დიფერენციალური განტოლებები

ეილერის მეთოდი

საწყისი მნიშვნელობის ამოცანა

$$y' = f(x, y); \qquad y(x_0) = y_0.$$

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + h^2 \frac{y''(X)}{2},$$

$$y(x_n + h) \approx y(x_n) + hy'(x_n).$$

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n .$$

$$y'_n = f(x_x, y_n),$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).}$$

<u>მაგალითი:</u>

განტოლება: $$y' = 0.5y$$

ანალიზური ამონახსნი: $$y(x) = e^{x/2}.$$

დისკრეტული შაბლონი: $$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\frac{y_n}{2} \\ &= \left(1 + \frac{h}{2}\right) y_n . \end{aligned}$$

x	Euler(x)	Exact(x)
0.00	1.00000	1.00000
0.05	1.02500	1.02532
0.10	1.05063	1.05127
0.15	1.07689	1.07788
0.20	1.10381	1.10517
0.25	1.13141	1.13315
⋮	⋮	⋮
1.00	1.63862	1.64872
2.00	2.68506	2.71828
3.00	4.39979	4.48169
⋮	⋮	⋮
5.00	11.81372	12.18249
10.00	139.56389	148.41316

მეორე რიგის წარმოებულიანი განტოილება

$$y'' = f(x, y) \ ,$$

$$Z_1 \equiv y$$
$$Z_2 \equiv y'$$

პირველი რიგის დიფ განტოლებების სისტემა:

$$Z_2' = f(x, Z_1)$$
$$Z_1' = Z_2$$

დისკრეტული ფორმა:

$$Z_2^{n+1} = Z_2^n + hf(x_n, Z_1^n)$$
$$Z_1^{n+1} = Z_1^n + hZ_2^n$$

Predictor-Corrector მეთოდი

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

Predict: $\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i).$

Correct: $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h\big(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\big).$

რუნგე-კუტა მეთოდი

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

$$k_i = f\left(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right).$$

aij , b, c პარამეტრებს განსაზღვრავს ბაჩერის ცხრილი:

ტუნგე-კუტა მეთოდის რიგის მიხედვით რეკურენტული ფორმულა მოკლედ შეიძლება ჩავწეროთ ამ ცხრილის მეშვეობით.

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array}$$

პირველი რიგი (ეილერის მეთოდი)

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

ზოგადი მეორე რიგის მეთოდი:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 \\ \hline & 1-\frac{1}{2x} & \frac{1}{2x} \end{array}$$

რუნგე-კუტას მესამე რიგის მეთოდი:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

კლასიკური რუნგე-კუტას მეოთხე რიგის მეთოდი:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

3/8 რიგის მეთოდი (Kutta 1901):

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

სპეციფიკური ამოცანების მეთოდები:

$$y_{n+1}^* = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i^* k_i,$$

$$e_{n+1} = y_{n+1} - y_{n+1}^* = h\sum_{i=1}^{s}(b_i - b_i^*)k_i,$$

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \\ & b_1^* & b_2^* & \dots & b_s^* \end{array}$$

დორმანდ-პრინცის მეთოდი:

0							
1/5	1/5						
3/10	3/40	9/40					
4/5	44/45	−56/15	32/9				
8/9	19372/6561	−25360/2187	64448/6561	−212/729			
1	9017/3168	−355/33	46732/5247	49/176	−5103/18656		
1	35/384	0	500/1113	125/192	−2187/6784	11/84	
	5179/57600	0	7571/16695	393/640	−92097/339200	187/2100	1/40
	35/384	0	500/1113	125/192	−2187/6784	11/84	0

ამოცანები: Lab_5