

რიცხვითი ინტეგრება

1. ანალიზური ფუნქციის რიცხვითი ინტეგრება $I = \int_a^b f(x) dx$

ზოგიერთი მარტივი ფუნქციაც კი ანალიზურად არა ინტეგრებადია.

$$\operatorname{erf}(b) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^b e^{-x^2} dx,$$

- ანალიზური ფუნქციის დისკრეტული წარმოდგება (sampling);
- გამოვიყენოთ დისკრეტული ინტეგრების წესი;

არსებობს ინტეგრალის თეორიული ზღვარი („ანალიზური ზღვარი“) რომლისკენაც რიცხვითი ინტეგრალის შედეგი უნდა იკრიბებოდეს;

2. დისკრეტული მონაცემების ინტეგრება (მეჩხერი მონაცემები, არაგლუვი/სტოქასტური კომპონენტი, ...);

არ არსებობს ცალსახა შედეგი - დამოკიდებულია დამატებით ინტერპეტაციაზე; საჭიროა ამოხსნის სიზუსტის ცოდნა;

მართკუთხედების მეთოდი

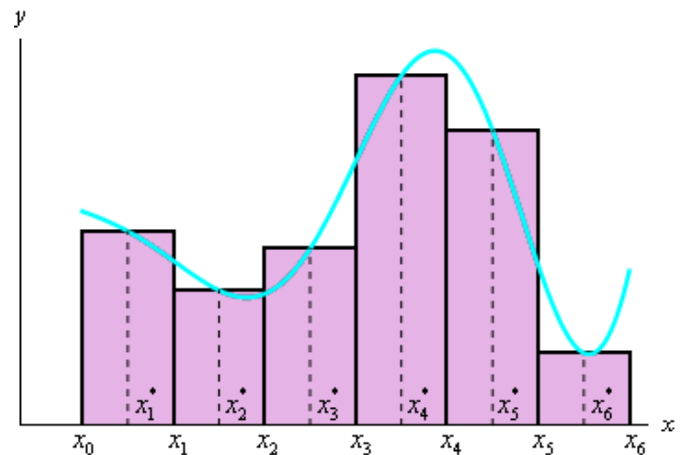
მარტივი კვადრატურების მეთოდი

$$Int = \sum_{k=1}^N \Delta x \cdot f(x_k)$$

ერთგვაროვანი ბადისათვის $\Delta x = \text{const.}$

Matlab რეალიზაცია:

```
int = dx*sum(f);
```



მარტივ მეთოდი გლუვი მცირე ბიჯიანი დისკრეტიზაციის ვექტორებისათვის;

ტრაპეციის წესი

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right].$$

ბადე - ტრაპეცია ყოველ ორ მეზობელ წერტილზე:

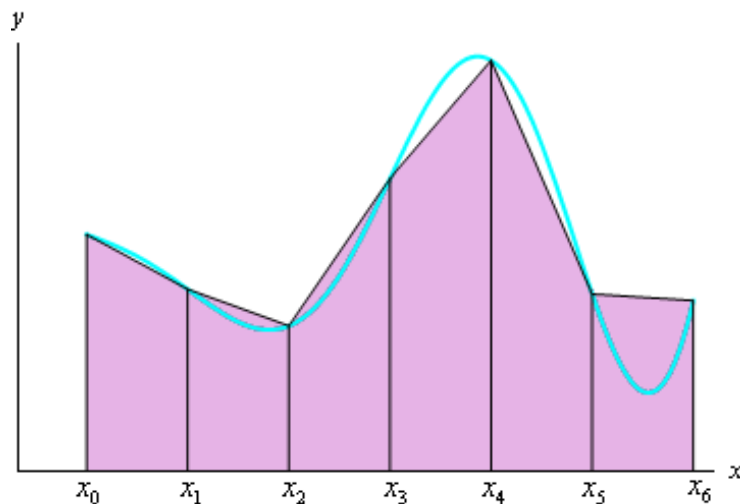
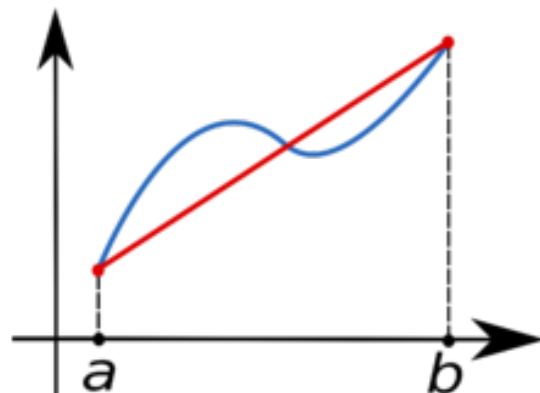
$$Int = \sum_{k=1}^N (x_{k+1} - x_k) \frac{(f(x_{k+1}) + f(x_k))}{2}$$

ერთგვაროვან ბადეზე:

$$Int = \frac{\Delta x}{2} \sum_{k=1}^N (f(x_{k+1}) + f(x_k))$$

ან:

$$Int = \Delta x \cdot \left[\sum_{k=1}^N f(x_k) - f(x_1) - f(x_N) \right]$$



Matlab რეალიზაცია:

```
N= length(f);
int = dx*(sum(f)-f(1)-f(N));
```

ცდომილების გამოთვლა:

$$error = \int_a^b f(x)dx - (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2} + \dots$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a)dx + \int_a^b f'(a)(x-a)dx + \int_a^b f''(a) \frac{(x-a)^2}{2} dx + \dots$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(b-a) + f'(a) \frac{(b-a)^2}{2} + f''(a) \frac{(b-a)^3}{6} + \dots$$

$$f'(a) \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{f(b) - f(a)}{2} (b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \frac{f(b) + f(a)}{2} + f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{6}.$$

$$error = f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{6}.$$

თუკი x -ში წერტილების რაოდენობაა N :

$$\Delta x \propto (b-a)/N$$

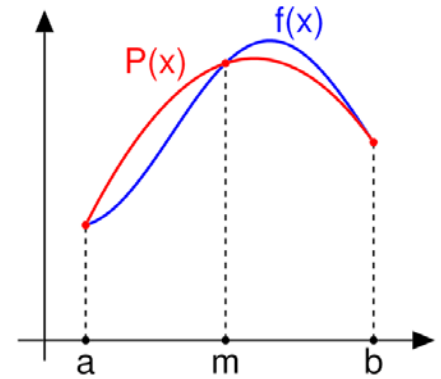
$$error \propto O(N^{-3}).$$

სიმსონის მეთოდი

ინტეგრალი ყოველ ინტერვალში

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx.$$

ამოვხსნათ შემდეგი პოლინომიალის გამოყენებით:



$$f(x) = f_i + (x - x_i)f'_i + \frac{(x - x_i)^2}{2}f''_i + \frac{(x - x_i)^3}{3!}f'''_i + O(h^4)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx = 2hf_i + 0 + \frac{1}{3}h^3 f''_i + 0 + O(h^5)$$

ცენტრალური წარმოებულის გამოყენებით:

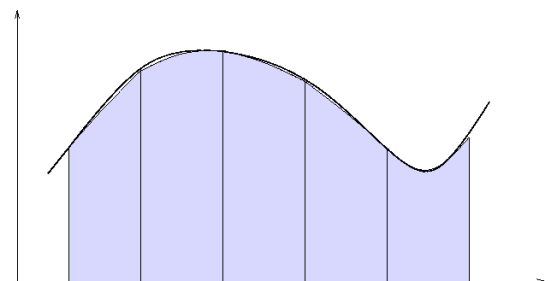
$$h^2 f''_i = (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) + O(h^4)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx = 2hf_i + \frac{1}{3}h(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) + O(h^5)$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{h}{3}(f(x_{k-1}) + 4f(x_k) + f(x_{k+1})) + O(h^5)$$

$$error = \frac{f^{(4)}(\xi_k)}{45}(x_{k+1} - x_{k-1})^5.$$

$$error \propto O(N^{-5}).$$



$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^N \left(\frac{h}{3} (f(x_{k-1}) + 4f(x_k) + f(x_{k+1})) + O(h^5) \right)$$

სიმსონის წესის იმპლემენტაცია ერთგვაროვან ბადეზე:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_1) + 4U + 2E + f(x_N))$$

სადაც:

$$U = f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{N-1}).$$

$$E = f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_N).$$

ინტეგრება ინტერპოლანტით

N წერტილოვან დისკრეტულ ვექტორზე შესაძლებელია ლაგრანჟის პოლინომის ინტერპოლაცია (ლექცია 4):

$$P(x_k) = y_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

$$P(x) = \sum_k \left(\prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k.$$

$$P(x) = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-1} x + c_n,$$

N წერტილზე ავაგეთ ანალიზური ფუნქცია. შესაძლებელია გაწარმოება და ინტეგრება.

ცდომილების ფუნქცია:
$$E(f) = \int_a^b E_n(x) dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx.$$

$$\text{error} \propto O(1/(N+1)!).$$

სინგულარული ფუნქციის ინტეგრება: მეთოდები

ანალიზური ფუნქციის შემთხვევაში ვარჩევთ რიცხვითი ინტეგრებისათვის მისაღებ ანალიზურ ფორმას;

მაგალითად სინგულარობა: $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^x dx.$

ანალიზური გარდაქმნა:

$$x = t^2$$

$$I = \int_0^1 e^{t^2} 2 dt.$$

ნაწილობრივი ინტეგრება

$$I = \int_0^1 x^{-1/2} e^x dx = 2x^{1/2} e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x^{1/2} e^x dx$$

ნაწილობრივ ანალიზური ინტეგრება:

$$I = \int_0^1 x^{-3} \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) dx + \int_0^1 x^{-3} \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

ანალიზური ინტეგრალი + რიცხვითი კორექტორი;

ინტეგრალები უსასრულო საზღვრებში

ლოკალიზებული ფუნქცია: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

შევაფასოთ ლოკალიზაციის საზღვრები და შევცვალოთ უსასრულობები სასრულო საზღვრებით;

მაგ:

$$|R| = 2 \int_4^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_{16}^{\infty} e^{-t} \frac{1}{2} t^{-1/2} dt$$

$$\text{არალოკალიზებულ} \quad < 2 \cdot \frac{1}{2} 16^{-1/2} \int_{16}^{\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{4} e^{-16} < 10^{-7}.$$

შემოვიყვანოთ ცვლადი, რომელიც

1. დააპროექცირობს უსასრულო ინტერვალს სასრულზე;
2. არ შემოიყვანს სინგულარობებს ინტეგრების ინტერვალს შიგნით;

მაგ:

$$t = e^{-x}$$

$$t = 1/(1+x)$$

ამოხსენით:

1. Compute the integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x} dx$$

- 2.

Compute the integral $\int_0^\infty (1+x^2)^{-4/3} dx$ with five correct decimals.

დახაზეთ შედეგის ზედა საზღვარზე დამოკიდებულების ფუნქცია (1,1e+5);

- 3.

Compute the integral $\int_0^\infty (1+x^2)^{-4/3} dx$ with five correct decimals. Expand the integrand in powers of x^{-1} and integrate term-wise over the interval $[R, \infty]$, for a suitable value of R . Then use Romberg's method on the remaining interval $[0, R]$.

- 4.

Propose a suitable plan (using a computer) for computing the following integrals, for $s = 0.5, 0.6, 0.7, \dots, 3.0$:

$$(a) \int_0^\infty (x^3 + sx)^{-1/2} dx; \quad (b) \int_0^\infty (x^2 + 1)^{-1/2} e^{-sx} dx, \text{ error} < 10^{-6};$$

$$(c) \int_\pi^\infty (s+x)^{-1/3} \sin x dx.$$