

Lecture 6

ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

ალ. თევზაძე (2011)

N-Body Problem

Fields: Eulerian description

Bodies: Lagrangian description

One particle:

$$d^2 r / d t^2 = f$$

Interaction of N particles

$$d^2 r_i / d t^2 = \Sigma f_i$$

Forces: Gravity, Electrostatic (+/-), ...

ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

ალ. თევზაძე (2011)

N-Body Problem

Applications:

- Astronomy: *Formation of Galaxies*
- Cosmology: *Expansion of the Universe*
- Plasma Physics: *Charged Particle Simulations*
- Hydrodynamics: *Dynamics of Point Vortices*
- *Generalized Hamiltonian Systems*
- Biology/Chemistry: *Molecular Dynamics*
- Ecology: *Animal, Plant Distribution*

ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

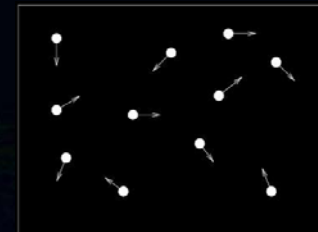
ალ. თევზაძე (2011)

N-Body Problem

Dynamics of N Particle

Initial Conditions:

(X_0, V_0)



1. Δt
2. Update $r_{i+1} = r_i + v_i \Delta t$
3. Calculate $f = \Sigma f_i$
4. Update $v_{i+1} = v_i + \Delta t f/m$

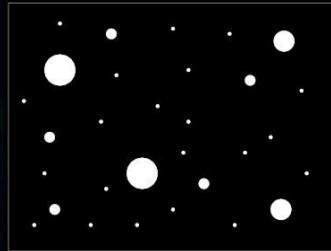
ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

ალ. თევზაძე (2011)

Particle-Particle (PP)

Straightforward Method

1. Shorter time step
for close particles (Δt);
2. Collision Rules ($\Delta r = r_{min}$)



Number of interactions per time step

$$N(N-1) \sim O(N^2)$$

(!!!)

ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

ალ. თევზაძე (2011)

N-Body: Approximations

Methods:

Raw:	PP	
Other:	PM	(1970)
	P3M	(1980)
	PM2	
	TC	(1985)
	NGPM	(1988)
	FMM	(1988)

- Mesh Based Algorithms
- Tree Based Algorithms
- Multipole Based Algorithms

ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

ალ. თევზაძე (2011)

Method: Mesh

Uniform grid

Construct mass density over mesh: $\rho(x)$

Potential over mesh: $\phi(x)$

Poisson Equation

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = 4\pi G \rho(\vec{x})$$

Force: Particle in potential field $\phi(x)$

ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

ალ. თევზაძე (2011)

Method: Mesh

Accuracy requirement:

1 Particle : (1+) cells

N – Number of particles

m – Mesh pixels

Mesh based method (FFT): $O(m \log(m))$

Problem: Nonuniform distribution

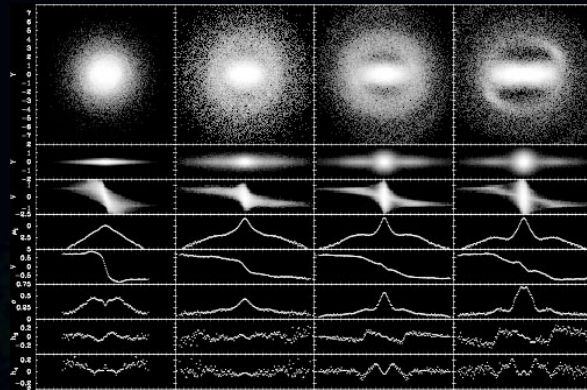
$m \gg N$: $m \log(m) > N^2$

ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

ალ. თევზაძე (2011)

Method: Mesh

Bar Galaxy Simulations: Particles + Potential



ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

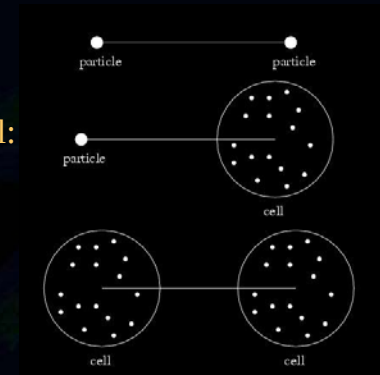
ალ. თევზაძე (2011)

Method: Tree

Introduce **cells**

Particles inside the cell:
cell mass center

Mass center hierarchy:
Tree



ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

ალ. თევზაძე (2011)

Method: Tree

Hierarchy:
divide-and-conquer

Long distance: Bigger Cell, Mass Center

Short distance: Smaller Cell, Mass Center

Min distance: Particle

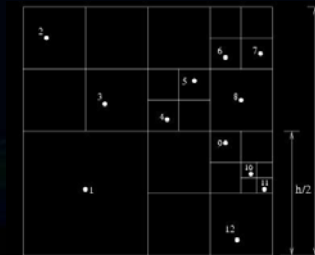
Burnes-Hut algorithm

ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

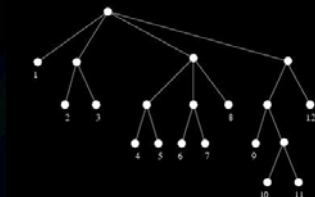
ალ. თევზაძე (2011)

Method: Burnes-Hut Tree

Quadrante
Partition



2D Hierarchy Tree



ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

ალ. თევზაძე (2011)

Method: Burnes-Hut Tree

Cell Opening Criterion:

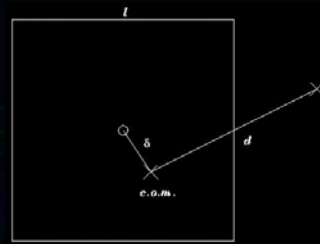
L – cell size

θ – opening angle parameter

($0 < \theta < 1$)

d – distance:
(particle – cell mass center)

$$d < L/\theta$$

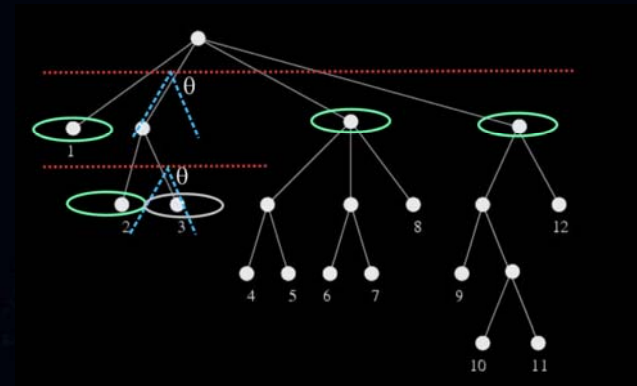


ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

ალ. თევზაძე (2011)

Method: Burnes-Hut Tree

Reconstructing Forces



ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

ალ. თევზაძე (2011)

Method: Burnes-Hut Tree

Cost:

$\theta = 0.3$

Number of Interactions: $N_i \sim 28 \pi / 3 \theta^3 N \log(N)$

$$N_i < N^2 : N > 1000$$

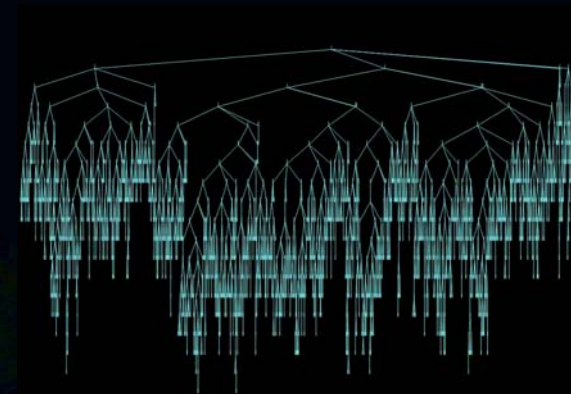
Best for higher number of particles

ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

ალ. თევზაძე (2011)

Method: Tree

Example: Barnes-Hut tree



ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

ალ. თევზაძე (2011)

Method: Multipole

Any cluster of particles:

Net force - **multipole expansion**

Monopole, Dipole, Quadrupole, etc.

- Multipole expansion
- Error bounds on dropping terms

ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

ალ. თევზაძე (2011)

Method: Multipole

Multipole components

p	1	2	3	4
Terms	1	3	5	7
Potential	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r^2}$	$\frac{1}{r^3}$	$\frac{1}{r^4}$
Force	$\frac{1}{r^2}$	$\frac{1}{r^3}$	$\frac{1}{r^4}$	$\frac{1}{r^5}$

ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

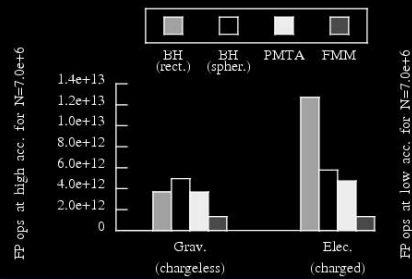
ალ. თევზაძე (2011)

Method: Multipole

Tree Hierarchy + Multipoles

Fast Mutipole Method (FMM)

Multipole Expansion: Cartesian, Spherical, ...

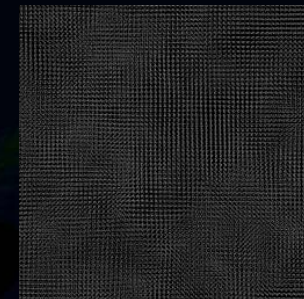
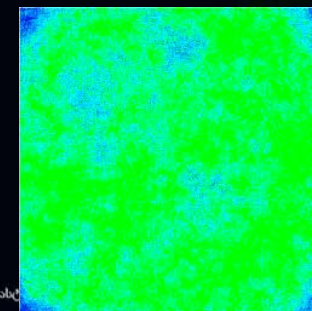


ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

ალ. თევზაძე (2011)

Galaxy

Formation of the Galaxy Cluster



**Cold Dark Matter
Cosmology Simulation
17 million particles**

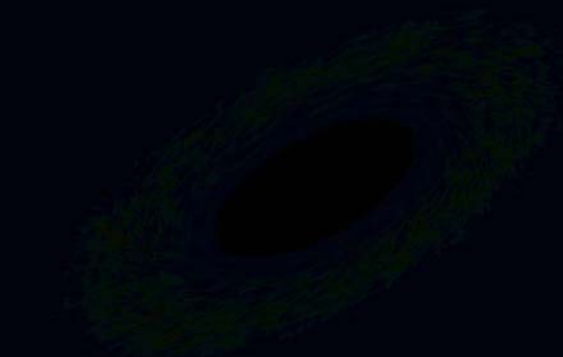
ასტ

დედლირება

ალ. თევზაძე (2011)

end

www.tevza.org/home/course/modelling-II_2011



ასტროფიზიკის და პლანეტის ფიზიკის ამოცანების მოდელირება

პლ. თევზაძე (2011)