) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\alpha \, dR.$$

С другой стороны,

$$dV = dS \cdot dR = R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\alpha \, dR,$$

так что

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\lim_{dV\to 0}\frac{\oint a_n\,dS}{dV}=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2a_R)=\frac{\partial a_R}{\partial R}+\frac{2}{R}a_R. \qquad (19^*)$$

Предоставляем читателю показать, что для произвольного вектора $\mathbf{a}$ выражение дивергенции в сферических координатах приобретает вид

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2a_R)+\frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta a_\vartheta)+\frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\partial a_\alpha}{\partial\alpha}, \qquad (20^*)$$

где a_R, a_ϑ, a_α — слагающие вектора по направлению возрастания координат R, ϑ, α.

Пример 2. Определить дивергенцию градиента произвольной функции $f(R)$.

Будем рассматривать радиус-вектор $\mathbf{R}$ как функцию точки наблюдения (см. с. 589). Обозначая вектор $\operatorname{grad}_a f(R)$ буквой $\mathbf{a}$, получаем на основании (8*) и (9*):

$$\mathbf{a}=\operatorname{grad}_a f(R)=\frac{\partial f}{\partial R}\frac{\mathbf{R}}{R},\quad a_R=\frac{\partial f}{\partial R}.$$

Так как остальные компоненты $\mathbf{a}$ равны нулю, то на основании (19*)

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}f(R)=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial f}{\partial R}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial f}{\partial R}. \qquad (21^*)$$

Дивергенция $\operatorname{grad}_q f(R)$ имеет то же значение, ибо, как можно убедиться вычислением в декартовых координатах,

$$\operatorname{div}_q\operatorname{grad}_q(R)=-\operatorname{div}_a[-\operatorname{grad}_a f(R)]=\operatorname{div}_a\operatorname{grad}_a f(R).$$

Пример 3. Определить выражение дивергенции произвольного вектора $\mathbf{a}$ в цилиндрической системе координат z, r, α (рис. 103).

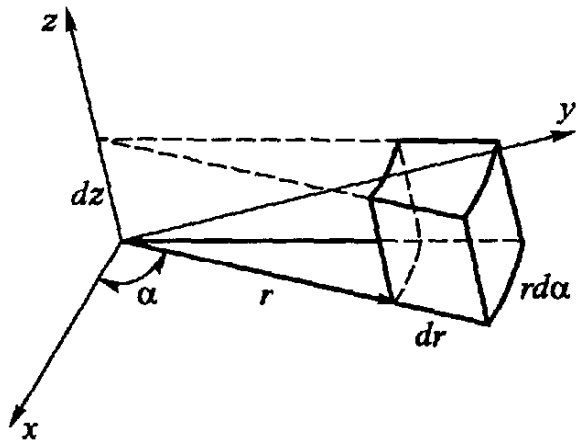

Рис. 103

Слагающие вектора $\mathbf{a}$ по направлению *возрастания* координат z, r, α обозначаются соответственно через a_z, a_r, a_α. Применим формулу (18*) к объему dV, ограниченному двумя цилиндрическими поверхностями радиусов r и $r+dr$, двумя меридиональными плоскостями $\alpha=\alpha_1$ и $\alpha=\alpha_1+d\alpha$ и двумя плоскостями, перпендикулярными оси Z: $z=z_1$ и $z=z_1+dz$ (рис. 103). Поток вектора $\mathbf{a}$ через элемент цилиндрической поверхности радиуса r равен $-a_r r\,d\alpha\,dz$; для цилиндрической поверхности радиуса $r+dr$

он равен

$$a_r r\,d\alpha\,dz + \frac{\partial}{\partial r}(a_r r\,d\alpha\,dz)\,dr$$

(с точностью до бесконечно малых второго порядка), а сумма потоков через обе цилиндрические поверхности равна

$$\frac{\partial}{\partial r}(r a_r)\,d\alpha\,dz\,dr.$$

Вычисляя аналогичным способом поток вектора через остальные элементы поверхности объема dV, получаем

$$\oint a_n\,dS = \left\{\frac{\partial}{\partial r}(r a_r) + r\frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha}\right\} dr\,dz\,d\alpha.$$

Так как $dV = r\,d\alpha\,dz\,dr$, то формула (18*) приводит к результату:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r a_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha}. \qquad (22^*)$$

§ 5. Циркуляция вектора. Ротор вектора. Теорема Стокса

Преобразование интеграла вектора по замкнутой поверхности в интеграл по объему привело нас к понятию дивергенции вектора. Рассмотрим теперь интеграл вектора по замкнутой кривой.

Пусть в поле вектора $\mathbf{a}(\mathbf{R})$ задана некоторая кривая L и вместе с тем задано, какое из двух возможных направлений движения вдоль этой кривой считается положительным. Разбиваем кривую L на бесконечно малые элементы $d\mathbf{s}$, направление которых совпадает с направлением положительного движения вдоль линии, и умножаем каждый элемент $d\mathbf{s}$ скалярно на значение вектора $\mathbf{a}$ в соответствующей точке поля. Предел суммы этих произведений $\mathbf{a}\,d\mathbf{s} = a_s\,ds$ при $ds \to 0$, распространенный на все элементы кривой, называется *линейным интегралом* вектора $\mathbf{a}$ вдоль кривой L:

$$\int_L \mathbf{a}\,d\mathbf{s} = \int_L a_s\,ds.$$

Если кривая L *замкнута*, что отмечается кружком у знака интеграла, то линейный интеграл вектора $\mathbf{a}$ вдоль нее называется *циркуляцией* $\mathbf{a}$ вдоль L:

$$C(\mathbf{a}) = \oint_L \mathbf{a}\,d\mathbf{s} = \oint_L a_s\,ds. \qquad (23^*)$$

Предположим, что контур L представляет собой контур плоского прямоугольника $ABCD$, и выберем оси x и y декартовых

координат так, чтобы они были параллельны сторонам этого прямоугольника и пересекались в его центре (рис. 104). Пусть стороны прямоугольника равны соответственно Δx и Δy. Если выбрать направление положительного обхода контура так, чтобы соответствующая положительная нормаль к площади прямоугольника была направлена по оси z (рис. 104), то

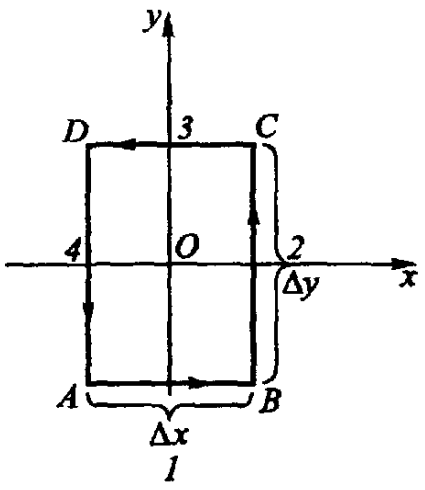

Рис. 104

$$C = \oint a_s\, ds =$$

$$= \int_A^B a_x\, dx + \int_B^C a_y\, dy + \int_C^D a_x\, dx + \int_D^A a_y\, dy.$$

Воспользовавшись известной из интегрального исчисления теоремой о среднем значении, получим (при $\mathbf{n} \parallel$ оси z):

$$C = \oint a_s\, ds = a'_x \Delta x + a''_y \Delta y - a'''_x \Delta x - a''''_y \Delta y,$$

где a'_x, a''_y и т. д. суть средние значения слагающих a_x и a_y на первой, второй и т. д. сторонах прямоугольника; отрицательный знак, например, последнего члена суммы объясняется тем, что интегрирование по стороне AD производится в направлении убывания координаты y.

Будем теперь стремить длину сторон прямоугольника к нулю. Тогда с точностью до величин второго порядка малости среднее значение слагающей a_y на отрезке BC, отстоящем от отрезка AD на расстоянии Δx по направлению оси x, будет отличаться от значения a_y на отрезке AD на величину $\frac{\partial a_y}{\partial x} \Delta x$:

$$a''_y = a''''_y + \frac{\partial a_y}{\partial x} \Delta x.$$

Соответственно

$$a'''_x = a'_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} \Delta y,$$

ибо CD отстоит от AB на расстоянии Δy по направлению оси y. При этом в пределе при бесконечно малых размерах прямоугольника мы можем понимать под $\partial a_y/\partial x$ и $\partial a_x/\partial y$ значения этих величин в центре O прямоугольника. Внося эти выражения в предшествующее равенство, получим (при $\mathbf{n} \parallel$ оси z):

$$dC = \oint a_s\, ds = (a''_y - a''''_y)\Delta y - (a''_x - a'_x)\Delta x =$$

$$= \frac{\partial a_y}{\partial x} \Delta x \Delta y - \frac{\partial a_x}{\partial y} \Delta x \Delta y,$$

где мы заменили C через dC, чтобы отметить, что соотношение это справедливо лишь для бесконечно малого прямоугольника [1]. Обозначая, наконец, площадь прямоугольника $\Delta x \Delta y$ через dS, получим окончательно:

$$\text{при } \mathbf{n} \parallel \text{оси } z \quad dC = \oint a_s\, ds = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dS. \tag{24*}$$

Так как оси x, y, z образуют правовинтовую систему, то, совершив круговую перестановку индексов x, y, z, мы получим, очевидно, циркуляцию вектора $\mathbf{a}$ по контуру бесконечно малого прямоугольника, положительная нормаль к которому направлена по оси x или по оси y:

$$\begin{aligned} &\text{при } \mathbf{n} \parallel \text{оси } x \quad dC = \oint a_s\, ds = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) dS, \\ &\text{при } \mathbf{n} \parallel \text{оси } y \quad dC = \oint a_s\, ds = \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) dS. \end{aligned} \tag{24a*}$$

Фигурирующие в формулах (24*) и (24а*) комбинации производных слагающих вектора $\mathbf{a}$ являются, как мы покажем, компонентами некоторого вектора, который принято обозначать через $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ или $\operatorname{curl}\mathbf{a}$ (читай: ротор $\mathbf{a}$ или кёрл $\mathbf{a}$, или вихрь $\mathbf{a}$) [2]:

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_y \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \operatorname{rot}_z \mathbf{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \tag{25*}$$

Вектор $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ может быть назван векторной пространственной производной вектора $\mathbf{a}$ (в отличие от его скалярной пространственной производной $\operatorname{div}\mathbf{a}$).

С помощью обозначений (25*) выражения (24*) могут быть записаны следующим образом:

$$dC = \oint_L a_s\, ds = \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\, dS, \tag{26*}$$

---

[1]) Конечно, dC вовсе не является полным дифференциалом от C.

[2]) Заметим, что $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ может быть представлен в форме следующего символического определителя:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ суть единичные векторы по осям координат x, y, z. При вычислении этого определителя нужно, конечно, под произведениями типа $\dfrac{\partial}{\partial x} a_y$ понимать частную производную от a_y по x, т. е. $\dfrac{\partial a_y}{\partial x}$.

причем под $\mathbf{n}$ нужно понимать положительную нормаль к площадке dS, составляющую *правовинтовую* систему с направлением положительного обхода контура этой площадки. Полагая последовательно $\mathbf{n}$ параллельным осям x, y и z, получим из уравнений (26*) и (25*) уравнения (24*), (24а*).

Так как оси координат всегда можно выбрать так, чтобы одна из этих осей была перпендикулярна к площадке dS, то уравнение (26*) остается, очевидно, справедливым для циркуляции вектора $\mathbf{a}$ по контуру *произвольно* расположенного бесконечно малого прямоугольника [1]).

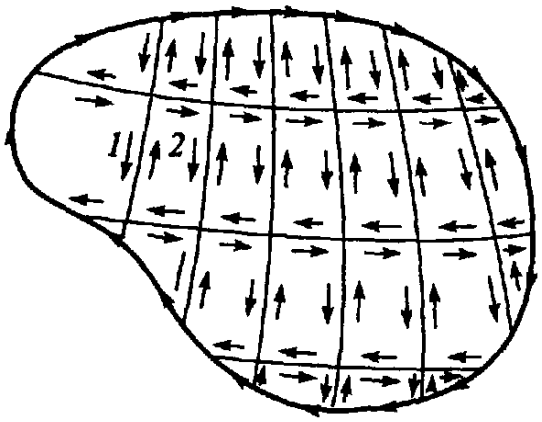

Рис. 105

Перейдем теперь к рассмотрению циркуляции вектора по контуру произвольной формы и размера. Проведем поверхность S так, чтобы она опиралась на контур L, т. е. чтобы этот контур являлся пограничным контуром поверхности S. Разобьем затем эту поверхность двумя взаимно перпендикулярными системами параллельных линий на совокупность бесконечно малых элементов (рис. 105), которые благодаря своей малости могут считаться плоскими. Применив к каждому из этих элементов уравнение (26*) и сложив полученные выражения, найдем

$$\sum dC = \sum \oint a_s\, ds = \sum \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\, dS = \int\limits_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\, dS,$$

где $\mathbf{n}$ есть внешняя нормаль к dS, причем внешняя сторона поверхности S должна быть выбрана в соответствии с направлением положительного обхода ее контура (*правовинтовая система*).

При интегрировании по контурам элементарных площадок каждая граница AB двух смежных площадок пройдется два раза и притом в противоположных направлениях; поэтому в сумме $\sum \oint a_s\, ds$ встретятся оба члена $\int\limits_A^B a_s\, ds$ и $\int\limits_B^A a_s\, ds$, в совокупности дающие нуль. Таким образом, $\sum \oint a_s\, ds$ сведется к сумме членов, относящихся к одним лишь наружным границам площадок, т. е. к интегралу вектора $\mathbf{a}$ по внешнему контуру L площади S, откуда

$$\sum dc = \sum \oint a_s\, ds = \oint\limits_L a_s\, ds = C,$$

[1]) Последнее умозаключение законно лишь в том случае, если $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ есть истинный вектор, инвариантный относительно преобразования координат. Это действительно имеет место (см. ниже).

где C означает циркуляцию вектора $\mathbf{a}$ по контуру L. Внося это выражение в предшествующее уравнение, получим

$$C = \oint_L a_s\, ds = \int_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\, dS. \qquad (27^*)$$

При выводе этой формулы мы не приняли во внимание, что наружные (прилегающие к контуру L) элементарные площадки, вообще говоря, не будут иметь прямоугольной формы, тогда как справедливость уравнения (26*) доказана нами лишь для площадок прямоугольных. Однако при неограниченном уменьшении размера прямоугольников ломаная линия, составленная из наружных сторон крайних прямоугольников, сколько угодно точно совпадает с контуром L площади S [1]). Основываясь на этом, можно придать выводу уравнения (27*) совершенно точную форму. Соответствующих рассуждений мы здесь приводить не будем.

Таким образом, единственное условие справедливости уравнения (27*) состоит в требовании непрерывности и дифференцируемости вектора $\mathbf{a}$ во всех точках поверхности S.

Уравнение это выражает собой так называемую *теорему Стокса*, которая гласит: *циркуляция произвольного вектора* $\mathbf{a}$ *по замкнутой кривой* L *равна потоку ротора этого вектора через поверхность* S, *опирающуюся на кривую* L.

Форма поверхности S при этом остается совершенно неопределенной. Стало быть, через любые две поверхности S_1 и S_2, если только они обладают одним и тем же контуром L, проходит *одинаковый* поток ротора любого непрерывного вектора $\mathbf{a}$, равный циркуляции этого вектора по общему контуру этих поверхностей.

Из уравнения (27*), между прочим, сразу следует, что

$$\oint \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\, dS = 0, \qquad (28^*)$$

так как в случае замкнутой поверхности S контур L стягивается в точку и $C = 0$ [2]).

---

[1]) Хотя, например, предел суммы длин наружных сторон прямоугольных площадок может быть не равен длине контура L.

[2]) Ввиду важности формулы (28*) приведем еще одно доказательство ее.

Проведем на поверхности S какую-нибудь замкнутую кривую L, которая разделит поверхность S на две части: S_1 и S_2. Применяя к каждой из этих частей формулу Стокса (27*), получим: $\oint_L a_s\, ds = \pm \int_{S_1} \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\, dS = \pm \int_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\, dS$, где $\mathbf{n}$ означает внешнюю нормаль к замкнутой поверхности S.

Знак последних двух членов определяется тем, составляет ли направление нормали $\mathbf{n}$ с направлением обхода контура L право- или левовинтовую систему. При любом выборе направления обхода эти два интеграла, как легко убедиться, будут иметь противоположные знаки, что и приводит к искомому результату.

Переходя от уравнения (27*) обратно к столь малому элементу поверхности dS, что его можно считать плоской площадкой, во всех точках которой $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ сохраняет постоянное значение, мы сможем вынести $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ за знак интеграла и написать: $dC = \oint a_s\,ds = \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\cdot dS$,что совпадает с уравнением (26*). Поскольку уравнение (27*) применимо к поверхности любой формы, постольку и формула (26*) также применима к бесконечно малым площадкам любой формы. Так как эта формула справедлива лишь в предельном случае бесконечно малой поверхности, то правильнее записать ее следующим образом:

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{dS\to 0} \frac{\oint a_s\,ds}{dS}. \qquad (29^*)$$

Таким образом, слагающая вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в данной точке поля P по данному направлению $\mathbf{n}$ равна пределу отношения циркуляции вектора $\mathbf{a}$ по контуру произвольной площадки dS, проходящей через P и перпендикулярной к $\mathbf{n}$, к поверхности этой площадки dS.

Отсюда явствует, что значение слагающей $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ вовсе не зависит от выбора системы координат, т. е. что $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ действительно является истинным вектором. Таким образом, инвариантность вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ может считаться доказанной.

В сущности это утверждение не вполне справедливо, ибо, во-первых, мы при выводе уравнений (26*) и (27*) уже воспользовались тем самым свойством инвариантности вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ относительно преобразования координат, которое мы хотим доказать: именно на эту инвариантность $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ мы ссылались, утверждая, что уравнение (26*) применимо к площадке *произвольного* направления (см. сноску на с. 602); во-вторых, мы опустили *строгое* доказательство применимости формулы (27*) [а стало быть, и формулы (26*)] к контуру произвольной формы. Справедливость этих положений может быть доказана путем непосредственного вычисления в декартовых координатах циркуляции вектора по контуру произвольной поверхности. Проще и правильнее, однако, считать *инвариантное* относительно преобразования координат соотношение (29*) *определением* понятия «ротор вектора $\mathbf{a}$». Исходя из этого определения, нетрудно, обратив порядок наших рассуждений, доказать все выведенные выше формулы.

В заключение, чтобы пояснить геометрический смысл ротора, рассмотрим вращение твердого тела с угловой скоростью ω. Вектор ω мы будем, как обычно, считать направленным по оси вращения и притом так, чтобы направление вращения составляло с вектором ω правовинтовую систему (правило буравчика). Выберем ось z так, чтобы она совпадала с осью вращения и была направлена по ω. Тогда линейная скорость $\mathbf{v}$ точки тела (x, y, z) будет численно равна $v = r\omega = \omega\sqrt{x^2+y^2}$, а слагающие ее по осям

координат будут равны (рис. 106):

$$v_x = -\frac{vy}{\sqrt{x^2+y^2}} = -y\omega, \quad v_y = \frac{vx}{\sqrt{x^2+y^2}} = x\omega,$$

$$v_z = 0.$$

Слагающие вектора $\operatorname{rot}\mathbf{v}$, согласно уравнению (25*), равны

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{v} = \operatorname{rot}_y \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{rot}_z \mathbf{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega,$$

откуда

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\omega. \tag{30*}$$

Таким образом, ротор линейной скорости точек твердого тела имеет одинаковое значение во всех точках тела и равен удвоенной угловой скорости его вращения. Соотношение (30*) остается справедливым и в том случае, если тело, помимо вращательного, находится также и в поступательном движении (ибо скорость поступательного движения одинакова во всех точках твердого тела, и ротор ее поэтому равен нулю). Наконец, в теории упругости доказывается, что уравнение (30*) остается справедливым не только для твердого, но и для произвольно деформирующегося тела (например, жидкости), причем в этом случае под ω нужно понимать угловую скорость вращения бесконечно малого элемента жидкости, находящегося в рассматриваемой точке пространства.

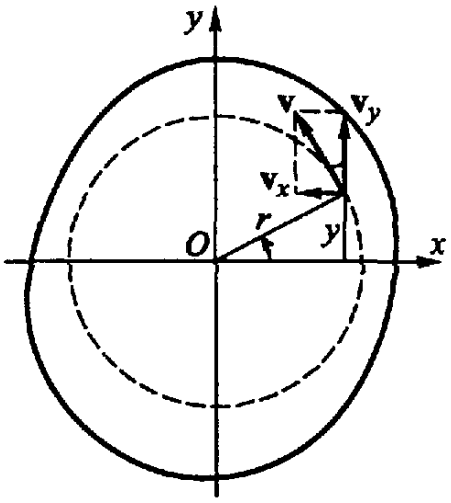

Рис. 106

Итак, $\operatorname{rot}\mathbf{v} \neq 0$ в тех и только тех точках тела, которые принадлежат элементам тела, находящимся во *вращательном* движении. Это обстоятельство в связи с соотношением (30*) и послужило поводом к тому, чтобы дать величине $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ название *ротора* (от латинского roto — вращаю) или *вихря* вектора $\mathbf{a}$.

Пример. Показать, что слагающие ротора произвольного вектора $\mathbf{a}$ в сферической системе координат R, ϑ и α выражаются следующим образом:

$$\operatorname{rot}_R \mathbf{a} = \frac{1}{R\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta \cdot a_\alpha) - \frac{\partial a_\vartheta}{\partial\alpha}\right\},$$

$$\operatorname{rot}_\vartheta \mathbf{a} = \frac{1}{R\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial a_R}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial R}(R\sin\vartheta a_\alpha)\right\}, \tag{31*}$$

$$\operatorname{rot}_\alpha \mathbf{a} = \frac{1}{R}\left\{\frac{\partial}{\partial R}(Ra_\vartheta) - \frac{\partial a_R}{\partial\vartheta}\right\}.$$

Чтобы найти, например, значение $\operatorname{rot}_R \mathbf{a}$, можно применить формулу (29*) к элементарной площадке, вырезаемой из произвольной шаровой поверхности $R = \text{const}$ двумя меридианами $\alpha = \alpha_0$ и $\alpha = \alpha_0 + d\alpha$ и двумя параллельными кругами $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_0 + d\vartheta$ (см. рис. 102). Вычисляя $\oint a_s\, ds$ при обходе контура этой площадки, составляющем правовинтовую систему с направлением $\mathbf{R}$, получим

$$\oint a_s\, ds = \{a_\alpha R\sin\vartheta\, d\alpha\}_{\vartheta=\vartheta_0+d\vartheta} - \{a_\vartheta R\, d\vartheta\}_{\alpha=\alpha_0+d\alpha} -$$

$$- \{a_\alpha R\sin\vartheta\, d\alpha\}_{\vartheta=\vartheta_0} + \{a_\vartheta R\, d\vartheta\}_{\alpha=\alpha_0},$$

или

$$\oint a_s\,ds = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\{a_\alpha R\sin\vartheta\,d\alpha\}\cdot d\vartheta - \frac{\partial}{\partial\alpha}\{a_\vartheta R\,d\vartheta\}\,d\alpha = \left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}(a_\alpha\sin\vartheta) - \frac{\partial a_\vartheta}{\partial\alpha}\right\} R\,d\vartheta\,d\alpha$$

Так как значение рассматриваемой площадки dS равно $r\,d\vartheta\cdot R\sin\vartheta\,d\alpha$, то из (29*) следует

$$\operatorname{rot}_R \mathbf{a} = \frac{1}{R\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}(a_\alpha\sin\vartheta) - \frac{\partial a_\vartheta}{\partial\alpha}\right\}$$

Аналогичным путем находятся и остальные слагающие ротора $\mathbf{a}$

Предоставляем читателю в виде упражнения показать, что слагающие ротора произвольного вектора $\mathbf{a}$ в цилиндрической системе координат r, α, z (см. рис. 103) выражаются следующим образом:

$$\operatorname{rot}_r \mathbf{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial z},\quad \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{a} = \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r},\quad \operatorname{rot}_z \mathbf{a} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(ra_\alpha) - \frac{\partial a_r}{\partial\alpha}\right\}. \tag{32*}$$

§ 6. Производная вектора по направлению

Скаляр $\operatorname{div}\mathbf{a}$ и вектор $\operatorname{rot}\mathbf{a}$, как уже отмечалось, могут быть названы соответственно скалярной и векторной пространственными производными вектора $\mathbf{a}$. Они имеют непосредственный геометрический смысл, что явствует из (18*) и (29*), и наряду с градиентом скаляра являются основными понятиями векторного анализа.

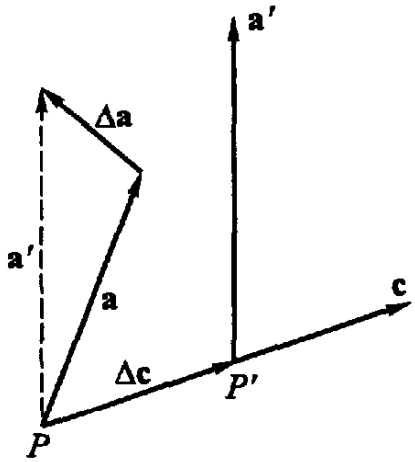

Рис. 107

Однако задания значений скаляра $\operatorname{div}\mathbf{a}$ и вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в данной точке недостаточно для определения в этой точке производной вектора $\mathbf{a}$ по произвольному направлению (тогда как производная скаляра φ по произвольному направлению однозначно определяется заданием вектора $\operatorname{grad}\varphi$).

Действительно, производная вектора $\mathbf{a}$ по произвольному направлению $\mathbf{c}$ может быть определена путем следующего геометрического построения. Пусть значения вектора $\mathbf{a}$ в двух близких точках P и P' равны соответственно $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$, причем направление отрезка $PP' = \Delta\mathbf{c}$ совпадает с направлением $\mathbf{c}$ (рис. 107). Если разность между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$ равна $\Delta\mathbf{a}$, то производная $\partial\mathbf{a}/\partial c$ будет равна

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial c} = \lim_{PP'\to 0}\frac{\mathbf{a}'-\mathbf{a}}{PP'} = \lim_{\Delta c\to 0}\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta c}. \tag{33*}$$

Таким образом, направление вектора $\partial\mathbf{a}/\partial c$ совпадает с предельным направлением вектора $\Delta\mathbf{a}$, но, вообще говоря, отлично от направления векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$.

Далее, если координаты точек P и P' отличаются друг от друга на Δx, Δy, Δz, то с точностью до величин второго порядка малости

$$\mathbf{a}' - \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}\Delta z.$$

Подставляя это в предшествующее уравнение и приняв во внимание, что

$$\frac{\Delta x}{PP'} = \cos(x, \mathbf{c}), \quad \frac{\Delta y}{PP'} = \cos(y, \mathbf{c}), \quad \frac{\Delta z}{PP'} = \cos(z, \mathbf{c}),$$

получим

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial c} = \lim_{PP'\to 0}\frac{\mathbf{a}' - \mathbf{a}}{PP'} = \cos(x, \mathbf{c})\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \cos(y, \mathbf{c})\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \cos(z, \mathbf{c})\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}. \tag{34*}$$

Таким образом, для определения в данной точке производной вектора $\mathbf{a}$ по произвольному направлению необходимо задать *девять* величин: три слагающих $\frac{\partial a_x}{\partial x}$, $\frac{\partial a_y}{\partial x}$, $\frac{\partial a_z}{\partial x}$, величины $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}$ и соответственно по три слагающих величин $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}$ и $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}$. Совокупность этих девяти величин представляет собой слагающие некоторого *тензора*, заданием которого определяются как производные вектора $\mathbf{a}$ по произвольному направлению, так и значения величин $\operatorname{div}\mathbf{a}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}$. Впрочем, в настоящем курсе нам этим тензором пользоваться не придется.

§ 7. Оператор набла. Вторые производные. Производные от произведений

1. Выше мы познакомились с рядом дифференциальных операций над векторами и скалярами: образование градиента скаляра (6*), дивергенции вектора (18*), ротора вектора (29*) и т. д. При применении векторного анализа приходится встречаться еще с целым рядом других дифференциальных выражений.

Оперирование этими выражениями может быть упрощено и уложено в простую и стройную схему введением в рассмотрение *символического дифференциального оператора Гамильтона*. Оператор этот обозначается знаком ∇ (читай: «набла»); в декартовой системе координат он имеет вид

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{35*}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы по осям x, y, z. Иными словами, ∇ есть *векторный* оператор, слагающие которого по осям

координат равны

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{36*}$$

Этот векторный оператор соответствует в векторном анализе знаку производной обычного анализа. Подобно тому как в обычном анализе дифференциал функции можно считать произведением оператора дифференцирования d на дифференцируемую функцию, так путем помножения скаляров и векторов, являющихся функциями точки, на оператор ∇ мы получаем *пространственные производные* этих величин.

Так, например, произведение ∇ на скаляр φ нужно, очевидно, положить равным

$$\nabla\varphi = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Стало быть, согласно (6*),

$$\varphi = \operatorname{grad}\varphi. \tag{37*}$$

Таким образом, $\nabla\varphi$ действительно может быть названа пространственной производной от φ, ибо вектор $\operatorname{grad}\varphi$ вполне характеризует изменения, испытываемые скаляром φ при перемещении «точки наблюдения» (т. е. при изменении координат x, y, z). Подобно этому, и другие выражения, включающие в себя оператор ∇, тоже характеризуют собой те или иные соотношения между значениями скалярных и векторных функций в смежных точках пространства.

С известными ограничениями, о которых будет сказано ниже, можно образовывать произведения ∇ с другими векторами и скалярами так, как если бы ∇ был истинным, а не символическим вектором. Как и при пользовании знаком дифференциала, при этом предполагается, что оператор ∇ «действует» лишь на те величины, которые стоят вправо от него.

Так, например, скалярное произведение символического вектора ∇ на произвольный вектор $\mathbf{a}$ равно

$$\nabla\mathbf{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

т. е., согласно (15*),

$$\nabla\mathbf{a} = \operatorname{div}\mathbf{a}. \tag{38*}$$

Помимо скалярного произведения символического вектора ∇ на вектор $\mathbf{a}$, можно образовать и векторное произведение этих векторов, которое, как легко видеть, представляет собой ротор вектора $\mathbf{a}$ (см. сноску на с. 591):

$$[\nabla\mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\mathbf{a}. \tag{39*}$$

Так, например, слагающая вектора $[\nabla \mathbf{a}]$ по оси x равна

$$[\nabla \mathbf{a}]_x = \nabla_y a_z - \nabla_z a_y = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = \operatorname{rot}_x \mathbf{a}.$$

2. Применение оператора ∇ весьма упрощает нахождение вторых и старших производных от скалярных и векторных величин. Так, например, квадрат вектора ∇ равен

$$\nabla^2 = \nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Поэтому, раскрывая смысл произведения $\nabla(\nabla\varphi)$ по правилам векторной алгебры:

$$\mathbf{b}\,(\mathbf{b}\varphi) = \mathbf{b}^2\varphi,$$

получим [1])

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \qquad (40^*)$$

В справедливости этого равенства можно убедиться непосредственным вычислением с помощью формул (5*) и (15*):

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial \operatorname{grad}_x \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \operatorname{grad}_y \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \operatorname{grad}_z \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Совершенно иной смысл имеет выражение $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla(\nabla\mathbf{a}) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right).$$

Оно вовсе не равно $\nabla^2\mathbf{a}$, подобно тому как при оперировании с обычными векторами

$$\mathbf{b}\,(\mathbf{b}\mathbf{a}) \neq b^2\mathbf{a}.$$

Выражение же $\nabla^2\mathbf{a}$ имеет, очевидно, следующий смысл:

$$\nabla^2\mathbf{a} = (\nabla\nabla)\,\mathbf{a} = \frac{\partial^2\mathbf{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{a}}{\partial z^2}, \qquad (41^*)$$

т. е. представляет собой вектор, слагающая которого, например по оси x равна

$$(\nabla^2\mathbf{a})_x = \nabla^2 a_x = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}. \qquad (41\text{а}^*)$$

Конечно, $\nabla^2\varphi$ и $\nabla^2\mathbf{a}$ нельзя смешивать с $(\nabla\varphi)^2$ и $(\nabla\mathbf{a})^2$; так, например,

$$(\nabla\varphi)^2 = (\operatorname{grad}\varphi)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

[1]) Оператор ∇^2 часто обозначается через Δ и называется лапласианом.

Известные формулы векторной алгебры

$$[\mathbf{b}\,(\mathbf{b}\varphi)] = 0, \quad \mathbf{b}\,[\mathbf{ba}] = 0, \quad [\mathbf{b}\,[\mathbf{ba}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{ba}) - (\mathbf{bb})\mathbf{a}\ ^{1})$$

остаются справедливыми и при замене вектора $\mathbf{b}$ символическим вектором ∇ (при любых $\mathbf{a}$ и φ):

$$[\nabla(\nabla\varphi)] = [\nabla \operatorname{grad}\varphi] = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0,$$
$$\nabla[\nabla\mathbf{a}] = \nabla \operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0, \qquad (42^*)$$
$$[\nabla[\nabla\mathbf{a}]] = \nabla(\nabla\mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a}, \text{ или } \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \nabla^2\mathbf{a}.$$

В справедливости этих соотношений легко убедиться непосредственным вычислением в декартовых координатах ²). Так, например,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{\partial \operatorname{rot}_x \mathbf{a}}{\partial x} + \frac{\partial \operatorname{rot}_y \mathbf{a}}{\partial y} + \frac{\partial \operatorname{rot}_z \mathbf{a}}{\partial z} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = 0.$$

3. Итак, поскольку оператор ∇ входит сомножителем в произведения, содержащие в себе лишь *один-единственный* истинный скаляр или вектор, постольку произведения эти можно преобразовать по обычным правилам векторной алгебры. Однако, если в произведение входят два или несколько истинных скаляров или векторов, то правила эти становятся неприменимыми и нуждаются в видоизменениях. Совершенно то же имеет место и в обычном анализе при символическом умножении алгебраических величин на знак дифференциала d: подобно тому как

$$d(\varphi\psi) = \psi\, d\varphi + \varphi\, d\psi,$$

так и в случае умножения произведения скаляров или векторов на ∇ операция дифференцирования должна быть выполнена над каждым из сомножителей в отдельности. Так, например, при дифференцировании произведения двух скаляров или скаляра

---

¹) В правой части последнего уравнения можно, конечно, изменить порядок сомножителей, например, так: $[\mathbf{b}\,[\mathbf{ba}]] = (\mathbf{ab})\,\mathbf{b} - \mathbf{a}\,(\mathbf{bb})$. Однако при замене $\mathbf{b}$ на ∇ мы должны записать это уравнение так, чтобы все дифференциальные операторы ∇ стояли *перед* дифференцируемым вектором $\mathbf{a}$.

²) Соотношения $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$ и $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$ получаются также сразу из формул Стокса (27*) и Гаусса (17*), если положить в них $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi$ или соответственно $\mathbf{a} = \operatorname{rot}\mathbf{b}$. Воспользовавшись, кроме того, уравнением (28*), получаем

$$\int \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{b}\cdot dV = \oint \operatorname{rot}_n \mathbf{b}\cdot dS = 0,$$
$$\int \operatorname{rot}_n \operatorname{grad}\varphi\cdot dS = \oint \operatorname{grad}\varphi\cdot ds = \oint \frac{\partial\varphi}{\partial s}\,ds = 0,$$

откуда ввиду произвольности области интегрирования следуют упомянутые соотношения.

и вектора получаем

$$\nabla(\varphi\psi) = \psi(\nabla\varphi) + \varphi(\nabla\psi) \text{ или } \operatorname{grad}(\varphi\psi) = \psi \operatorname{grad}\varphi + \varphi \operatorname{grad}\psi,$$
$$\nabla(\varphi\mathbf{a}) = \varphi(\nabla\mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla\varphi) \text{ или } \operatorname{div}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\operatorname{grad}\varphi, \quad (43^*)$$
$$[\nabla(\varphi\mathbf{a})] = \varphi[\nabla\mathbf{a}] + [(\nabla\varphi)\mathbf{a}] \text{ или } \operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot}\mathbf{a} + [\operatorname{grad}\varphi \cdot \mathbf{a}].$$

В справедливости этих соотношений можно убедиться непосредственным вычислением. Так, например,

$$\nabla(\varphi\psi) = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(\varphi\psi) = \mathbf{i}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) +$$
$$+\mathbf{j}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \mathbf{k}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial z} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \psi(\nabla\varphi) + \varphi(\nabla\psi).$$

Несколько сложнее обстоит дело при скалярном дифференцировании произведения двух векторов.

Обратимся, прежде всего, к выражению

$$\nabla[\mathbf{ab}] = \operatorname{div}[\mathbf{ab}].$$

Для обычных векторов справедливы соотношения

$$\mathbf{c}[\mathbf{ab}] = \mathbf{b}[\mathbf{ca}] = -\mathbf{a}[\mathbf{cb}].$$

При замене вектора дифференциальным оператором ∇ можно предположить, что $\nabla[\mathbf{ab}]$ должно быть приравнено к сумме выражений

$$\mathbf{b}[\nabla\mathbf{a}] \quad \text{и} \quad -\mathbf{a}[\nabla\mathbf{b}],$$

ибо в обычном анализе производная от произведения равна сумме двух членов, в каждом из которых дифференцированию подвергается лишь один из сомножителей. Действительно, непосредственным вычислением, которое мы предоставляем провести читателю, можно убедиться, что

$$\nabla[\mathbf{ab}] = \mathbf{b}[\nabla\mathbf{a}] - \mathbf{a}[\nabla\mathbf{b}],$$

т. е. что

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}] = \mathbf{b} \operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot}\mathbf{b}. \quad (44^*)$$

Как известно, при вычислении произведения $\mathbf{c}(\mathbf{ab})$ трех векторов необходимо выполнить скалярное перемножение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ *прежде* помножения их на $\mathbf{c}$. Соответственно этому и выражение

$$\nabla(\mathbf{ab}) = \operatorname{grad}(\mathbf{ab})$$

не может быть представлено в виде суммы *двух* членов, в каждом из которых дифференцируется лишь один из сомножителей. Можно показать далее, что такого рода преобразование невыполнимо также и по отношению к выражению

$$[\nabla[\mathbf{ab}]] = \operatorname{rot}[\mathbf{ab}].$$

Оба эти выражения могут быть, однако, представлены в виде суммы *четырех* членов, в каждом из которых дифференцированию подвергается лишь один из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Отсылая за доказательством к курсам векторного анализа, приведем соответствующие формулы [1]):

$$\operatorname{grad}(\mathbf{ab}) = (\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a} + (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b} + [\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}] + [\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}]; \tag{45*}$$

$$\operatorname{rot}[\mathbf{ab}] = (\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}. \tag{46*}$$

В частном случае, когда $b = \text{const}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, формула (45*), как нетрудно показать, сводится к формуле (11*):

$$\nabla(\mathbf{bR}) = \operatorname{grad}_a(\mathbf{bR}) = \mathbf{b}.$$

Если, далее, положить в (45*) $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, то получим

$$\frac{1}{2}\nabla a^2 = (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{a} + [\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{a}]. \tag{47*}$$

4. Нам остается еще рассмотреть скалярный оператор $\mathbf{a}\nabla$, получаемый скалярным помножением произвольного вектора $\mathbf{a}$ на оператор Гамильтона ∇, стоящий *справа* от $\mathbf{a}$ (в отличие от $\nabla\mathbf{a} = \operatorname{div}\mathbf{a}$):

$$\mathbf{a}\nabla = a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}. \tag{48*}$$

В частном случае, при $a = 1$, операция $\mathbf{a}\nabla$ эквивалентна, очевидно, нахождению производной $\dfrac{\partial}{\partial a}$ по направлению единичного вектора $\mathbf{a}$. Вообще же говоря, выполнение операции $\mathbf{a}\nabla$ над произвольной функцией точки эквивалентно умножению производной от этой функции, взятой по направлению вектора $\mathbf{a}$, на числовое значение вектора $\mathbf{a}$; иными словами,

$$\mathbf{a}\nabla = a\frac{\partial}{\partial a}. \tag{49*}$$

Действительно, выполняя операцию $\mathbf{a}\nabla$ над произвольным скаляром φ, получим скаляр

$$\mathbf{a}\nabla\cdot\varphi = a_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + a_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \mathbf{a}\cdot\nabla\varphi,$$

или на основании (4*) $\mathbf{a}\nabla\cdot\varphi = \mathbf{a}\operatorname{grad}\varphi = s\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}$ в согласии с (49*).

Выполняя же операцию $\mathbf{a}\nabla$ над произвольным вектором $\mathbf{b}$, получим вектор:

$$(\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\nabla\cdot\mathbf{b} = a_x\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial x} + a_y\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial y} + a_z\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial z}, \tag{50a*}$$

слагающая которого, например, по оси x равна

$$(\mathbf{a}\nabla\cdot\mathbf{b})_x = a_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y\frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z\frac{\partial b_x}{\partial z} = (\mathbf{a}\nabla)\,b_x. \tag{50b*}$$

[1]) Для частных случаев эти формулы доказываются также в тексте книги (см. § 18, с. 91 и § 57, с. 263).

С другой стороны, производная вектора $\mathbf{b}$ по направлению $\mathbf{a}$, согласно (34*), равна

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a} = \cos(x, \mathbf{a})\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + \cos(y, \mathbf{a})\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} + \cos(z, \mathbf{a})\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}.$$

Умножая это равенство на a и сравнивая результат с (50а*), убедимся в том, что действительно

$$\mathbf{a}\nabla \cdot \mathbf{b} = a\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a}, \qquad (51^*)$$

что и требовалось доказать. Таким образом, если вектор $\mathbf{a}$ достаточно мал, то с точностью до величин второго порядка малости $\mathbf{a}\nabla \cdot \varphi$ и $\mathbf{a}\nabla \cdot \mathbf{b}$ равны соответственно приращению скаляра φ и вектора $\mathbf{b}$ при перемещении «точки наблюдения» на отрезок, равный по величине и направлению вектору $\mathbf{a}$.

5. Элементарные операции пространственного дифференцирования сводятся к образованию градиента, дивергенции, ротора и производной $\partial \mathbf{b}/\partial a$. Все эти операции, как мы видели [1], имеют определенный геометрический смысл и потому *инвариантны* по отношению к преобразованию системы координат. Иными словами, значение выражений

$$\operatorname{grad}\varphi, \quad \operatorname{div}\mathbf{a}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{a}, \quad \partial \mathbf{b}/\partial a$$

не зависит от выбора системы координат. Все соотношения между дифференциальными выражениями, выведенные нами выше, тоже носят инвариантный характер, ибо, хотя при доказательстве их мы всякий раз и пользовались определенной (декартовой) системой координат, однако в самые соотношения входят лишь *инвариантные* выражения $\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ и т. д. Стало быть, форма этих соотношений не может изменяться при переходе к иным системам координат.

§ 8. Интегральные соотношения. Теорема Грина

Формулы Гаусса (17*) и Стокса (27*) представляют собой основные интегральные соотношения векторного анализа; исходя из них, можно получить и ряд других важных соотношений между пространственными (объемными, поверхностными и линейными) интегралами скалярных и векторных величин.

1. Формула Гаусса (17*) позволяет без труда доказать важную для векторного анализа и его приложений *теорему Грина*. Для этой цели в формуле Гаусса (17*)

$$\int \operatorname{div}\mathbf{a}\, dV = \oint a_n\, dS$$

[1] См. уравнения (3*), (18*), (29*) и (33*).

положим: $\mathbf{a} = \psi \operatorname{grad} \varphi = \psi \nabla \varphi$, где ψ и φ — два произвольных скаляра. Согласно (43_2^*) и (40*)

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \psi \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{grad} \varphi = \psi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi)(\nabla \psi).$$

Далее, $a_n = \psi \operatorname{grad}_n \varphi = \psi \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$. Поэтому из (17*) следует, что

$$\int \{\psi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi)(\nabla \varphi)\}\, dV = \oint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS, \qquad (52^*)$$

где интеграл правой части должен быть взят по замкнутой поверхности S, ограничивающей область интегрирования V. Эта формула и выражает собой *теорему Грина.*

Для некоторых целей удобно преобразовать формулу (52*), заменив в ней ψ на φ, и обратно; вычтя полученное таким образом уравнение из (52*), получаем

$$\int (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi)\, dV = \oint \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) dS. \qquad (53^*)$$

Как указывалось, применение теоремы Гаусса ограничено требованием непрерывности вектора $\mathbf{a}$ и конечности его первых производных в области интегрирования V. Поэтому теорема Грина непосредственно применима лишь к конечным и непрерывным скалярным функциям точки ψ и φ, обладающим в области интегрирования V производными первого и второго порядков.

2. Рассмотрим линейный интеграл произвольного, но обладающего конечными производными скаляра φ по произвольному замкнутому контуру L: $\oint \varphi\, d\mathbf{s}$.

Интеграл этот является *вектором*, ибо под $d\mathbf{s}$ мы понимаем *векторную* величину элемента длины контура.

Чтобы преобразовать этот интеграл, помножим его скалярно на некоторый произвольный, но постоянный по величине и направлению вектор $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{c} \oint_L \varphi\, d\mathbf{s} = \oint_L \varphi \mathbf{c}\, d\mathbf{s} = \oint_L \varphi c_s\, ds.$$

С помощью теоремы Стокса (27*) последний интеграл может быть преобразован в интеграл по произвольной поверхности S, опирающейся на контур L; для этого достаточно положить в уравнении (27*) $\mathbf{a} = \varphi \mathbf{c}$:

$$\mathbf{c} \oint \varphi\, d\mathbf{s} = \oint_S \operatorname{rot}_n (\varphi \mathbf{c})\, dS.$$

Ввиду постоянства вектора $\mathbf{c}$ из уравнения (43_3^*) получаем

$$\operatorname{rot} (\varphi \mathbf{c}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{c} + [\operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{c}] = [\operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{c}],$$

и, стало быть, $\operatorname{rot}_n (\varphi \mathbf{c}) = \mathbf{n} [\operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{c}] = \mathbf{c} [\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \varphi]$.

Внося это выражение в последнее интегральное соотношение и вынося постоянный вектор $\mathbf{c}$ за знак интеграла, получаем

$$\mathbf{c} \oint_L \varphi \, d\mathbf{s} = \mathbf{c} \int_S [\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \varphi] \, dS.$$

Ввиду произвольности вектора $\mathbf{c}$ это равенство может иметь место только при условии равенства обоих интегралов. Таким образом, приходим к искомой формуле

$$\oint_L \varphi \, d\mathbf{s} = \int_S [\mathbf{n} \operatorname{grad} \varphi] \, dS, \tag{54*}$$

где, как явствует из вывода, $\mathbf{n}$ есть нормаль к поверхности $\mathbf{S}$, образующая правовинтовую систему с направлением положительного обхода контура L.

Если мы условимся элемент поверхности dS считать величиной *векторной*, направление которой совпадает с направлением положительной нормали к этому элементу dS, то уравнение (54*) можно будет записать следующим образом:

$$\oint_L \varphi \, d\mathbf{s} = \int_S [d\mathbf{S} \cdot \operatorname{grad} \varphi]. \tag{55*}$$

3. Докажем соотношение

$$\int_V \operatorname{rot} \mathbf{a} \, dV = \oint_S [\mathbf{n}\mathbf{a}] \, dS = \oint_S [d\mathbf{S} \cdot \mathbf{a}], \tag{56*}$$

позволяющее преобразовать интеграл ротора произвольного вектора $\mathbf{a}$ по произвольному объему V в интеграл тангенциальных слагающих этого вектора по замкнутой поверхности S, охватывающей объем V.

Умножим подлежащий преобразованию объемный интеграл скалярно на произвольный, но постоянный по величине и направлению вектор $\mathbf{c}$. Согласно уравнению (44*),

$$\mathbf{c} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{c} + \operatorname{div} [\mathbf{ac}] = \operatorname{div} [\mathbf{ac}],$$

так как ротор постоянного вектора $\mathbf{c}$ равен нулю.

Следовательно,

$$\mathbf{c} \int_V \operatorname{rot} \mathbf{a} \, dV = \int_V \operatorname{div} [\mathbf{ac}] \, dV = \oint_S [\mathbf{ac}]_n \, dS,$$

где мы воспользовались теоремой Гаусса (17*).

Наконец, $[\mathbf{ac}]_n = [\mathbf{ac}] \, \mathbf{n} = \mathbf{c} \, [\mathbf{na}]$, и, стало быть,

$$\mathbf{c} \int_V \operatorname{rot} \mathbf{a} \, dV = \mathbf{c} \oint_S [\mathbf{na}] \, dS.$$

Ввиду произвольности вектора $\mathbf{c}$ отсюда вытекает уравнение (56*).

Заканчивая изложение векторного анализа, отметим, что в настоящем приложении мы не рассматривали некоторые предельные теоремы, приводящие к понятию о поверхностном роторе и поверхностной дивергенции. Эти теоремы, а также некоторые тензорные соотношения выводятся в тексте книги.

§ 9. Важнейшие формулы векторного анализа

$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \lim\limits_{ds \to 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{ds}$ (производная скаляра φ по направлению $\mathbf{s}$). (1*)

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{n}. \tag{3*}$$

$$\nabla \varphi = \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{6*}$$

$$\operatorname{grad}_s \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s}. \tag{4*}$$

$$\operatorname{grad} \varphi(\psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \operatorname{grad} \psi. \tag{7*}$$

$$\operatorname{grad}_a R = \frac{\mathbf{R}}{R} = -\operatorname{grad}_q R. \tag{8*}$$

$$\operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R}\right). \tag{10*}$$

$$\operatorname{grad}_a (\mathbf{bR}) = \mathbf{b} \quad (\mathbf{b} = \text{const}). \tag{11*}$$

$$\oint\limits_S a_n \, dS = \int\limits_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, dV \text{ (теорема Гаусса).} \tag{17*}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint a_n \, dS}{\Delta V}. \tag{18*}$$

$$\nabla \mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{15*}$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{a} = a_{2n} - a_{1n}. \tag{6.7}$$

$$\oint\limits_L a_s \, ds = \int\limits_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a} \, dS \text{ (теорема Стокса).} \tag{27*}$$

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{dS \to 0} \frac{\oint a_s \, ds}{dS}. \tag{29*}$$

$$[\nabla \mathbf{a}] = \operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{25*}$$

$$\operatorname{Rot}\mathbf{a} = [\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1]. \tag{49.6}$$

$$\oint_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\, dS = 0. \tag{28*}$$

$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a} = \lim\limits_{\Delta a\to 0} \frac{\mathbf{b}' - \mathbf{b}}{\Delta a}$ (производная вектора по направлению a). (33*)

$$\mathbf{a}\nabla\cdot\mathbf{b} = a\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a} = a_x\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + a_y\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} + a_z\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}. \tag{51*}$$

Вторые производные:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{46*}$$

$$\nabla^2 f(R) = \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial f}{\partial R}. \tag{21*}$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = 0.$$

$$\nabla^2\mathbf{a} = \frac{\partial^2\mathbf{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{a}}{\partial z^2}. \tag{41*}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0,\quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0,\quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \nabla^2\mathbf{a}. \tag{42*}$$

Производные от произведений:

$$\begin{gathered}\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi,\\ \operatorname{div}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\operatorname{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\operatorname{grad}\varphi,\\ \operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\operatorname{rot}\mathbf{a} + [\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{a}].\end{gathered} \tag{43*}$$

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}] = \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}. \tag{44*}$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{ab}) = (\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a} + (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b} + [\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}] + [\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}]. \tag{45*}$$

$$\operatorname{rot}[\mathbf{ab}] = (\mathbf{b}\nabla\mathbf{a}) - (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}. \tag{46*}$$

$$\frac{1}{2}\nabla a^2 = (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{a} + [\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{a}]. \tag{47*}$$

Теорема Грина: $\int\{\psi\nabla^2\varphi + (\nabla\varphi)(\nabla\psi)\}\,dV = \oint\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS.$ (52*)

$$\int(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)\,dV = \oint\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS. \tag{53*}$$

$$\oint_L \varphi\,d\mathbf{s} = \int_S [\mathbf{n}\operatorname{grad}\varphi]\,dS. \tag{54*}$$

$$\int_V \operatorname{rot}\mathbf{a}\,dV = \oint_S [\mathbf{na}]\,dS. \tag{56*}$$

II. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ В СИ И В ГАУССОВОЙ СИСТЕМЕ

Как это принято в курсах теоретической физики, в книге использована гауссова система единиц. Однако, имея в виду преимущественное применение системы СИ, издательство сочло необходимым привести таблицу основных формул, записанных параллельно в системе СИ.

Наименование	СИ	Гауссова система
Закон Кулона	$F = \frac{1}{4\pi}\frac{e_1 e_2}{\varepsilon R^2}$	$F = \frac{e_1 e_2}{\varepsilon R^2}$
Напряженность поля точечного заряда	$E = \frac{1}{4\pi}\frac{e}{\varepsilon R^2}$	$E = \frac{e}{\varepsilon R^2}$
Напряженность поля между заряженными плоскостями и вблизи поверхности заряженного проводника	$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$	$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$
Потенциал точечного заряда	$\varphi = \frac{1}{4\pi}\frac{e}{\varepsilon R}$	$\varphi = \frac{e}{\varepsilon R}$
Связь между **P** и **E**	$\mathbf{P} = \alpha\varepsilon_0\mathbf{E}$	$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}$
Связь между **P** и поверхностной плотностью связанных зарядов на границе с вакуумом	$\sigma_{\text{связн}} = \alpha\varepsilon_0 P_n$	$\sigma_{\text{связн}} = \alpha P_n$
Электрическое смещение (электрическая индукция) (определение)	$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$
Связь между **D** и **E**	$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$
Связь между **D** *и* **E** *в вакууме*	$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \mathbf{E}$
D поля точечного заряда	$D = \frac{1}{4\pi}\frac{e}{R^2}$	$D = \frac{e}{R^2}$
Теорема Гаусса для **D**	$\oint D_n\, dS = \sum e$	$\oint D_n\, dS = 4\pi\sum e$
Емкость плоского конденсатора	$C = \frac{\varepsilon S}{d}$	$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$
Плотность энергии электрического поля	$w = \frac{\varepsilon E^2}{2}$	$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$
Напряженность магнитного поля (определение)	$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{I}$	$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{I}$
Связь между **I** и **H**	$\mathbf{I} = \varkappa\mathbf{H}$	$\mathbf{I} = \varkappa\mathbf{H}$
Связь между **B** и **H**	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$
Связь между **B** и **H** в вакууме	$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mathbf{H}$
Закон Био–Савара	$\mathbf{H} = \frac{J}{4\pi R^3}[d\mathbf{s}\,\mathbf{R}]$	$\mathbf{H} = \frac{J}{cR^3}[d\mathbf{s}\,\mathbf{R}]$

Продолжение

Циркуляция вектора **H**	$\oint H_s\,ds = \sum J$	$\oint H_s\,ds = \frac{4\pi}{c}\sum J$
Теорема Гаусса для **B**	$\oint B_n\,dS = 0$	$\oint B_n\,dS = 0$
Закон Ампера	$\mathbf{F} = J\,[d\mathbf{s}\,\mathbf{B}]$	$\mathbf{F} = \frac{1}{c}J\,[d\mathbf{s}\,\mathbf{B}]$
Сила Лоренца	$\mathbf{F} = e\,[\mathbf{vB}]$	$\mathbf{F} = \frac{e}{c}\,[\mathbf{vH}]$
Энергия магнитного поля тока	$W = \frac{LJ^2}{2}$	$W = \frac{1}{c^2}\,\frac{LJ^2}{2}$
Плотность энергии магнитного поля	$w = \frac{\mu H^2}{2}$	$w = \frac{1}{8\pi}\,\mu H^2$
Плотность тока смещения (определение)	$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
Уравнения Максвелла в интегральной форме	$\oint E_s\,ds = -\int\limits_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{S}$	$\oint E_s\,ds = -\frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{S}$
	$\oint H_s\,ds = \int\limits_S \mathbf{j}\,d\mathbf{S} + \int\limits_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,d\mathbf{S}$	$\oint H_s\,ds = \frac{4\pi}{c}\int \mathbf{j}\,d\mathbf{S} + \frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,d\mathbf{S}$
Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	$rot\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
	$\text{div}\,\mathbf{B} = 0$	$\text{div}\,\mathbf{B} = 0$
	$\text{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\text{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
	$\text{div}\,\mathbf{D} = \rho$	$\text{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho$
Скорость электромагнитных волн	$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$	$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$
Соотношение между амплитудами векторов **E** и **H** в электромагнитной волне	$E_m\sqrt{\varepsilon} = H_m\sqrt{\mu}$	$E_m\sqrt{\varepsilon} = H_m\sqrt{\mu}$
Вектор Пойнтинга	$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]$	$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{EH}]$
Плотность импульса электромагнитного поля	$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2}\,[\mathbf{EH}]$	$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}\,[\mathbf{EH}]$
Электрическая постоянная вакуума	ε_0	1
Магнитная постоянная вакуума	μ_0	1

III. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ

Наименование	Символ	Величина(СИ)	Размерность
Скорость света в вакууме	c	299 792 458	$м \cdot с^{-1}$
Магнитная проницаемость вакуума	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} = 12{,}566\,370\,614 \cdot 10^{-7}$	$Г \cdot м^{-1}$
Диэлектрическая проницаемость вакуума $1/\mu_0 c^2$	ε_0	$8{,}854\,187\,817 \cdot 10^{-12}$	$Ф \cdot м^{-1}$
Импеданс вакуума $(\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} = \mu_0 c$	Z_0	376,730 313 461	Ом
Гравитационная постоянная	G G/hc	$6{,}673(10) \cdot 10^{-11}$ $6{,}707(10) \cdot 10^{-39}$	$м^3 \cdot кг^{-1} \cdot с^{-2}$ $(ГэВ/c^2)^{-2}$
Масса покоя электрона	m_e	$9{,}109\,381\,88(72) \cdot 10^{-31}$	кг
Масса покоя протона	m_p	$1{,}672\,621\,58(13) \cdot 10^{-27}$	кг
Отношение масс протона и электрона	m_p/m_e	1 836,152 6675(39)	
		$6{,}582\,118\,89(26) \cdot 10^{-16}$	эВ · с
Планковская масса $(\hbar c/G)^{1/2}$	m_P	$2{,}1767(16) \cdot 10^{-8}$	кг
Планковская длина $\hbar/m_P c = (\hbar G/c^3)^{1/2}$	l_P	$1{,}6160(12) \cdot 10^{-35}$	м
Планковское время $l_P/c = (\hbar G/c^5)^{1/2}$	t_P	$5{,}3906(40) \cdot 10^{-44}$	с
Элементарный заряд	e	$1{,}602\,176\,462(63) \cdot 10^{-19}$	Кл
Квант магнитного потока $h/2e$	Φ_0	$2{,}067\,833\,636(81) \cdot 10^{-15}$	Вб
Квант проводимости $2e^2/h$	G_0	$7{,}748\,091\,696(28) \cdot 10^{-5}$	См
Постоянная тонкой структуры $e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c)$	α	$7{,}297\,352\,533(27) \cdot 10^{-3}$	
	α^{-1}	137,035 999 76(50)	
Постоянная Ридберга $\alpha^2 m_e c/2h$	R_∞	10 973 731,568 549(83)	$м^{-1}$
Постоянная Авогадро	N_A; L	$6{,}022\,141\,99(47) \cdot 10^{23}$	$моль^{-1}$
Число Фарадея $N_A e$	F	96 485,3415(39)	$Кл \cdot моль^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	R	8,314 472(15)	$Дж \cdot моль^{-1} \cdot К^{-1}$
Постоянная Больцмана R/N_A	k	$1{,}380\,6503(24) \cdot 10^{-23}$	$Дж \cdot К^{-1}$
Постоянная Стефана–Больцмана $(\pi^2/60)k^4/\hbar^3 c^2$	σ	$5{,}670\,400(40) \cdot 10^{-8}$	$Вт \cdot м^{-2} \cdot К^{-4}$
Внесистемные единицы			
Электрон-вольт	eV	$1{,}602\,176\,462(63) \cdot 10^{-19}$	Дж
Атомная единица массы $1\,u = m_u = (1/12)\,m(^{12}C)$	u	$1{,}660\,538\,73(13) \cdot 10^{-27}$	кг

Источник: *Peter J. Mohr, Barry N. Taylor.* CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 1998. // J. Phys. a. Chem. Reference Data. 1999. V. 28. № 6; Rev. Modern Physics. 2000. V. 72. № 2.

1. Сверхпроводимость (к § 41)

Создание микроскопической теории сверхпроводимости относится к 1957–1958 гг.

Объяснение механизма сверхпроводимости невозможно в рамках классических концепций, так что оно является триумфом квантовой теории. Сущность дела состоит в том, что хотя между электронами действуют силы *кулоновского отталкивания*, тем не менее в твердых телах возникают наряду с ними также и силы притяжения между электронами, обусловленные тем, что электроны могут обмениваться фононами, т. е. квантами упругих колебаний тела. Это притяжение приводит к образованию вблизи энергетической поверхности Ферми связанных пар электронов.

Квантовые закономерности приводят к тому, что эти пары образуют так называемый бозе-конденсат, обладающий свойствами сверхтекучести. Поскольку эти пары электронов обладают электрическим зарядом, то их сверхтекучесть равносильна сверхпроводимости (см. *Шмидт В.В.* Введение в физику сверхпроводников. — М.: МНЦМО, 2002).

2. Магнитные монополи и «истинные» магнитные диполи. Тороидные моменты (к § 54, 57, 58)

Уже довольно давно, а особенно часто в последние годы, обсуждается возможность существования «истинных» магнитных зарядов (полюсов), которые обычно называются магнитными монополями. Магнитные монополи еще не обнаружены и не исключено, что они вообще не встречаются в природе (во всяком случае, если они и встречаются, то очень редко). Два монополя разного знака могли бы образовать «истинный» магнитный диполь, вполне аналогичный электрическому диполю. Поле такого диполя вне его точно такое же, как поле *токового* магнитного диполя, т. е. в вакууме определяется формулой (57.13а). Нужно, однако, иметь в виду, что внутри диполей (для «истинного» диполя между его полюсами, а в случае колечка с током — вблизи плоскости колечка внутри его) поля различны. Это обстоятельство отражает тот факт, что для «истинного» магнитного диполя, как и для электрического диполя, силовые линии «входят» и «выходят» из полюсов (зарядов). В случае же токового магнитного диполя силовые линии замкнуты. Подробнее см., например: *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. — М.: Наука, 1987. — Гл. 7, где указана также оригинальная литература. Там же упоминается о существовании тороидных диполей, моделью которых служит замкнутый соленоид (тороид) с током (в таком тороиде при отсутствии азимутального тока магнитное поле сосредоточено внутри тороида).

3. Антиферромагнетизм и ферриты (к § 71)

Наряду с ферромагнетизмом существует и антиферромагнетизм. Если в ферромагнетиках обменные силы между атомами стремятся установить спины всех атомов параллельно друг другу, то в антиферромагнетиках об-

менные силы стремятся установить спины смежных атомов антипараллельно друг другу, что, естественно, приводит к уменьшению магнитной проницаемости тела μ. Наиболее ярко антиферромагнетизм проявляется в том, что при понижении температуры начиная с «антиферромагнитной точки Кюри», ниже которой проявляется упорядоченная ориентация спинов, наблюдается резкое падение магнитной восприимчивости антиферромагнетика.

В последнее время приобрели большое практическое значение ферриты — магнитные материалы с весьма высоким электрическим сопротивлением, что важно для применения в высокочастотных устройствах. Ферриты являются окислами (или другими солями) металлов, причем в молекулу феррита, например, наряду с Fe входит еще и ион двухвалентного металла (таковым может быть и Fe^{++}). В ферритах подобно антиферромагнетикам направления спинов смежных атомов антипараллельны друг другу (ниже точки Кюри), однако, ввиду того что магнитные моменты смежных атомов (в отличие от антиферромагнетиков) численно не равны друг другу, результирующее намагничение не равно нулю. Таким образом, с макроскопической точки зрения ферриты являются ферромагнетиками (см. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. — М.: Наука, 1978; *Вонсовский С.В.* Магнетизм. — М.: Наука, 1984).

4. Диспергирующие среды. Пространственная дисперсия (к § 92)

Формула (VIa) текста для плотности энергии w справедлива для постоянного во времени электромагнитного поля и применима к переменным полям лишь при условиях, когда можно пренебречь дисперсией среды, т. е. зависимостью ε и μ от частоты ω переменного поля (см. § 101). В общем же случае поля частоты ω плотность электромагнитной энергии в среде выражается формулой [1])

$$w = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\,\widetilde{E}^2 + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\,\widetilde{H}^2\right], \qquad \text{(VIв)}$$

где тильда над E^2 и H^2 означает усредненное по периоду поля значение квадратов *вещественных* (а не выраженных в комплексной форме) напряженностей поля E и H. Например, если $E = E_0\cos\omega t$, где E_0 от времени не зависит, то $\widetilde{E}^2 = (1/2)E_0^2$. В случае, когда зависимостью ε и μ от ω можно пренебречь, формула (VIв) совпадает с формулой (VIa) текста.

Зависимость диэлектрической проницаемости ε от частоты поля носит название частотной дисперсии. В настоящее время большое внимание привлекает к себе также так называемая пространственная дисперсия. Сущность ее коренится в том, что поляризация среды $\mathbf{P}$, а стало быть, и электрическая индукция $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ в данной точке среды зависят в общем случае не только от напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ в той же точке (как это принимается в обычной теории, в которой полагается $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$), но также и от значения поля $\mathbf{E}$ в смежных точках среды или, что то же, от пространственных производных вектора $\mathbf{E}$. Причина такого рода зависимости яснее всего видна на примере плазмы, т. е. сильно ионизированного газа. Если средняя тепловая скорость свободных электронов в плазме равна v, то за период одного колебания поля частоты ω они проходят пути порядка $a = v/\omega$. Если a — порядка длины волны поля λ, то за период одного колебания электрон побывает в участках пространства с разным полем и, стало

[1]) См., например: *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматлит, 2003. — § 80.

быть, результирующее смещение электронов, определяющее собой поляризацию среды $\mathbf{P}$, будет зависеть не только от значения вектора $\mathbf{E}$ в данной точке, но и от его производных. Обобщенная зависимость электрической индукции $\mathbf{D}$ от напряженности $\mathbf{E}$ в изотропной среде имеет вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \delta_1\nabla^2\mathbf{E} + \delta_2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}. \qquad (\text{А})$$

Членов, содержащих первые производные поля, в разложении типа (А) в изотропной среде быть не может по соображениям симметрии. Значения коэффициентов δ_1 и δ_2 в формуле (А) в случае плазмы могут быть определены из кинетического уравнения для электронов плазмы путем вычисления вызванного электрическим полем отклонения распределения электронов по пространству и по скоростям от их равновесного распределения в отсутствие поля.

Учет пространственной дисперсии может быть сформулирован в таком виде, что в уравнениях поля диэлектрическая проницаемость ε (или, точнее, тензор диэлектрической проницаемости ε_{ij}) полагается зависящей не только от частоты поля ω, но и от волнового вектора $\mathbf{k}$ (см. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматлит, 2003; *Агранович В.М., Гинзбург В.Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. — М.: Наука, 1979).

5. Анизотропные среды (к § 92)

Рассмотрение распространения электромагнитных волн в анизотропных средах существенно усложняется тем, что в такого рода средах диэлектрическая проницаемость ε (а также и магнитная проницаемость μ) является не скаляром, а тензором второго ранга, так что связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ в соответствии с формулой (21.8) текста приобретает вид $D_i = \varepsilon_{ij}E_j$, где подразумевается суммирование по дважды фигурирующему индексу j. Очевидно, в частности, что в анизотропных средах длина волны λ или волновой вектор $\mathbf{k}$ зависят не только от частоты волны ω, но и от направления распространения волны по отношению к осям симметрии среды (см. литературу к дополнению 4).

6. Эффект Вавилова–Черенкова (к § 99)

Излучение осциллятора, как и вообще излучение электромагнитных волн, связано с ускоренным (в случае осциллятора периодическим) движением электрических зарядов. Электрический заряд, равномерно движущийся с постоянной скоростью, никаких электромагнитных волн не излучает. Однако из этого общего закона есть одно исключение — равномерно движущийся электрический заряд излучает электромагнитные волны, если его скорость v превышает скорость света в той среде, в которой он движется. Конечно, никакое материальное тело не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме c, однако фазовая скорость света (или в общем случае электромагнитной волны) в среде равна $v_\text{ф} = \dfrac{c}{n}$, где n — показатель преломления среды, зависящий от частоты волны. Поэтому при $n > 1$ возможно выполнение необходимого для этого излучения условия $v > \dfrac{c}{n}$.

Описанное явление было открыто в тридцатых годах и носит название эффекта Вавилова–Черенкова или черенковского излучения.

В качестве примера черенковского излучения можно указать яркое голубое свечение воды, помещенной в атомный реактор, вызванное проходящими сквозь воду быстрыми электронами, возникающими при распаде атомных

ядер. Это излучение не имеет ничего общего с хемилюминесценцией. Другой пример черенковского излучения — излучение плазменных волн — кратко описан в дополнении к § 102 (см. *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. — М.: Наука, 1987; // УФН. 2002. Т. 172 С. 373).

7. Плазма (к § 102)

В последнее десятилетие особый интерес приобрели исследования распространения волн в особого рода проводящей среде, о которой вообще не упоминается в тексте книги, — в плазме, т. е. в сильно ионизированном газе. Эти исследования весьма важны для геофизики и астрофизики, так как плазмой являются ионосфера (верхние слои атмосферы) Земли, солнечная атмосфера, туманности и в значительной мере межпланетное и межзвездное пространство. В лабораторных же условиях плазма играет весьма важную роль в газовых разрядах и, более того, ее свойства имеют доминирующее значение для исследований, ставящих своей задачей осуществление контролируемых термоядерных реакций. Ведь эти реакции проектируется осуществить именно в высокотемпературной плазме, помещенной в сильное магнитное поле, которое должно стабилизировать плазму и в значительной мере теплоизолировать ее от стенок сосуда, ее содержащего.

Электромагнитные процессы, могущие протекать в плазме, весьма своеобразны. Упомянем, например, что в сильно разреженной, так называемой бесстолкновительной плазме, в которой можно вовсе пренебречь столкновениями между ее частицами (электронами и ионами), зависимость диэлектрической проницаемости ε от частоты поля ω определяется формулой

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \tag{B}$$

где ω_0 — так называемая плазменная частота, равная $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$, где e — заряд электрона, m — его масса, N — число свободных электронов в единице объема. Таким образом, при $\omega < \omega_0$ диэлектрическая проницаемость принимает отрицательные значения. При $\omega = \omega_0$, т. е. при $\varepsilon(\omega) = 0$, в плазме наряду с обычными поперечными электромагнитными волнами могут распространяться и продольные волны, в которых вектор $\mathbf{E}$ направлен по направлению распространения волны, а вектор $\mathbf{H} = 0$. Эти продольные волны называются плазменными волнами.

Тот факт, что частота ω продольных волн должна удовлетворять условию $\varepsilon(\omega) = 0$, непосредственно вытекает из уравнения, приведенного на с. 476 текста:

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{c}{\mu}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \nabla^2\mathbf{E}). \tag{C}$$

В случае поперечных волн $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ и из (C) непосредственно вытекает волновое уравнение (100.2). В случае же продольной волны, если она, например, распространяется по направлению оси z и вектор $\mathbf{E}$ направлен вдоль той же оси, то, как легко видеть,

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} = \nabla^2\mathbf{E} = n_z\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2},$$

т. е. правая часть уравнения (C) обращается в нуль, и, стало быть, при $\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2 \neq 0$ необходимо, чтобы и ε обращалось в нуль.

Очевидно, что вытекающая для поперечных волн из формулы (C) обычная зависимость волнового вектора k от частоты волны ω: $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}/c$ (см. формулу (100.6) текста) к продольным волнам неприменима. Для нахождения этой зависимости необходимо учесть пространственную дисперсию среды (в данном случае плазмы), о которой упоминалось в дополнении к § 92.

Отметим также, что при равномерном движении электрического заряда в плазме возникает черенковское излучение плазменных волн. В случае поперечных волн это излучение не имеет места, так как для них согласно формуле (В) $\varepsilon < 1$, и следовательно, показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ меньше единицы, так что условие черенковского излучения $v > c/n$ (см. добавление к § 93), где v — скорость излучающего электрона, для поперечных волн не может выполняться. Для продольных же плазменных волн $n > 1$, так что черенковское излучение имеет место, причем условие $v > c/n$ выполняется для значительной части свободных электронов высокотемпературной плазмы. Но раз в плазме есть частицы, способные излучать волну данного типа, то они же могут ее и поглощать, что ведет к существенному затуханию распространяющихся в плазме продольных волн даже в отсутствие соударений.

Существенно также, что энергия введенных извне в плазму пучков быстрых электронов быстро диссипируется благодаря излучению ими плазменных волн по законам черенковского излучения.

Мы не можем останавливаться здесь на ряде весьма интересных и своеобразных электромагнитных явлений в плазме и отсылаем читателя к книгам: *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967; *Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А.* Волны в магнитоактивной плазме. — М.: Наука, 1975; *Арцимович Л.А.* Элементарная физика плазмы. — 3-е изд. — М.: Атомиздат, 1969; *Чен Ф.* Введение в физику плазмы. — М.: Мир, 1987.

Учебное издание

ТАММ Игорь Евгеньевич

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

Редакторы *Б.М. Болотовский, Л.П. Русакова, Д.А. Миртова*
Оригинал-макет *В.В Затекина*
Оформление переплета *А.Ю. Алехиной*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 27.03.03.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 38,5. Уч.-изд. л. 45,43. Заказ № 3286

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист».
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс (8172) 72-60-72.
E-mail: form.pfp@votel.ru http://www.vologda/~pfpv