

მოტივაცია

იპოვეთ პლანეტის კოორდინატები დროის t მომენტში.

ელიფსის განტოლება:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ორბიტის წერტილი: $P(x,y)$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

ექსცენტრისიტეტი:

ექსცენტრული ანომალიის კუთხე: E

გამოთვლა: $\cos E = \frac{x}{a}, \quad \sin E = \frac{y}{b}$

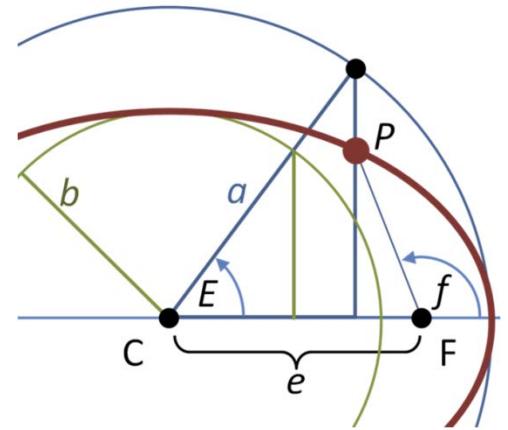
$$\begin{aligned} x &= a \cos(E - e) \\ y &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E \end{aligned}$$

საშუალო ანომალია:

რა კუთხეს მოწერდა პერიასტრიდან წრიულ ორბიტაზე თანაბარი სიჩქარით მბრუნავი სხეული: M

$$M = E - e \sin(E), \quad 0 < e < 1,$$

ვიპოვოთ E მოცემული M -სათვის ...



იტერაციული მეთოდები

ფუნქციის ნულები

ამოვხსნათ არაწრფივი (ტრანსცედენტული) განტოლება:

$$f(x) = 0,$$

ამოხსნის 3 წესი:

3 rules

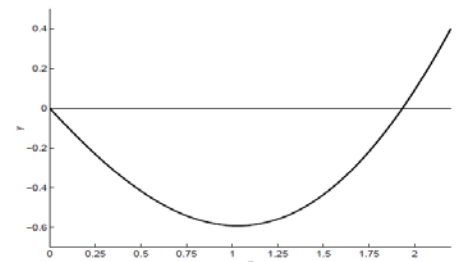
1. graph the function
2. make a graph of the function
3. make sure that you have made a graph of the function

1. ბისექციის მეთოდი

საშუალო მნიშვნელობის თეორემა

$$f(a) < k$$

$$f(b) > k$$



$f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ მოიძებნება x_1 რომლისთვისაც $f(x_1)=k$

$$f(X_{\min}) < 0, f(X_{\max}) > 0,$$

$$f(X_{\min}) > 0, f(X_{\max}) < 0,$$

$f(X_{\min}) \cdot f(X_{\max}) < 0$: მოიძებნება $X_{\min} < X_k < X_{\max} : f(X_k) = 0$. ამოცანა: ვიპოვოთ X_k .

$$f(a_0)f(b_0) < 0.$$

იტერაციებით გადავდივართ:

$$(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset (a_3, b_3) \subset \dots$$

$$I_k = (a_k, b_k),$$

k იტერაციის ინტერვალის შუა წერტილი: $m_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k).$

$$f(m_k) \neq 0.$$

$$I_{k+1} = (a_{k+1}, b_{k+1})$$

შემდეგი იტერაციისათვის ინტერვალის შერჩევის წესი:

$$(a_{k+1}, b_{k+1}) = \begin{cases} (m_k, b_k), & \text{if } f(m_k)f(a_k) > 0; \\ (a_k, m_k), & \text{if } f(m_k)f(a_k) < 0. \end{cases}$$

განსაზღვრების თანახმად: $f(a_{k+1})f(b_{k+1}) < 0$

ინტერვალის სიგრძის შემცირება n იტერაციის შემდეგ: (a_n, b_n)

$$2^{-n}(b_0 - a_0).$$

ზუსტი ამონახსნი: α

ბიჯების რაოდენობა: n

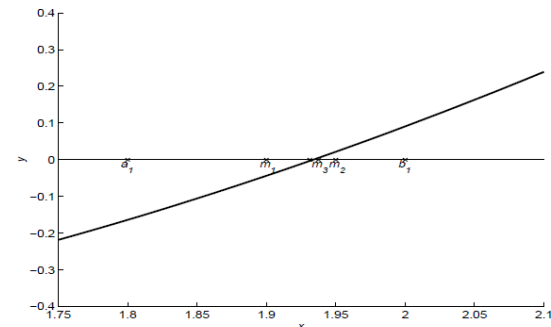
რიცხვითი ამონახსნი: m_n

$$|\alpha - m_n| < 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0).$$

$$10^{-1} \approx 2^{-3.3}$$

წინასწარ განსაზღვრული სიზუსტე: δ

$$\log_2((b - a)/\delta)$$



შუა წერტილის დათვლის მეთოდი:

$$m = a + \frac{1}{2}(b - a)$$

მაგალითი:

$$(x/2)^2 - \sin x = 0.$$

n	a_n	b_n	m_n
1	1.8	2	1.9
2	1.9	2	1.95
3	1.9	1.95	1.925
4	1.925	1.95	1.9375
5	1.925	1.9375	1.93125
6	1.93125	1.9375	1.934375

ფსევდოკოდი:

```

fa = f(a);
while |b - a| > δ
    m = a + (b - a)/2;
    fm = f(m);
    if fm · fa ≤ 0
        b = m;
    else
        a = m; fa = fm;
    end;
end;
root = a + (b - a)/2;
    
```

ორ საფეხუროვანი ბისექციის მეთოდი (ერთზე მეტი მოსალოდნელი ფესვი)

1. Hunting stage
 2. Iterative stage
- „გაყავი და იბატონე“

1. საწყისი ბიჯი d

$$f(a + d), f(a + 2d), f(a + 4d), \dots,$$

სანამ

$$f(a)f(a + 2^k d) < 0.$$

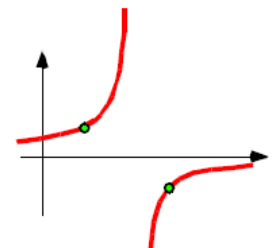
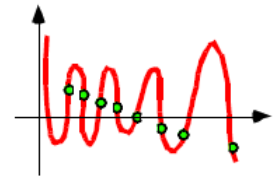
დავიმახსოვრეთ ფესვების პოზიციები: k .

3. სტანდარტული ბისექციის მეთოდი ყოველ ფესვთან ახლოს;

ბისექციის მეთოდი:

- + გარანტირებული კრებადობა მარტივ ფესვზე;
- + კრებადობის მოსალოდნელი ტემპი;
- + საჭირო სიზუსტის არსებობა;

- განშლადობა პოლუსებზე;
- ჯერადი ნულები (ჰარმონიული ფუნქცია, ცილინდრული ფუნქცია);
- საჭიროა ინტერვალის შემოყვანა;
- ყველაზე ნელი იტერაციული მეთოდი;



დავალება

ა) იპოვეთ ფუნქციის ნულები:

- (a) $4 \sin x + 1 - x$; (b) $1 - x - e^{-2x}$; (c) $(x + 1)e^{x-1} - 1$;
 (d) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8$; (e) $e^x + x^2 + x$; (f) $e^x - x^2 - 2x - 2$; (g) $3x^2 + \tan x$.

ბ)

The following equations all have a root in the interval $(0, 1.6)$. Determine these with an error less than 10^{-6} using the bisection method.

(a) $x \cos x = \ln x$; (b) $2x = e^{-x}$; (c) $e^{-2x} = 1 - x$.

გ)

The choice of m_k as the *arithmetic* mean of a_{k-1} and b_{k-1} in the bisection method minimizes the worst case maximum *absolute* error. If in the case that $ab > 0$ we take instead

$$m_k = \sqrt{a_k b_k}$$

i.e., the *geometric* mean, then the worst case *relative* error is minimized. Do Example 6.1.2 using this variation of the bisection method.

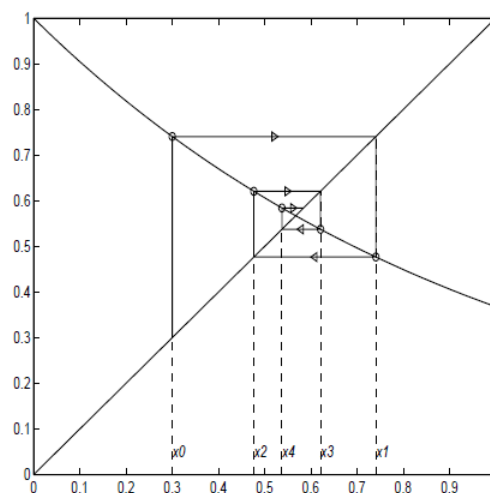
Fixed-Point Iteration

$$x = \phi(x).$$

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \phi(\alpha),$$

ალფა - $x \rightarrow \phi(x)$ სახეის ფიქსირებული წერტილია;



ფიქსირებული წერტილისკენ მიზიდვა, ან განზიდვა;

მიზიდვისათვის:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq m|x - y|, \quad m < 1,$$

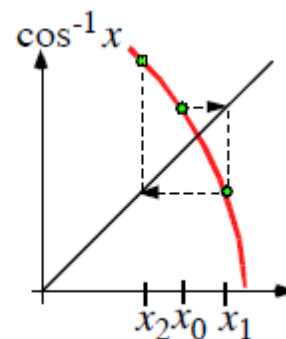
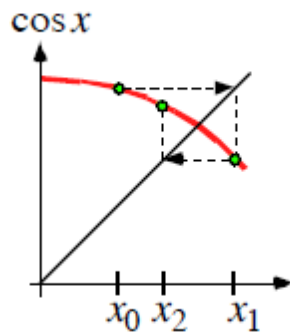
- განვსაზღვროთ შემოვლის მიმართულება;
მაგალითად:

$$x - \cos x = 0$$

$$x_{k+1} = \cos x_k$$

or

$$x_{k+1} = \cos^{-1} x_k$$



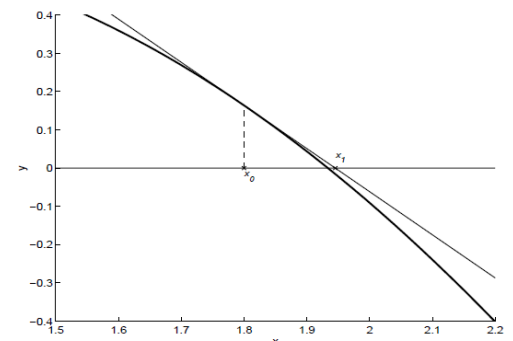
2. ნიუტონის მეთოდი (Newton-Raphson)

არსებობს $f(x)$ და მისი პირველი წარმოებული;

$$f(x) = 0$$

$$y = f(x)$$

$$\text{თუ } f'(x_n) \neq 0.$$



$f(x)$ წრფივი აპროქსიმაცია მხეხით და წრფის x ღერძთან გადაკვეთის წერტილის პოვნა;

$$T(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) = 0,$$

პირველი ტრუნკაცია (ტეილორის მწკრივი);

შემდგომი იტერაცია:

$$x_{n+1} = x_n + h_n, \quad h_n = -f(x_n)/f'(x_n).$$

ამონახსნი:

$$|h_n| < \delta$$

მაგალითი:

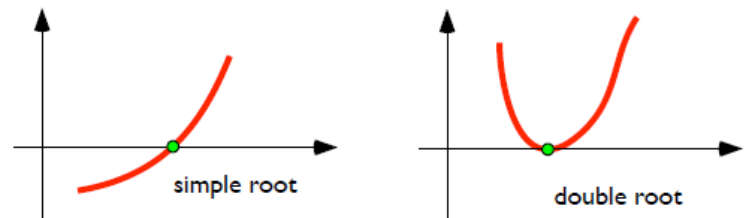
$$f(x) = (x/2)^2 - \sin x = 0$$

$$f'(x) = x/2 - \cos x,$$

$$x_0 = 1.8$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	h_n
0	1.8	-0.163847 630878	1.127202 094693	-0.145357 812631
1	1.945357 812631	0.015436 106659	1.338543 359427	0.011532 018406
2	1.933825 794225	0.000095 223283	1.322020 778469	0.000072 028582
3	1.933753 765643	0.000000 003722	1.3219174 29113	0.000000 002816
4	1.933753 762827			

- + კვადრატული კრებადობა მარტივ ფესვთან;
- + ქრფივი კრებადობა რთულ ფესვთან



პრობლემები:

- იტერაციები შეიძლება გახდეს განშლადი (გადაღუნვის წერტილი)
- საჭიროა წარმოებულის გამოთვლა;
- ვერ ვაფასებთ ცდომილების ფუნქციას;

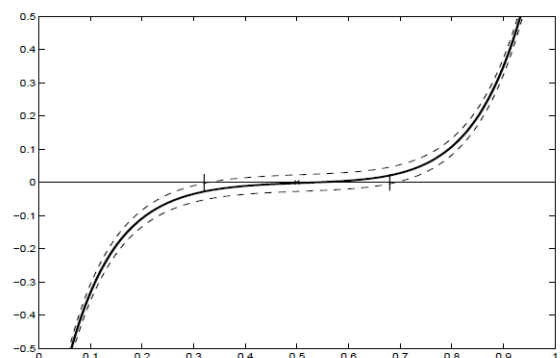


Figure 6.5.1. An ill-conditioned root.

დაზღვეული ნიუტონის მეთოდი

ბისექცია + ნიუტონის მეთოდი

საწყისი ინტერვალი: $a < b$, ვთქვათ $f(a)f(b) < 0$.

- ბისექციის იტერაცია: $a' = x$, $b' = b$ ან $a' = a$, $b' = x$, სადაც: $f(a')f(b') \leq 0$.

- ნიუტონის იტერაცია: $z = x - f(x)/f'(x)$

თუკი $a < z < b$: $x = z$

სხვა შემთხვევაში: $x = (a + b)/2$.

$z \in [a, b]$

$$b - z = b - x + f(x)/f'(x) \geq 0$$

$$z - a = x - a - f(x)/f'(x) \geq 0.$$

ა) $f'(x) > 0$.

$$(b - x)f'(x) \geq -f(x) \quad \text{and} \quad (x - a)f'(x) \geq f(x).$$

ბ) $f'(x) < 0$

$$(b - x)f'(x) \leq -f(x) \quad \text{and} \quad (x - a)f'(x) \leq f(x).$$

მაღალი რიგის ნიუტონის მეთოდი

კვადრატული მიახლოება:

$$T(h) = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2}f''(x_n) = 0,$$

ამონახსნის იტერაცია: $h = x - x_n$

თუკი:

$$f'(x_n)^2 \geq 2f(x_n)f''(x_n)$$

$$h_n = -\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2\frac{f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}} \right).$$

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n) \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2t(x_n)}},$$

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad t(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

ვილერის იტერაცია:

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2t(x_n)}} \approx 1 + \frac{1}{2}t(x_n),$$

$$|t| \ll 1,$$

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n) \left(1 + \frac{1}{2}t(x_n) \right),$$

დავალება

1)

Use Newton's method to determine the positive root of the equation to six correct decimals: (a) $x = 1 - e^{-2x}$; (b) $x \ln x - 1 = 0$

2) იპოვეთ $x=\tan(x)$ განტოლების დადებითი ფესვები;