

## რიცხვითი წარმოებულები

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

ტეილორის მწკრივად გაშლა

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi), \quad \xi \in (x, x+h).$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi), \quad \xi \in (x, x+h).$$

Forward difference, backward difference;

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h},$$

ცენტრალური წარმოებული:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

გამოვითვალთ დისკრეტული წარმოდგენის ცდომილება:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1),$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2).$$

$$\xi_1 \in (x, x+h)$$

$$\xi_2 \in (x-h, x).$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)],$$

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)].$$

$$\xi \in (x - h, x + h)$$

საბოლოოდ:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi),$$

მეორე რიგის წარმოებული:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \pm \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_{\pm}).$$

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{24} (f^{(4)}(\xi_-) + f^{(4)}(\xi_+)) = f''(x) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi),$$

ცდომილება:

$$-\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x-h, x+h).$$

### 5 წერტილიანი ფორმულა (5 point stencil)

$$\{x-2h, x-h, x, x+h, x+2h\}.$$

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}$$

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \pm \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) + O_{1\pm}(h^4). \quad (E_{1\pm}).$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3} f^{(3)}(x) + O_1(h^4). \quad (E_1).$$

$$f(x \pm 2h) = f(x) \pm 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) \pm \frac{4h^3}{3} f^{(3)}(x) + O_{2\pm}(h^4). \quad (E_{2\pm})$$

$$f(x + 2h) - f(x - 2h) = 4hf'(x) + \frac{8h^3}{3} f^{(3)}(x) + O_2(h^4). \quad (E_2).$$

გამოვაკლოთ:  $8 \times (E_1) - (E_2)$

$$8f(x + h) - 8f(x - h) - f(x + 2h) + f(x - 2h) = 12hf'(x) + O(h^4)$$

მაღალი რიგის წარმოებულები (5 წერტილიანი შაბლონი)

$$f''(x) \approx \frac{-f(x + 2h) + 16f(x + h) - 30f(x) + 16f(x - h) - f(x - 2h)}{12h^2}$$

$$f^{(3)}(x) \approx \frac{f(x + 2h) - 2f(x + h) + 2f(x - h) - f(x - 2h)}{2h^3}$$

$$f^{(4)}(x) \approx \frac{f(x + 2h) - 4f(x + h) + 6f(x) - 4f(x - h) + f(x - 2h)}{h^4}$$

ორი ცვლადის ფუნქცია

$$f_x(x, y) \approx \frac{f(x + h, y) - f(x - h, y)}{2h}$$

$$f_y(x, y) \approx \frac{f(x, y + k) - f(x, y - k)}{2k}$$

მეორე წარმოებული:

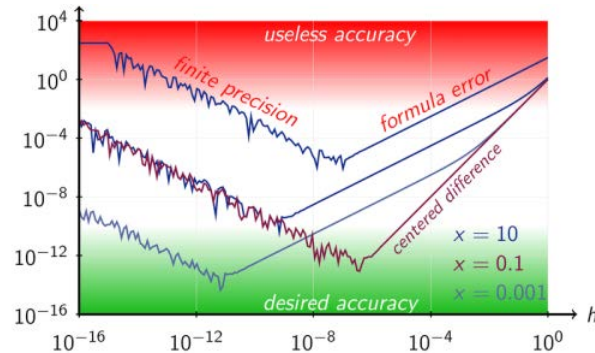
$$f_{xx}(x, y) \approx \frac{f(x + h, y) - 2f(x, y) + f(x - h, y)}{h^2}$$

$$f_{yy}(x, y) \approx \frac{f(x, y + k) - 2f(x, y) + f(x, y - k)}{k^2}$$

შერეული წარმოებული:

$$f_{xy}(x, y) \approx \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y-k) - f(x-h, y+k) + f(x-h, y-k)}{4hk}.$$

h ბოჯის შერჩევა:



$$h = (\text{epsilon})^{1/2} \cdot x$$

$$\text{epsilon} = 2.2\text{e-}16; \quad (\text{double precision 64 bit})$$

**To do:**

$$f(x) = \sin^2(1.2x) + \cos^2(0.8x)$$

$$x = (0:0.1:20);$$

|                     |   |                                        |
|---------------------|---|----------------------------------------|
| $f1(x) = d/dx f(x)$ | : | analytic derivative;                   |
| $f2(x) = d/dx f(x)$ | : | numerical derivative: forward;         |
| $f3(x) = d/dx f(x)$ | : | numerical derivative: backward;        |
| $f4(x) = d/dx f(x)$ | : | numerical derivative: centered;        |
| $f5(x) = d/dx f(x)$ | : | numerical derivative: 5 point stencil; |

Plot numerical deviations on the single figure:

1. (f2-f1)
2. (f3-f1)
3. (f4-f1)
4. (f5-f1)

## სტოქასტური ვექტორი (პროცესი)

ვინერის პროცესი  $W_n$ , მაგ: ბროუნის მოძრაობა  $B_n$

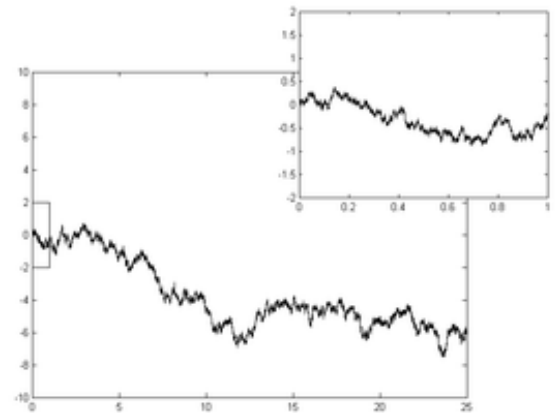
თვისებები

ალბათობის განაწილების ფუნქცია:

$$f_{W_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

ვინერის პროცესის ინტეგრალი:

$$W^{(-1)}(t) := \int_0^t W(s) ds$$



$$\frac{dX_t}{dt} = a(X_t)$$

ვიპოვოთ ამონახსნი თუკი საწყისი მნიშვნელობა  $X_0$  ქაოსურია - სტოქასტური პროცესი.

$$W_t = \frac{dB_t}{dt}$$

ბროუნის მოძრაობა:

იტოს (Ito) სტოქასტური კალკულუსი:

$$dX_t = a(X_t)dt + c(X_t)dB_t$$

$a(X)$  - დრეიფის ფუნქცია

$c(X)$  - დისპერსიის ფუნქცია

$W(B)$  შემთხვევითი პროცესია, რომლის დიფერენციალიც (წარმოებული) არ არსებობს (stochastic self-similar process). შესაძლებელია მხოლოდ (სტოქასტური) ინტეგრალის გამოთვლა!

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t c(X_s)dB_s$$

სადაც იტოს სტოქასტური ინტეგრალი:

$$I_t = \int_0^t c(X_s) dB_s$$

იტოს კალკულუსი - წარმოებული:

$$Y_t = f(t, X_t)$$

სადაც  $X_t$  იტოს პროცესია. იტოს ლემა:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t,$$

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x} dB_t$$

დამატებითი წევრები:

1. კვადრატული წევრი;
2. დისპერსიული ნაწილი;

კალკულუსი:

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$$

ვინერის დისკრეტული პროცესის მოდელირება:

ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი შემთხვევითი რიცხვების ვექტორი:  $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$

$$\begin{aligned} W_0 &= 0 \\ W_1 &= W_0 + Z_1 (t_1 - t_0)^{1/2} \\ W_2 &= W_1 + Z_2 (t_2 - t_1)^{1/2} \\ &\dots \\ W_{k+1} &= W_k + Z_k (t_{k+1} - t_k)^{1/2} \end{aligned}$$

შემთხვევითი პროცესი, რომელიც იკრიბება ბროუნის პროცესისკენ როდესაც  $n \rightarrow \infty$ .

**მაგალითი:**

გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობა:

$$a(X) = a X,$$

$$c(X) = b X,$$

$$a, c = \text{constant}$$

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dB_t$$

ვთქვათ:  $f(X) = \log(X)$

$$\begin{aligned}
 d \log X_t &= \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{X_t^2} \right)^2 (dX_t)^2 \\
 &= \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2} b^2 dt \\
 &= \left( aX_t - \frac{1}{2} b^2 \right) dt + \alpha dB_t
 \end{aligned}$$

$$\log X_t = \log X_0 + \left( a - \frac{1}{2} b^2 \right) t + b B_t$$

$$X_t = X_0 e^{(a - \frac{1}{2} b^2)t + b B_t}$$

log(ბროუნის მოძრაობა)

to do:

დახაზეთ სტოქასტური პროცესი - გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობის ტრაექტორიები:

$$Y_t = Y_0 e^{\alpha t + \beta B_t}$$

- 1.)  $\alpha=1, \beta=0.1$ ;
- 2.)  $\alpha=0, \beta=0.1$ ;
- 3.)  $\alpha=0.5, \beta=0.5$ ;
- 4.)  $\alpha=0.1, \beta=1$ ;