

სასრული ელემენტის მეთოდი

2 რიგის წრფივი დიფ. განტოლება:

$$\hat{L}(U(x)) = g(x)$$

- საწყისი მნიშვნელობის ამოცანა:

$U(0), U'(0)$

სასრული სხვაობების მეთოდი: მარშრება საწყისი წერტილიდან (დრო, სივრცე).

მაგ: რუნგე-კუტა.

ფილოსოფია: ტეილორის მწკრივად გაშლა;

- სასაზღვრო მნიშვნელობის ამოცანა:

საზღვრები: $x=[a,b]$

$U(a), U(b)$, დირიხლეს სასაზღვრო პირობა;

$d/dxU(a), d/dxU(b)$, ნეიმანის სასაზღვრო პირობა;

$d/dxU(a,b) + \alpha U(a,b)$ რობინის სასაზღვრო პირობა;

სხვა პირობა: მაგ. Outflow, Partially Reflective, ...

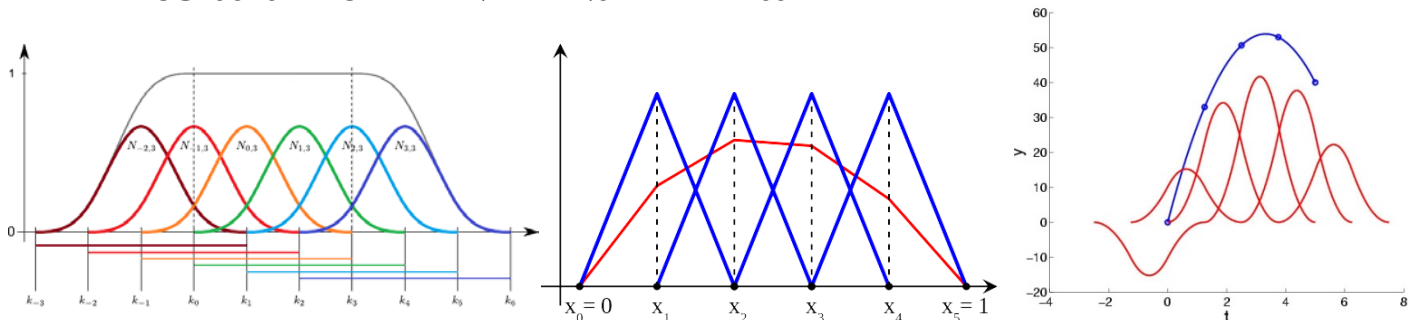
მეთოდი: გავშალოთ ამონახსნი სასრული რაოდენობის ელემენტებად. ელემენტები - ფუნქციები (ფუნქციების ორთოგონალური ბაზისი) უკვე აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს:

$$U(x) \approx u(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x)$$

წონის კოეფიციენტები

საბაზისო ფუნქციები

საბაზისო ფუნქციების ფორმის და რაოდენობის არჩევა:

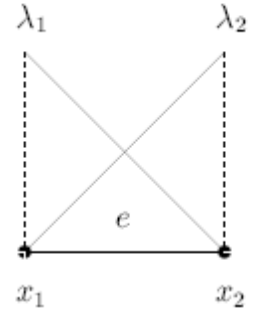


სხვადასხვა რიგის სასრული ელემენტები

$$X = [X_1, X_2]$$

„ბარიცენტრული ფუნქციები“:

$$\lambda_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \lambda_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



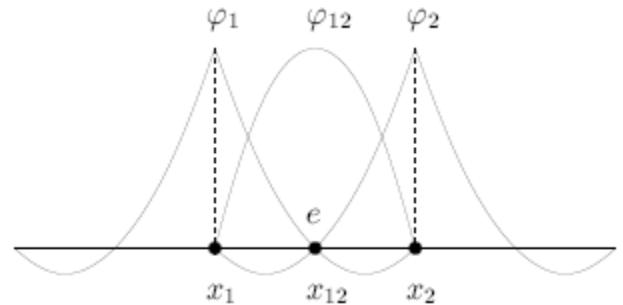
$$u(x) = a_1 \lambda_1(x) + a_2 \lambda_2(x)$$

შემდეგი მიახლოება: მეორე რიგის საბაზისო ფუნქციები:

$$\varphi_1(x) = \lambda_1(x)(2\lambda_1(x) - 1)$$

$$\varphi_2(x) = \lambda_2(x)(2\lambda_2(x) - 1)$$

$$\varphi_{12}(x) = 4\lambda_1(x)\lambda_2(x)$$



$$u(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + a_{12} \varphi_{12}(x)$$

კუბური საბაზისო ფუნქციები:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\lambda_1(x)(3\lambda_1(x) - 2)(3\lambda_1(x) - 1)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}\lambda_2(x)(3\lambda_2(x) - 2)(3\lambda_2(x) - 1)$$

$$\varphi_{12}(x) = \frac{9}{2}\lambda_1(x)\lambda_2(x)(3\lambda_1(x) - 1)$$

$$\varphi_{21}(x) = \frac{9}{2}\lambda_1(x)\lambda_2(x)(3\lambda_2(x) - 1)$$

როგორ ვიპოვოთ a_1 , a_2 , a_3 წონის კოეფიციენტები?

Weighted Residuals - შეწონილი ნაშთების მეთოდი

$$\hat{L}(U(x)) - g(x) = 0$$

საბაზისო ფუნქციებიდან შედგენილი მიახლოებითი ამონახსნის ჩასმით:

$$\hat{L}\left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x)\right) - g(x) \approx 0$$

ამონახსნის სიზუსტე შეიძლება განვსაზღვროთ ნაშთით:

$$R(x) = \sum_{i=1}^n a_i \hat{L}(\psi_i(x)) - g(x)$$

a მუდმივი კოეფიციენტებია, L წრფივი ოპერატორია.

a კოეფიციენტები ვიპოვოთ $R(x)$ ნაშთის მინიმიზაციის პირობით

კოლოკაციის მეთოდი

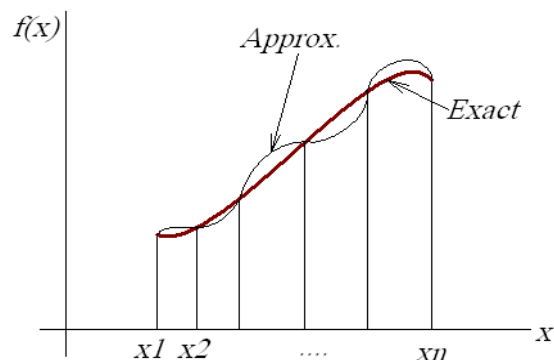
ნაშთი ნულდება ადგილურ წერტილებში:

$$x = x_j$$

$$R(x_j) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \hat{L}(\psi_i(x_j)) - g(x_j) = 0$$

ამ განტოლებებიდან ვიპოვით a კოეფიციენტებს.



კოლოკაციის მეთოდი: მაგალითი

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(x) = 0$$

გაშლა საბაზისო ფუნქციებად:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x)$$

ნაშთი:

$$R(x) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} + F(x)$$

კოლოკაციის წერტილებში ნაშთი ნულდება:

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{d^2 \psi_i(x_j)}{dx^2} + F(x_j) = 0$$

კოეფიციენტების საპოვნელად უნდა ამოვხსნათ შემდეგი სისტემა:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & \dots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \dots & k_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F(x_1) \\ F(x_2) \\ \vdots \\ F(x_n) \end{bmatrix}$$



სადაც:

$$k_{ij} = \frac{d^2 \psi_i(x_j)}{dx^2}$$

საწყისი დაშვება:

$$\begin{matrix} i=1\dots n \\ j=1\dots n \end{matrix}$$

- + არ გვავიწყდეს $F(x)$ ფუნქციის ანალიზური სახე (!)
- რთული სისტემებისთვის საჭიროა კოლოკაციის წერტილების და საბაზისო ფუნქციების შეთახმებული შერჩევა და დიდი რაოდენობა.

მაგალითი:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f = 0$$

საბაზისო ფუნქციები:

$$\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = -\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

ავარჩიოთ კოლოკაციის ერთი წერტილი. სიმარტივისთვის $x_1 = l/2$

$$\left[-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x_1}{2l}\right) \right] \{a_1\} = -\{f\}$$

$$a_1 = \frac{f}{\left(\pi/2l\right)^2 \sin(\pi/4)} \approx 0.57 fl^2$$

განტოლების ამონახსნი:

$$u(x) \approx a_1 \psi(x) = 0.57 fl^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

გალიორკინის მეთოდი

ნაშთის მინიმიზაციისათვის L დომენში შეგვიძლია გამოვიყენოთ არა მხოლოდ კოლოკაციის წერტილები, არამედ შეწონვის ფუნქცია $W(x)$

$$\int_L W(x)R(x)dx = 0$$

გალიორკინის მეთოდი:

$$W(x) = \psi_j(x)$$

ჩასმით:

$$\int_L \psi_j(x)R(x)dx = \sum_{i=1}^n a_i \int_L \psi_j(x)\hat{L}(\psi_i(x))dx - \int_L \psi_j(x)g(x)dx = 0$$

$$j = 1, \dots, n$$

ვპოულობთ წონის კოეფიციენტებს

მაგალითი:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(x) = 0$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x)$$

$$R(x) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} + F(x)$$

გალიორკინის ნაშთის მინიმიზაცია:

$$\sum_{i=1}^n a_i \int \psi_j(x) \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} dx = - \int \psi_j(x) F(x) dx$$

ალგებრულ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \dots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \dots & K_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G(x_1) \\ G(x_2) \\ \vdots \\ G(x_n) \end{bmatrix}$$

სადაც:

$$K_{ij} = \int_L \psi_j(x) \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} dx$$

$$G(x_j) = - \int_L \psi_j(x) F(x) dx$$



ალტერნატიული ფორმა:

$$\sum_{i=1}^n a_i \int \psi_j(x) \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} dx = \sum_{i=1}^n \left(\cancel{\psi_j(x) \frac{d\psi_i(x)}{dx}} \Big|_L - a_i \int \frac{d\psi_j(x)}{dx} \frac{d\psi_i(x)}{dx} dx \right)$$

$$\bar{K}_{ij} = \int_L \frac{d\psi_i(x)}{dx} \frac{d\psi_j(x)}{dx} dx$$

$$\bar{G}(x_j) = \int_L \psi_j(x) F(x) dx + \cancel{\psi_j(x) \frac{dU(x)}{dx}} \Big|_L$$

+ არ გვჭირდება საბაზისო ფუნქციის მეორე წარმოებული (მაგ. წრფივი საბაზისო ფუნქციები).

კოლოკაციის მაგალითის გალერკინისეული ამონახსნი: $a_1 \approx 0.52 fl^2$

მაგალითი:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + 1 = 0$$

$$x = [0, 1]$$

სასაზღვრო პირობები:

$$U(0) = 0$$

$$\frac{dU(1)}{dx} = 1$$

საბაზისო ფუნქციები რომლებიც აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x) = c_1 x + c_2 x^2$$

საბაზისო ფუნქციები:

$$\psi_1 = x \quad \psi_2 = x^2$$

$$\frac{d\psi_1}{dx} = 1 \quad \frac{d\psi_2}{dx} = 2x$$

გალიორკინის მატრიცის ელემენტები:

$$K_{11} = \int_0^1 \frac{d\psi_1}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} dx = 1$$

$$K_{12} = K_{21} = \int_0^1 \frac{d\psi_1}{dx} \frac{d\psi_2}{dx} dx = 1$$

$$K_{22} = \int_0^1 \frac{d\psi_2}{dx} \frac{d\psi_2}{dx} dx = \frac{4}{3}$$

$$F_1 = \int_0^1 1 \psi_1 dx + \psi_1(0) \frac{dU(0)}{dx} + \psi_1(1) \frac{dU(1)}{dx} = \frac{3}{2}$$

$$F_2 = \int_0^1 1 \psi_2 dx + \psi_2(0) \frac{dU(0)}{dx} + \psi_2(1) \frac{dU(1)}{dx} = \frac{4}{3}$$

$$K = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad F = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$u(x) = 2x + \frac{x^2}{2}$$

ემთხვევა ზუსტ ამონახსნს

დავალება:

ამოხსენით განტოლება სასრული ელემენტის კოლოკაციისა და გალიორკინის მეთოდების გამოყენებით:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha \frac{dw}{dx} = F(x),$$

ინტერვალში $(0-l)$, სასაზღვრო პირობებით:

$$w(0) = w(L) = 0$$

1. $F(x) = f_0$
2. $F(x) = \cos^2(\pi x/8)$

მოცემულია: $\alpha=0.1$, $L=10$, $f_0=1$.

შეეცადეთ საწყისი მნიშვნელობის ამოცანის ფორმულირება და სასრული სხვაობებით ამოხსნა. შეადარეთ ამონახსნები ერთმანეთს.