გადაგვარებული მატერია

განაწილების ფუნქციები

6 განზომილებიანი განაწილების ფუნქცია: $f = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$

კლასიკური განაწილება:

მაქსველ–ბოლცმანის სტატისტიკა:

$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/KT}}$$

– ენერგეტიკულ დონეზე შეიძლება იმყოფებოდეს შეუზღუდავი რაოდენობა ნაწილაკებისა;
– ყოველი ენერგეტიკული დონე თანაბარი ალბათობისაა;

მაგ: იდეალური აირი;

ქვანტური ეფექტები:

ბოზე–აინშტაინის სტატისტიკა:

$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/KT} - 1}$$

მაგ: ბოზე კონდენსატი; ფოტონური გაზი;

ფერმი–დირაკის სტატისტიკა:

$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/KT} + 1}$$

მაგ: ფერმი გაზი; გადაგვარებული ელექტრონული გაზი; ნეიტრონული გაზი;

მაქსველ–ბოლცმანის სტატისტიკა

განაწილების ფუნქციის სახე:

$$f(E) = \frac{N}{V}\left(\frac{1}{2\pi mKT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{p^2}{2mKT}\right]$$

ნაწილაკების რიცხვის სიმკვრივე:

$$n(x, y, z, t) = \iiint f d^3 p$$

ნაწილაკის საშუალო კინეტიკური ენერგია:

$$E_{kin} = \frac{3}{2} KT$$

იდეალური აირის მდგომარეობის განტოლება:

$$P = nKT$$

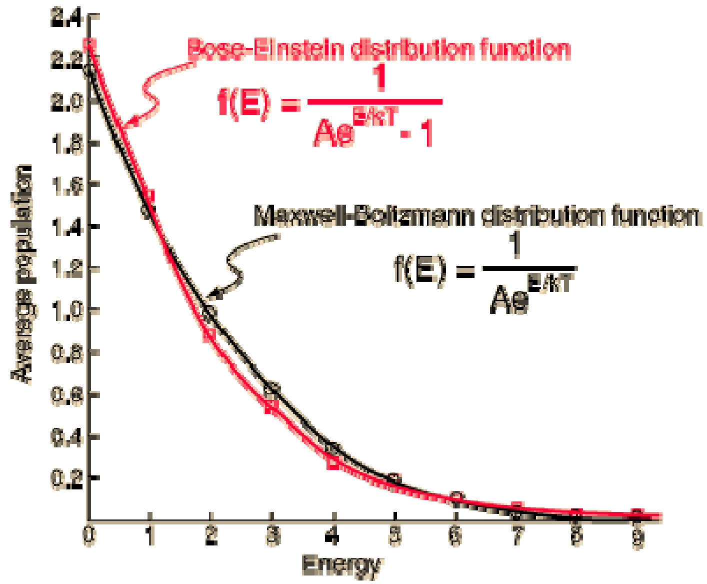
$$P = \frac{\rho}{m_i} KT$$

მაგ: წყალბადის პლაზმა (პროტონები+ელექტრონები): $m_i = m_p / 2$

ბოზე–აინშტაინის სტატისტიკა

განაწილების ფუნქციის სახე:

$$f(E) = \exp\left[\frac{1}{e^{(E-\mu)/KT} - 1}\right]$$

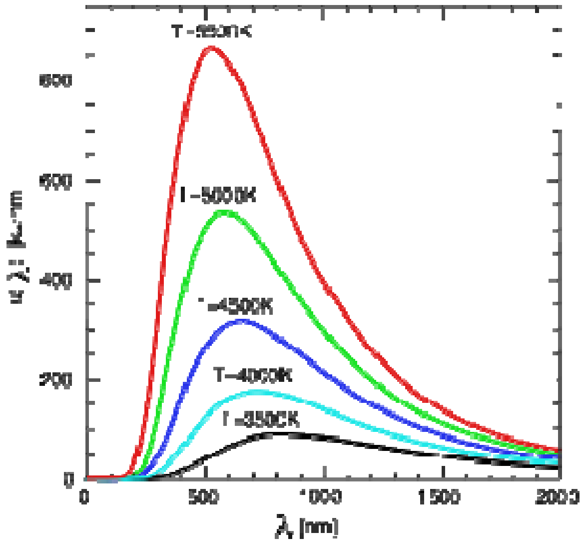


შავი სხეულის გამოსხივება (ფოტონები)
პლანკის ფორმულა:

$$I(\nu,T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\exp\left[\frac{1}{e^{h\nu/KT} - 1}\right]$$

რელეი–ჯინსის მიახლოება ($h\nu << KT$):

$$I(\nu,T) = \frac{2\nu^2 KT}{c^2} \propto \nu^2 T$$



ვინის მიახლოება ($h\nu >> KT$):

$$I(\nu,T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{h\nu/KT}$$

ფოტონური გაზის მდგომარეობის განტოლება

ჯამური ინტენსივობა:

$$Y = \int \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left[\frac{1}{e^{h\nu/KT} - 1}\right] d\nu$$

(ინტეგრებისას – რიმანის ზეტა ფუნქცია).

$$Y \propto T^4$$

ფოტონური გაზის წნევა:

$$\boxed{P(\rho, T) = \frac{a}{3} T^4}$$

სადაც $a = 7.56\ 10^{-16}\ N\ m^{-2}\ K^{-4}$

ფოტონური გაზის ენერგიის სიმკვრივე:

$$E_{rad} = aT^4$$

ზოგადად, ფოტონების რიცხვის შენახვა არ მოითხოვება.

ფოტონური წნევა ვარსკვლავებში

ვარსკვლავის შიგნით იდეალური აირი: $P = \frac{\rho}{m_i} KT$

ვირიალის თეორემით მდგრად მდგომარეობაში ვარსკვლავისათვის:

$$E_K = -\frac{1}{2} E_G = \frac{GM}{2R} \qquad T \propto \frac{M}{R}$$

ასევე: $\rho \propto \frac{M}{R^3}$

ვარსკვლავის გრავიტაციული შეკუმშვით გამოწვეული თერმოდინამიკური წნევა: $P_g \propto \frac{M}{R^3}\frac{M}{R} \propto \frac{M^2}{R^4}$

გამოსხივების (ფოტონური) წნევისათვის: $P_r \propto T^4 \propto \frac{M^4}{R^4}$

შესაბამისად რადიაციული და გრავიტაციული წნევების ფარდობისათვის:

$$\boxed{\frac{P_r}{P_g} \propto M^2}$$

გამოსხივების წნევა შესადარი ხდება თერმოდინამიკურთან, როდესაც ვარსკვლავის მასა აჭარბებს 50 მზის მასას (ენერგიის გენერაცია მნიშვნელოვნად მოქმედებს ვარსვკლავის ზომებზე).

მზის მოდელის პარამეტრები

TABLE 2.1 The thermal properties of electromagnetic radiation in equilibrium at two temperatures. A temperature of 6×10^3 K is a typical temperature for the solar surface and 6×10^6 K is a typical temperature for the solar interior.

Property	Solar surface at 6×10^3 K	Solar interior at 6×10^6 K
Average photon energy	1.4 eV	1.4 keV
Photon density, n	4×10^{18} m^{-3}	4×10^{27} m^{-3}
Radiation energy density, u	1 J m^{-3}	10^{12} J m^{-3}
Radiation pressure, P_r	0.33 Pa	0.33×10^{12} Pa
Radiation intensity, σT^4	73 MW m^{-2}	73×10^{12} MW m^{-2}

ფერმიონები

ფაზური სივრცის დაქვნატვა: $\Delta x \Delta p_x = h,$ $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s.

პაულის პრინციპი:

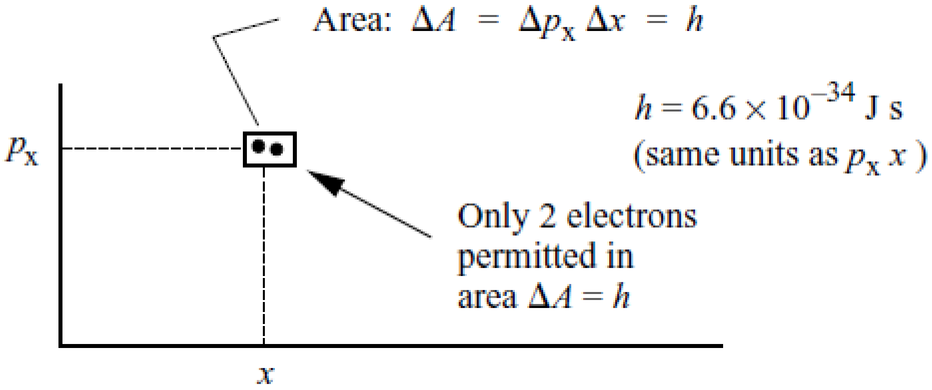


Fig. 3.4: Two-dimensional phase space (x, p_x) for a one-dimensional gas showing an area of $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J s (Planck constant). This area is a quantum state that can contain no more than two electrons.

3 განზომილებიანი ფაზური სივრცე: $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3$

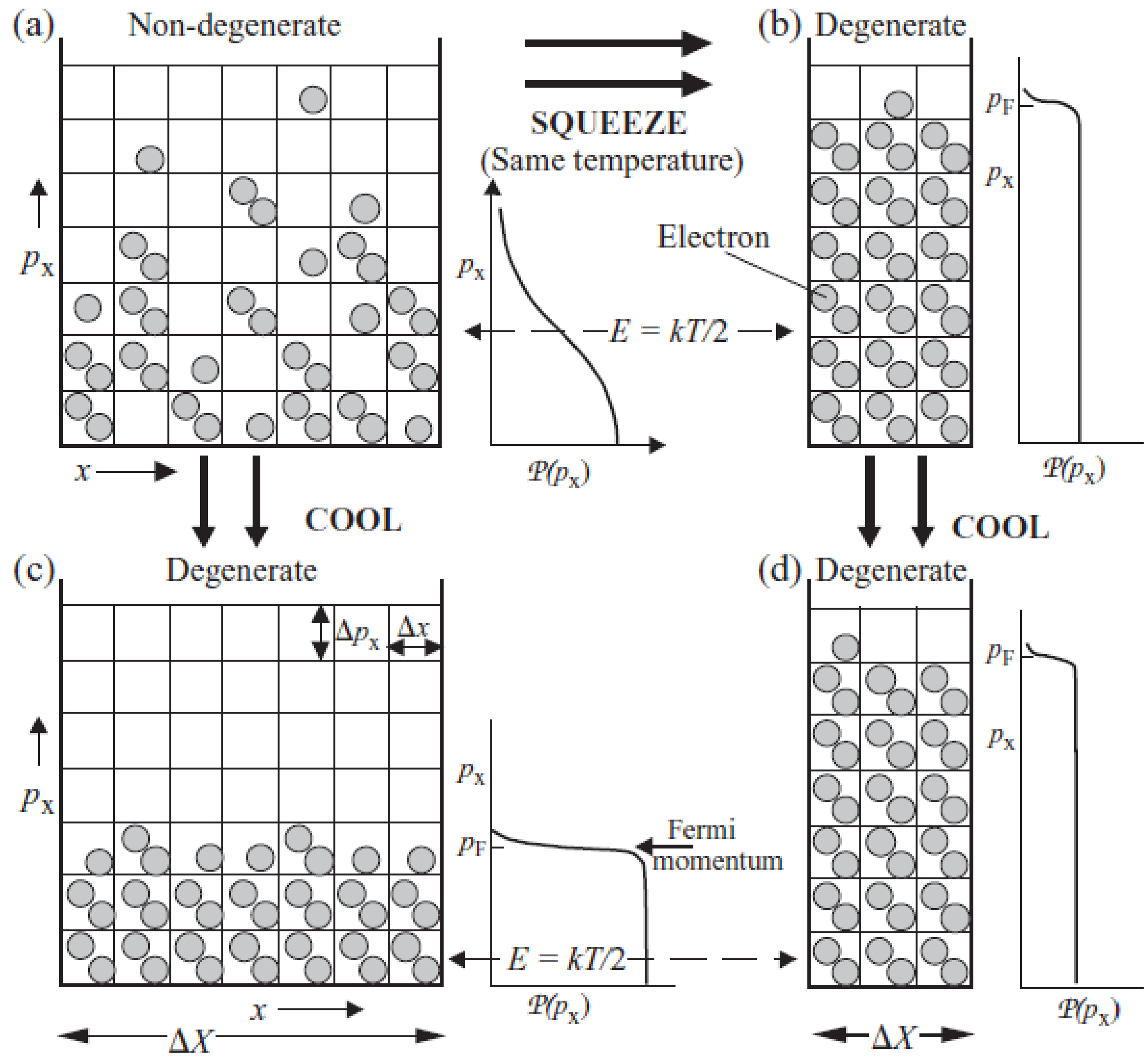
გადაგვარებული ელექტრონული გაზი

გაუსის განაწილება: ->
მართკუთხა განაწილება
(ფერმი იმპულსი);

გადაგვარებული გაზის გაციება:
პროტონების გაციება;

თერმომეტრი:
ელექტრონები

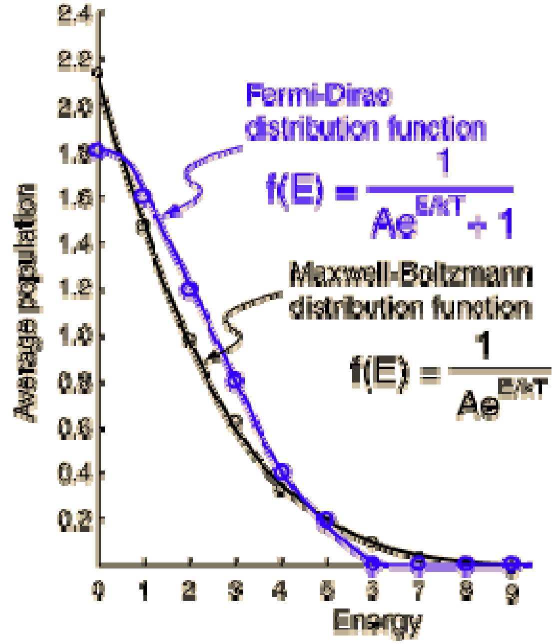
სითბო:
პროტონები



სითბური და მექანიკური თვისებების გაყოფა

ფერმი–დირაკის სტატისტიკა

განაწილების ფუნქცია: $$f(E)=\exp\left[\frac{1}{e^{(E-E_F)/KT}+1}\right]$$



ყველაზე მაღალი ენერგეტიკული დონე: ფერმი ენერგია: E_F

სფეროს მოცულობა იმპულსის ფაზურ სივრცეში: $4/3\pi p_F^3$

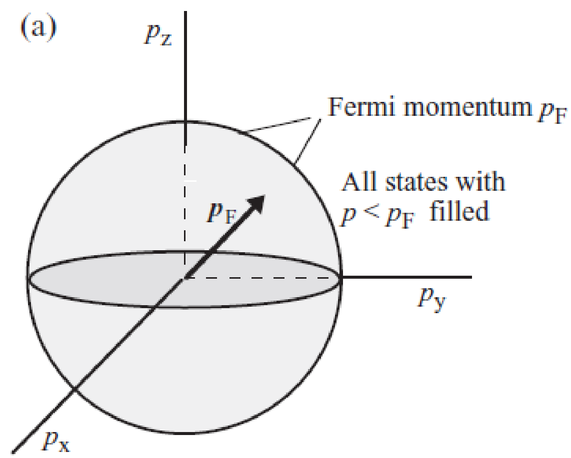
6 განზომილებიან ფაზურ სივრცეში: $4/3\pi p_F^3 V$

ფაზური სივრცის მოცულობის ერთეული: h^3

ერთ მოცულობაში ორი ფერმიონი: $$N_e=\frac{2}{h^3}\frac{4}{3}\pi p_F^3 V$$

ელექტრონების რიცხვის სიმკვრივე: $$n_e=\frac{2}{h^3}\frac{4}{3}\pi p_F^3$$

ფერმის იმპულსი: $$\boxed{p_F=h\left(\frac{3}{8\pi}n_e\right)^{1/3}}$$



ფერმის ენერგია

კლასიკური მიდგომა: $E_F = \dfrac{p_F^2}{2m}$

რელატივიზმი:
ენერგია–იმპულსის ინვარიანტი: $U^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$ $\qquad U_F = \sqrt{(p_F c)^2 + m^2 c^4}$

უძრაობის ენერგიის გამოკლებით: $E_F = U_F - mc^2$

ულტრარელატივისტურ შემთხვევაში: $E_F \approx U_F$

გადაგვარებული ფერმი გაზის წნევა

გაზის წნევა პროპორციულია ფერმიონების ჯამური კინეტიკური ენერგიის (საშუალო ენერგია):

$$P \propto nE_{kin}$$

გადაგვარებული გაზი – ელექტრონების ქვანტური წნევა გაცილებით მეტია პროტონების წნევაზე:

$$P_e >> P_p$$

$$P_e \propto n_e E_{kin}$$

გადაგვარებული გაზისთვის: $$E_{kin} = E_F = \frac{p_F^2}{2m}$$

$$p_F = h\left(\frac{3}{8\pi}n_e\right)^{1/3}$$

გადაგვარებული გაზის წნევა: $$P \propto n_e p_f^2$$

$$\boxed{P \propto (n_e)^{5/3}}$$

გადაგვარებული ფერმის გაზის წნევა

რელატივისტური შემთხვევა:

$$E_F \approx U_F \propto p_F c$$

$$p_F = h\left(\frac{3}{8\pi}n_e\right)^{1/3}$$

$$P_e \propto n_e E_F \propto n_e p_F$$

გადაგვარებული რეკლატივისტური ფერმი გაზის წნევა:

$$\boxed{P \propto \left(n_e\right)^{4/3}}$$

გადაგვარებული ფერმის გაზის წნევა

კლასიკური:

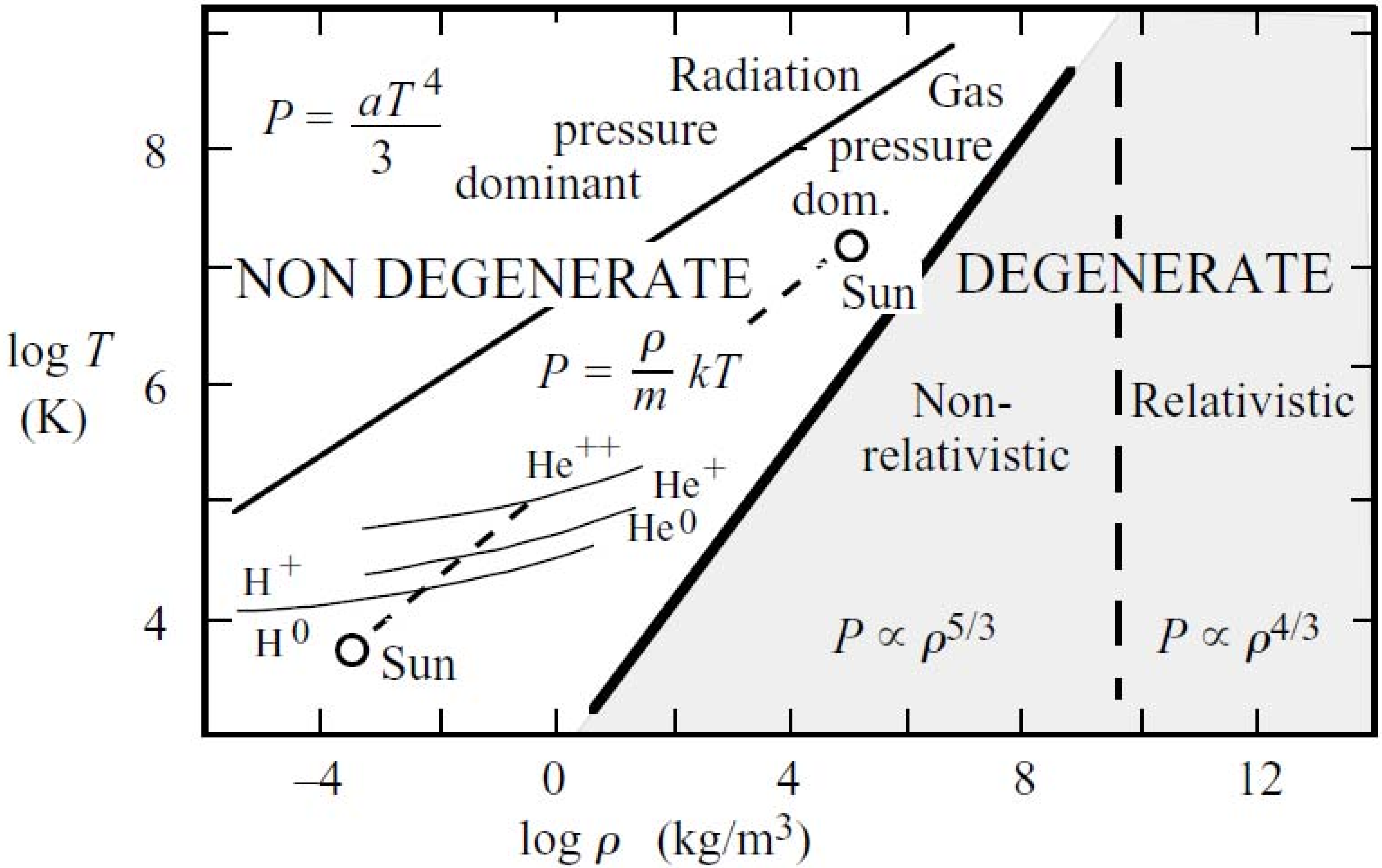
$$P_e = \frac{1}{20}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m_e}\left(\frac{\rho}{\mu_e m_p}\right)^{5/3}$$
$$= 9.92\times10^6\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3} \quad \text{(Pa; nonrelativistic; completely degenerate)}$$

რელატივისტური:

$$P_e = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} ch\left(\frac{\rho}{\mu_e m_p}\right)^{4/3} \quad \text{(Pa; totally relativistic,}$$
$$= 1.232\times10^{10}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}. \quad \text{complete degeneracy)}$$

სიმკვრივის მატებისას, თუკი არარელატივისტური გაზი გადადის რელატივისტურში, გადაგვარებული ვარსკვლავის ცენტრში წნევის ზრდის ტემპი კლებულობს.
თეთრი ჯუჯის კოლაფსი: მაგალითად – Ia ზეახალი.

ვარსკვლავების მდგომარეობების დიაგრამა



http://www.tevza.org/home/course/PCO2012/

H. Bradt, “Astrophysics Processes” (Cambridge University Press, 2008)
(subsections 3.2-3.6)

A. C. Phillips, “The Physics of Stars” (Whiley 1994)
(subsections 2.2, 2.3)