ამოცანა 1.

მოცემულ კერძო წარმოებულიანი დიფერენციალურ განტოლებებს გააჩნიათ ანალიზური ამონახსნები. აირჩიეთ ერთ-ერთი განტოლება და ამოხსენით რიცხვითი სასრული სხვაობების მეთოდით, როდესაც საწყისი და სასაზღვრო პირობები აკმაყოფილებს ანალიზურ ამონახსნს.

1.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a w^n.$$

$$w(x,t) = b\big(x + C_1 t + C_2\big)^{\frac{2}{1-n}}, \qquad b = \left[\frac{2(1+n)(C_1^2-1)}{a(1-n)^2}\right]^{\frac{1}{n-1}};$$

$$w(x,t) = \left[k(t+C_1)^2 - k(x+C_2)^2\right]^{\frac{1}{1-n}}, \qquad k = \tfrac{1}{4}a(1-n)^2,$$

2.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a w + b w^3.$$

$$w = \pm\sqrt{-\frac{a}{b}}\,\tanh\left[\sqrt{\frac{a}{2(1-C_1^2)}}\,(x + C_1 t + C_2)\right],$$

$$w = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}\,\tan\left[\sqrt{\frac{a}{2(C_1^2-1)}}\,(x + C_1 t + C_2)\right],$$

3.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a e^{\beta t} w^k.$$

$$w(x,t) = \left\{C\exp\left[\frac{\beta(k-1)}{4(k+1)}(t \pm x)\right] + \frac{\sqrt{a}}{\beta}(1-k)e^{\beta t/2}\right\}^{\frac{2}{1-k}},$$

$$w(x,t) = \left\{C\exp\left[\frac{\beta(k-1)}{4(k+1)}(t \pm x)\right] - \frac{\sqrt{a}}{\beta}(1-k)e^{\beta t/2}\right\}^{\frac{2}{1-k}},$$

იპოვეთ რიცხვითი ამონახსნის ცდომილების პირველი და მეორე ნორმები. აჩვენეთ ნორმების კრებადობის სიჩქარე სივრცითი კოორდინატის მიმართ.

ამოცანა 2.

სასრული სხვაობების მეთოდით ამოხსენით ორგანზომილებიანი სითბოგამტარებლობის განტოლება გარეშე წყაროს წევრით. ამონახსნი შეადარეთ კოშის ამოცანის ანალიზურ ფორმას.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \Phi(x, y, t).$$

Domain: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Cauchy problem.

$w = f(x, y)$ at $t = 0$.

ამონახსნი:

$$w(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta, t)\, d\xi\, d\eta + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \tau) G(x, y, \xi, \eta, t - \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\tau,$$

$$G(x, y, \xi, \eta, t) = \frac{1}{4\pi a t} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{4at}\right].$$

1. აირჩიეთ საწყისი ცენტრში ლოკალიზებული გაუსის პიკის ევოლუცია: *f(x,y)* წყაროს გარეშე;
2. აირჩიეთ საწყისი მუდმივი განაწილება *f(x,y)=const.* ცენტრში ლოკალიზებული დროში ჯუდმივი გაუსის ფორმის წყაროს პირობებში: *Φ(x,y);*
3. აირჩიეთ კვადრატული ფორმის სივრცეში მუდმივი და დროში ოსცილირებადი გარეშე წყარო *Φ(x,y)=const:* $|x|<L$, $|y|<L$, $x=(-L,L)$; $y=(-L,L)$;

ერთმანეთ შეადარეთ სასრული სხვაობების და რიცხვითი ინტეგრების საშუალებით მიღებული ამოხსნები. ამოხსენით ამოცანა დირიხლეს (w=const.) და ნეიმანის სასაზღვრო პირობების (d/dx w = const) შემთხვევაში.