გაუსის კვადრატურა

გამოვითვალოთ ინტეგრალი ორი წერტილის გამოყენებით. მაგ. ტრაპეციის წესი:

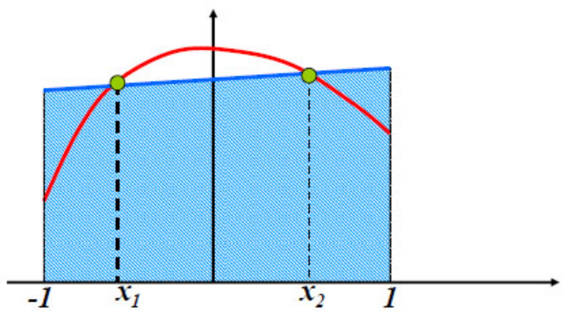
$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(a) + c_2 f(b) = \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b)$$

უფრო ზუსტი შეფასებისათვის შემოვიყვანოთ 4 თავისუფალი პარამეტრი:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

გაუსის კვადრატურების მეთოდი: პარამეტრები C_1, C_2, X_1, X_2 გამოვთვალოთ დაშვებიდან, რომ ფორმულა ზუსტ შედეგს გვაძლევს კუბური პოლინომიალისათვის.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)dx$$

$$= \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4}\right]_a^b$$

$$= a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) + a_3\left(\frac{b^4-a^4}{4}\right)$$

გაუსის ფორმულა:

$$\int_a^b f(x)dx = c_1\left(a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2 + a_3 {x_1}^3\right) + c_2\left(a_0 + a_1 x_2 + a_2 {x_2}^2 + a_3 {x_2}^3\right)$$

$$a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) + a_3\left(\frac{b^4-a^4}{4}\right)$$
$$= c_1\left(a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2 + a_3 {x_1}^3\right) + c_2\left(a_0 + a_1 x_2 + a_2 {x_2}^2 + a_3 {x_2}^3\right)$$
$$= a_0(c_1 + c_2) + a_1(c_1 x_1 + c_2 x_2) + a_2\left(c_1 {x_1}^2 + c_2 {x_2}^2\right) + a_3\left(c_1 {x_1}^3 + c_2 {x_2}^3\right)$$

პირობები:

$$b - a = c_1 + c_2 \qquad \frac{b^2-a^2}{2} = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\frac{b^4-a^4}{4} = c_1 {x_1}^3 + c_2 {x_2}^3 \qquad \frac{b^3-a^3}{3} = c_1 {x_1}^2 + c_2 {x_2}^2$$

ამონახსნები:

$$x_1 = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2} \qquad c_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$x_2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2} \qquad c_2 = \frac{b-a}{2}$$

გაუსის კვადრატურების ფორმულა:

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right) + \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right)$$

მაღალი რიგის გაუსის კვადრატურა:

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

$$\int_a^b \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5\right)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . + c_n f(x_n)$$

გაუსის კვადრატურის სტანდარტული ცხრილი [-1,1] ინტერვალზე:

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} c_i g(x_i)$$

Points	**Weighting Factors**	**Function Arguments**
2	c_1 = 1.000000000 c_2 = 1.000000000	x_1 = -0.577350269 x_2 = 0.577350269
3	c_1 = 0.555555556 c_2 = 0.888888889 c_3 = 0.555555556	x_1 = -0.774596669 x_2 = 0.000000000 x_3 = 0.774596669
4	c_1 = 0.347854845 c_2 = 0.652145155 c_3 = 0.652145155 c_4 = 0.347854845	x_1 = -0.861136312 x_2 = -0.339981044 x_3 = 0.339981044 x_4 = 0.861136312
5	c_1 = 0.236926885 c_2 = 0.478628670 c_3 = 0.568888889 c_4 = 0.478628670 c_5 = 0.236926885	x_1 = -0.906179846 x_2 = -0.538469310 x_3 = 0.000000000 x_4 = 0.538469310 x_5 = 0.906179846
6	c_1 = 0.171324492 c_2 = 0.360761573 c_3 = 0.467913935 c_4 = 0.467913935 c_5 = 0.360761573 c_6 = 0.171324492	x_1 = -0.932469514 x_2 = -0.661209386 x_3 = -0.2386191860 x_4 = 0.2386191860 x_5 = 0.661209386 x_6 = 0.932469514

ინტეგრალის გარდაქმნა სტანდარტულ ინტერვალზე გაუსის კვადრატურის გამოსაყენებლად:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)\frac{b-a}{2}dt$$

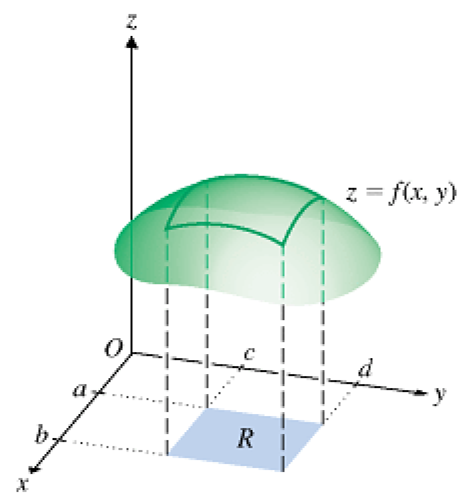
მრავალჯერადი ინტეგრალები

1 - მრავალჯერადი ინტეგრალის ანალიზურად დაყვანა ერთჯერად ინტეგრალზე და შემდეგ რიცხვითი გამოთვლა;

2 - ინტეგრება თანმიმდევრობით:

$$I = \int_D f(x,y)\,dxdy$$

$$I = \int_a^b \phi(x)\,dx, \qquad \phi(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy.$$



$$I \approx \sum_{i=1}^{n} u_i \phi(x_i),$$

$$\phi(x_i) \approx \sum_{j=1}^{n} v_j f(x_i, y_j),$$

$$I \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} f(x_i, y_j), \qquad w_{ij} = u_i v_j.$$

ტრაპეციების წესი:

$$I \approx hk \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}},$$