

რიცხვითი ინტეგრება: გაუსის კვადრატურა

გამოვითვალოთ ინტეგრალი ორი წერტილის გამოყენებით. მაგ. ტრაპეციის წესი:

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(a) + c_2 f(b) = \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b)$$

უფრო ზუსტი შეფასებისათვის შემოვიყვანოთ 4 თავისუფალი პარამეტრი:

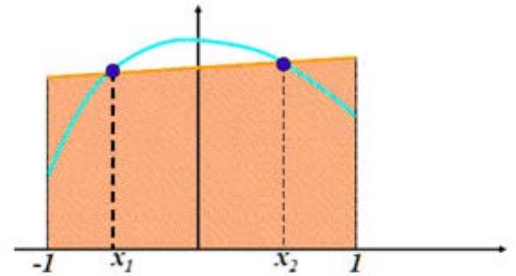
$$I = \int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

გაუსის კვადრატურების მეთოდი: პარამეტრები c_1, c_2, x_1, x_2 გამოვთვალოთ დაშვებიდან, რომ ფორმულა ზუსტ შედეგს გვაძლევს კუბური პოლინომიალისათვის.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)dx \\ &= \left[a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} \right]_a^b \end{aligned}$$

$$= a_0(b-a) + a_1 \left(\frac{b^2-a^2}{2} \right) + a_2 \left(\frac{b^3-a^3}{3} \right) + a_3 \left(\frac{b^4-a^4}{4} \right)$$



გაუსის ფორმულა:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= c_1 (a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3) + c_2 (a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3) \\ &= a_0(c_1 + c_2) + a_1(c_1x_1 + c_2x_2) + a_2(c_1x_1^2 + c_2x_2^2) + a_3(c_1x_1^3 + c_2x_2^3) \end{aligned}$$

პირობები:

$$\begin{aligned} b-a &= c_1 + c_2 & \frac{b^2-a^2}{2} &= c_1x_1 + c_2x_2 \\ \frac{b^4-a^4}{4} &= c_1x_1^3 + c_2x_2^3 & \frac{b^3-a^3}{3} &= c_1x_1^2 + c_2x_2^2 \end{aligned}$$

ამონახსნები:

$$x_1 = \left(\frac{b-a}{2} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{b+a}{2} \quad c_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$x_2 = \left(\frac{b-a}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{b+a}{2} \quad c_2 = \frac{b-a}{2}$$

გაუსის კვადრატურების ფორმულა:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \\ &= \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{b+a}{2} \right) + \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{b+a}{2} \right) \end{aligned}$$

მაღალი რიგის გაუსის კვადრატურები:

$$\int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

$$\int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n)$$

გაუსის კვადრატურის სტანდარტული ცხრილი [-1,1] ინტერვალზე

$$\int_{-1}^1 g(x)dx \cong \sum_{i=1}^n c_i g(x_i)$$

წერტილების რაოდენობა	წევრების წონები	ფუნქციის არგუმენტები (-1,1)
2	c1 = 1.000000000 c2 = 1.000000000	x1 = -0.577350269 x2 = 0.577350269
3	c1 = 0.555555556 c2 = 0.888888889 c3 = 0.555555556	x1 = -0.774596669 x2 = 0.000000000 x3 = 0.774596669
4	c1 = 0.347854845 c2 = 0.652145155 c3 = 0.652145155 c4 = 0.347854845	x1 = -0.861136312 x2 = -0.339981044 x3 = 0.339981044 x4 = 0.861136312
5	c1 = 0.236926885 c2 = 0.478628670 c3 = 0.568888889 c4 = 0.478628670 c5 = 0.236926885	x1 = -0.906179846 x2 = -0.538469310 x3 = 0.000000000 x4 = 0.538469310 x5 = 0.906179846
6	c1 = 0.171324492 c2 = 0.360761573 c3 = 0.467913935 c4 = 0.467913935 c5 = 0.360761573 c6 = 0.171324492	x1 = -0.932469514 x2 = -0.661209386 x3 = -0.2386191860 x4 = 0.2386191860 x5 = 0.661209386 x6 = 0.932469514

ინტეგრალის საზღვრების გარდაქმნა სტანდარტულ ინტერვალზე გაუსის კვადრატურის გამოსაყენებლად:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt$$

შეამოწმეთ:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

მრავალჯერადი ინტეგრალები

1 - მრავალჯერადი ინტეგრალის ანალიზურად დაყვანა ერთჯერად ინტეგრალზე და შემდეგ რიცხვითი გამოთვლა;

2 - ინტეგრება თანმიმდევრობით:

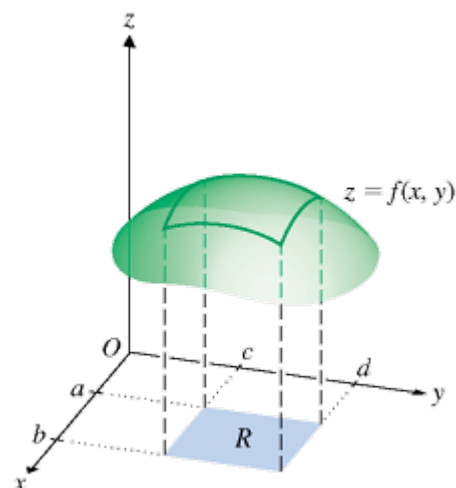
$$I = \int_D f(x, y) \, dx dy$$

$$I = \int_a^b \phi(x) \, dx, \quad \phi(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) \, dy.$$

$$I \approx \sum_{i=1}^n u_i \phi(x_i),$$

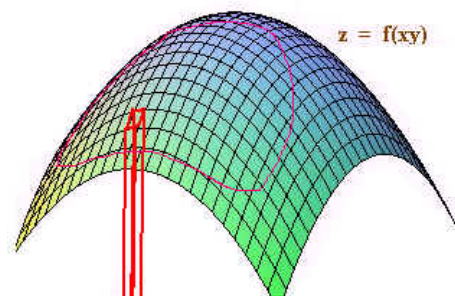
$$\phi(x_i) \approx \sum_{j=1}^n v_j f(x_i, y_j),$$

$$I \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} f(x_i, y_j), \quad w_{ij} = u_i v_j.$$



ტრაპეციების წესი:

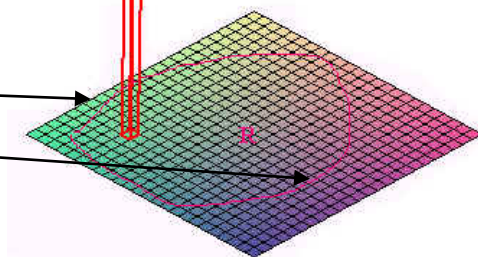
$$I \approx hk \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}},$$



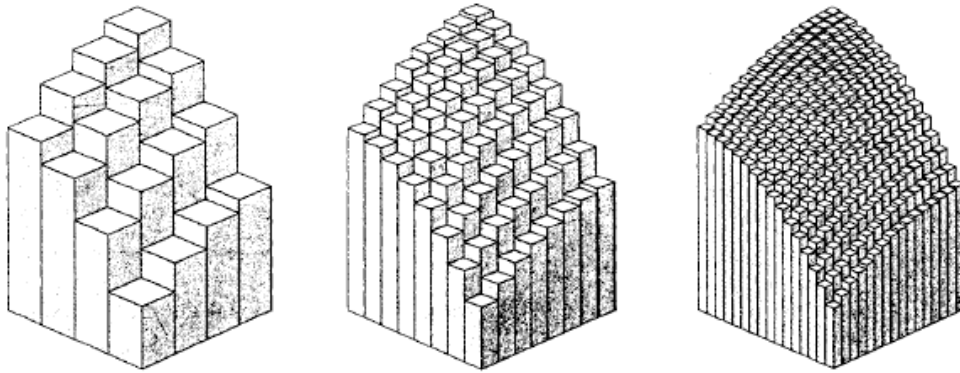
არამართკუთხა საზღვრები:

$$a=a(x);$$

$$b=b(x);$$



მაგ. მართკუთხედების მეთოდი მუდმივი ბიჯით



$$\text{Int} = \text{sum}(\text{sum}(F)) * dx * dy;$$

გამოთვალეთ

$$1. \quad I = \int_0^1 \int_0^1 x \tan(y^2) dx dy$$

$$2. \quad I = \int_0^1 \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} x \tan(y^2) dx dy$$

$$3. \quad I = \int_0^1 \int_0^2 \int_1^2 \int_0^{2\pi} \sin(xyz) \tan(xy) \cos\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{10} + \varphi\right) dx dy dz d\varphi$$