

ფურიე ანალიზი

უწყვეტი ფურიე გარდაქმნა:

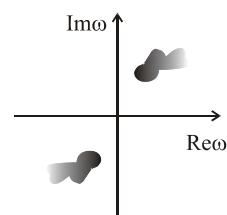
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$

$f(t)$ – რეალური;

$F(\omega)$ – კომპლექსური;

$$F^*(-\omega) = F(\omega)$$

ფიზიკური ფუნქციის ფურიე სახის სიმეტრია;



- ფურიე გარდაქმნის თვისებები;

სუპერპოზიცია: $f_1(t) + f_2(t) \rightarrow F_1(\omega) + F_2(\omega)$

კონვოლუცია: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t + \tau) d\tau \rightarrow F_1(\omega) F_2^*(\omega)$

- წრფივი დიფ. განტოლების სპექტრალური ფორმა;

დისკრეტული ფურიე გარდაქმნა:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{j=1}^N x(j) \omega_N^{(j-1)(k-1)} \\ x(j) &= (1/N) \sum_{k=1}^N X(k) \omega_N^{-(j-1)(k-1)} \end{aligned}$$

Length-Scales:

Domain Size: $L = X_N - X_1$

Step Size: $\Delta X = X_k - X_{k-1}$, $\Delta X = L/(N-1)$

Wave-Numbers:

Maximal wave-number: $K = 2\pi / \Delta X$

Minimal wave-number: $\Delta K = 2\pi / L$

Number of Fourier Harmonics: N

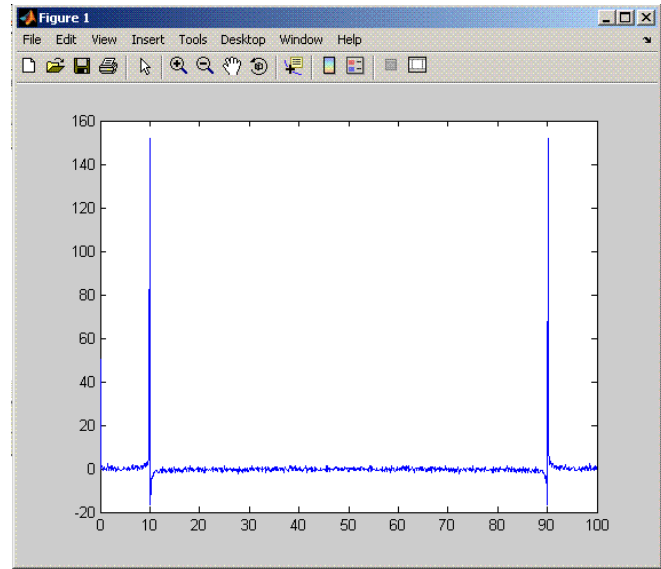
Matlab:

```
>> t0=0; tfin = 100; dt=0.1;
>> t = (t0:dt:tfin);
>> T = tfin-t0;
>> N = length;

>> f = sin(2*pi*t) + 0.1*rand(N);

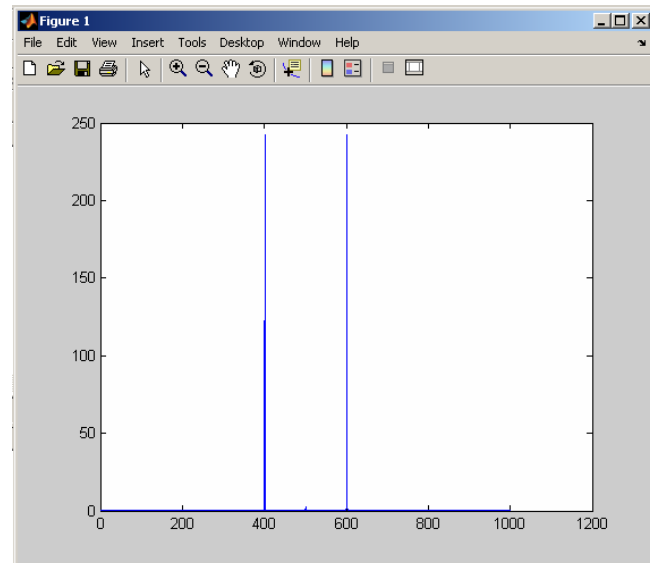
>> G = fft(f);

>> plot(t,real(G));
```



Spectral energy density:

```
>> GG = fftshift(G);
>> Eomega = abs(GG).^2;
>> plot(Eomega);
```

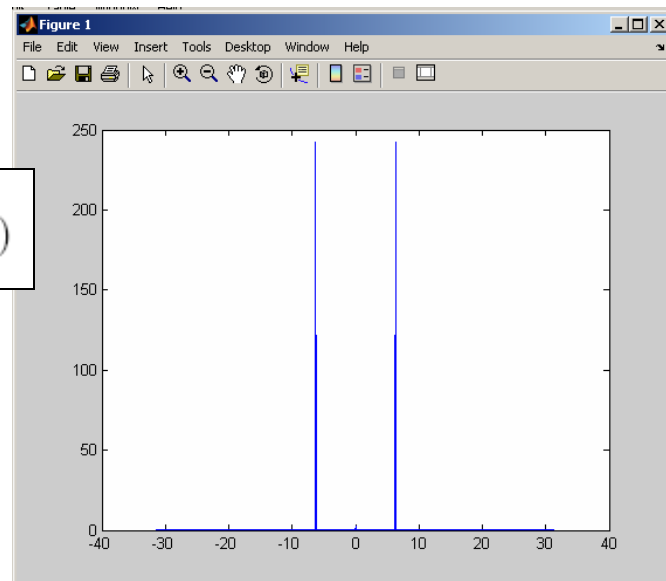


Frequencies:

$$\Delta\omega_{max} = \frac{2\pi}{\Delta t}$$
$$\Delta\omega_{min} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = (-\Delta\omega_{max}/2 : \Delta\omega_{min} : \Delta\omega_{max}/2)$$

```
>> omega = (-pi/dt : 2*pi/T : pi/dt );
>> plot(omega,Eomega);
```



ჰილბერტის გარდაქმნა

სიგნალის დამუშავება: ჰილბერტის გარდაქმნა და დისკრეტული ფურიე გაშლა;
Pikovsky et al. Appendix A2.

მაგალითი:

დაფინგის ოსცილატორი: $x''(t) + 0.05 x'(t) + x(t) + x(t)^3 = 0$

იპოვეთ: $x(t)$ და რხევის ტრაექტორიის მომვლები (ამპლიტუდა) $A(t)$.

მონაცემთა ანალიზი:

Load sunspot.dat

იპოვეთ მზის ლაქების ვარიაციის პერიოდი;

To do:

Matlab Functions:

fft

fftshift

ifft

ifftshift

```
f(t) = sin(t)*exp(0.2*t) + cos(3*t)*exp(-0.1*t) + 0.2*rand
```

1. Plot $E(\omega)$ vs. ω
2. Plot $\text{Re}(F)$ vs. $\text{Im}(F)$
3. $G1(\omega) = F(\omega) + \text{random (physical) noise in phase};$
4. $G2(\omega) = F(\omega) + \text{random (physical) noise in amplitude};$
5. plot on single graph: $f(t)$, $f1(t)$, $f2(t)$

Random noise: $\text{Max amplitude} = 0.2 * \text{Max}(F);$

$F = A * \exp(i * \phi)$: A - Amplitude; ϕ - phase;

$f1 = \text{ifft } G1$

$f2 = \text{ifft } G2$

6. `subplot(2,2,1); plot f'(t) vs f(t)`
`subplot(2,2,2); plot f1' vs f1`
`subplot(2,2,3); plot f2' vs f2`

დანართი: ფუნქციის ფურიე სახეების ცხრილი

Function	Fourier transform unitary, angular frequency
$f(x)$	$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$
1	$\sqrt{2\pi} \cdot \delta(\omega)$
$\delta(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
e^{iax}	$\sqrt{2\pi} \cdot \delta(\omega - a)$
$\cos(ax)$	$\sqrt{2\pi} \cdot \frac{\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)}{2}$
$\cos(ax^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
x^n	$i^n \sqrt{2\pi} \delta^{(n)}(\omega)$
$\frac{1}{x}$	$-i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\omega)$
$ x ^\alpha$	$\frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\pi\alpha/2) \Gamma(\alpha+1)}{ \omega ^{\alpha+1}}$
$\operatorname{sgn}(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{i\omega}$
$u(x)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{i\pi\omega} + \delta(\omega) \right)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT)$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$
$\log x $	$-\frac{\sqrt{\pi/2}}{ \omega } - \sqrt{2\pi} \gamma \delta(\omega)$
$(\mp ix)^{-\alpha}$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\alpha)} u(\pm\omega) (\pm\omega)^{\alpha-1}$