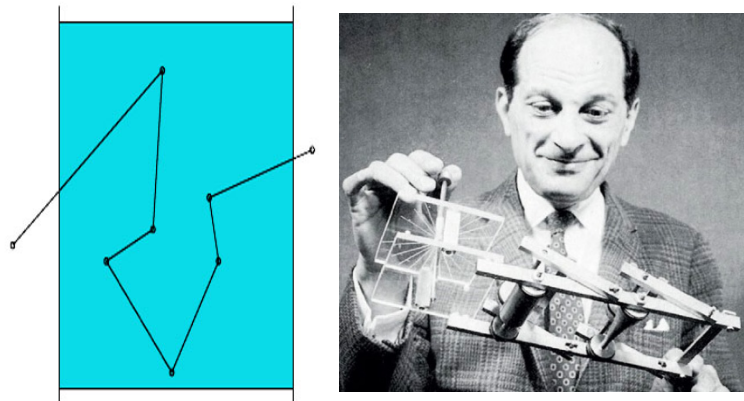


მონტე კარლო მეთოდები

მოდელირება შემთხვევითი რიცხვების გამოყენებით.

მაგ: ნეიტრონების ფარის მოდელირება (FERMIAC)

შემთხვევითი რიცხვების მექანიკური გენერატორი



შემთხვევითი რიცხვების ანალიზური გენერატორი:

Mod - ნაშთი გაყოფის შემდეგ (modulo)

Matlab:

$\text{mod}(23, 5) = 3$

ფსევდო-შემთხვევითი რიცხვები:

$N = \text{mod}(11 * N, 31)$

11, 28, 29, 9, 6, 4, 13, 19, 23, 5 ...

პარკ-მილლერის მინიმალური სტანდარტი:

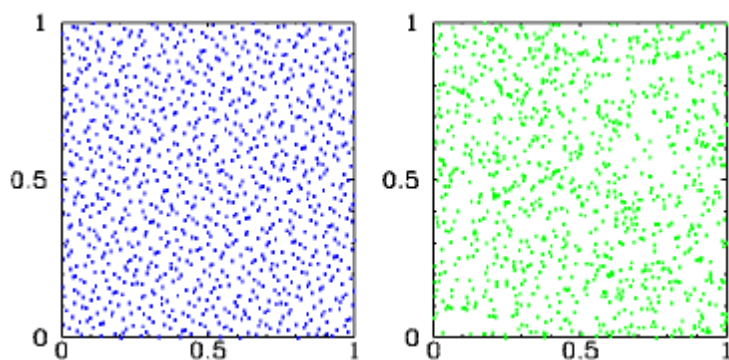
$$x_{k+1} = \text{mod}(2^{31} - 1, 16807x_k)$$

$x / 2147483647 = (0,1)$

მატლაბის იმპლემენტაცია (ver.4: 7⁷),

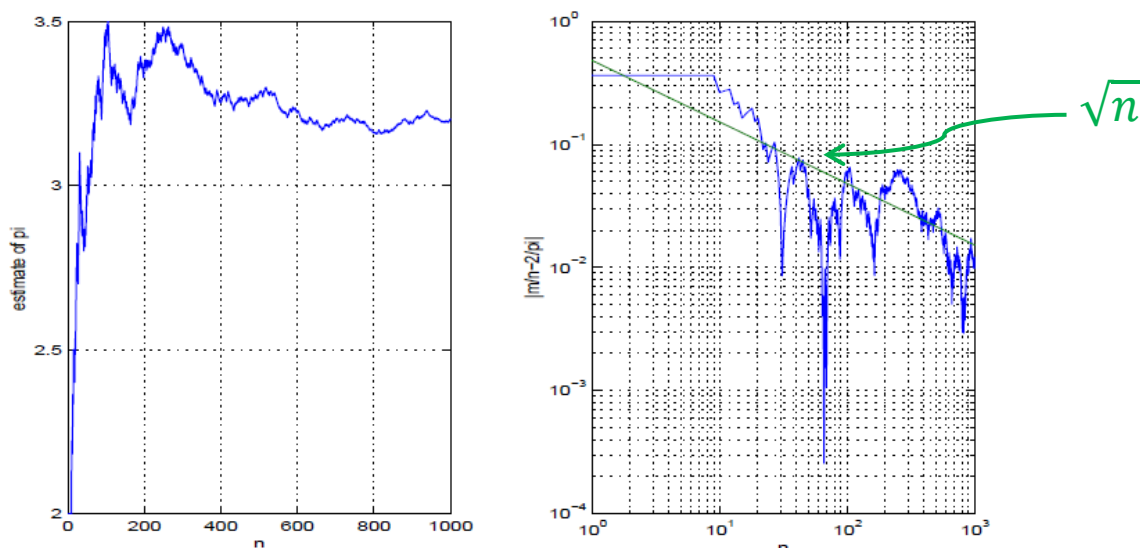
დღეს: 2¹⁴⁹² ფსევდო შემთხვევითი სიდიდე განმეორების დაწყებამდე.

სხვადასხვა ტიპის გენერატორები:



π -ს გამოთვლის მცდელობა

Buffon 1770, $[2l/\pi d]$



დავალება:

Suppose we have a random number generator which generates random numbers uniformly distributed in $[-1, 1]$. To generate random points in the unit circle generate a pair of random numbers x_n, y_n . If $x_n^2 + y_n^2 < 1$, then accept (x_n, y_n) ; otherwise discard (x_n, y_n) and generate new random numbers.

(a) Use, e.g., the function rand in MATLAB to generate points in the unit circle. Plot the accepted points.

(b) What is the probability that a pair of points is discarded? Use the observed number of discarded points in a run of 1000 points to approximate the value of π .

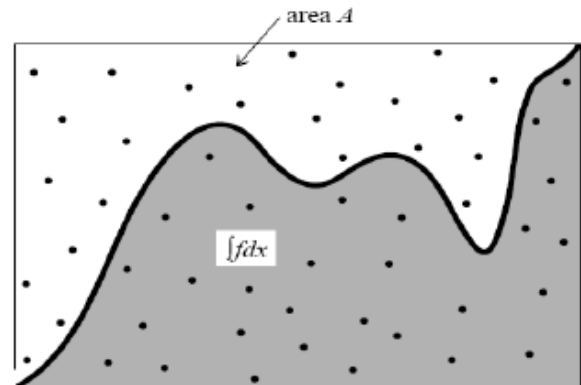
ინტეგრება მონტე კარლო მეთოდით

N შემთხვევითი რიცხვი.

N_1 - გრაფიკს ზევით;

$$\text{Int} = S * N_1/N;$$

„Hit and miss method“



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is inside the volume} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$V = V_e \frac{\sum_{i=1}^N f(x_i)}{N}$$

კრებადობა:

1 განზომილებიანი ინტეგრალი სიმსონის წესით:	$\epsilon \sim N^{-4}$
d განზომილებიანი ინტეგრალი სიმსონის წესით:	$\epsilon \sim N^{-4/d}$
d განზომილებიანი ინტეგრალი მონტე კარლო ინტეგრებით:	$\epsilon \sim N^{-1/2}$

ფორმალურად ონტეკარლოს გამოყენების უპირატესობა: $d > 8$

მაგრამ:

კვადრატურებით ინტეგრება d განზომილებაში: N^d ოპერაცია;
 მონტეკარლო ინტეგრება d განზომილებაში: N ოპერაცია;

3-ე რიგის ინტეგრალი:

$$Int = \iiint f(x, y, z) dx dy dz$$

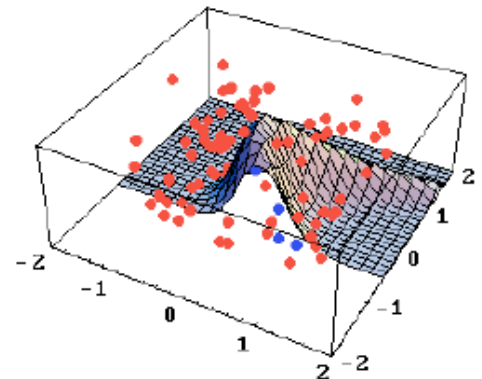
ინტეგრება კვადრატურებით:

$$Int = \Delta V \sum \sum \sum f(x_i, y_j, z_k)$$

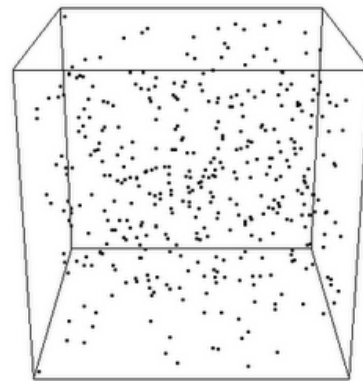
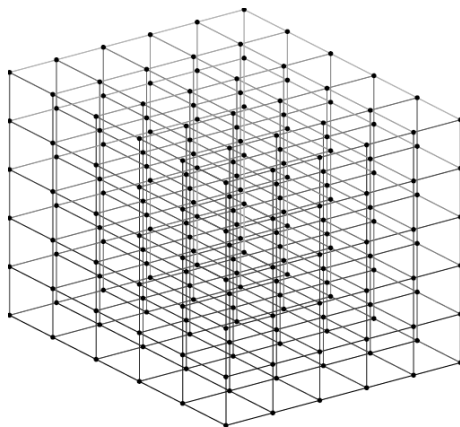
$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

ინტეგრება მონტე კარლო მეთოდით:

$$Int = \Delta V \sum f(V_i)$$



მაღალგანზომილებიანი ერთგვაროვანი ბადის და მონტე კარლო შემთხვევითი წერტილების პროექციები დაბალ განზომილებაში



დავალება:

1. გამოთვალეთ ინტეგრალი: $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \exp[-(x^2 + y^2) / 2] dx dy$

ა.) გამოთვალეთ ინტეგრალი რამდენჯერმე ფიქსირებული შემთხვევითი რიცხვების შემთხვევაში. იპოვეთ გამოთვლილი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა.

ბ.) დახაზეთ ინტეგრალის მნიშვნელობის გამოყენებული შემთხვევითი რიცხვების რაოდენობაზე დამოკიდებულება რამდენჯერმე.

2. გამოთვალეთ ინტეგრალები 6.1, 6.3. შეადარეთ კვადრატურების და მონტე-კარლო ინტეგრების გამოთვლის დროები.

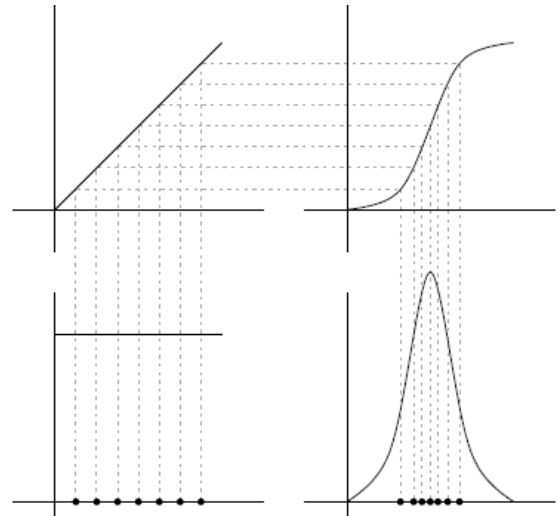
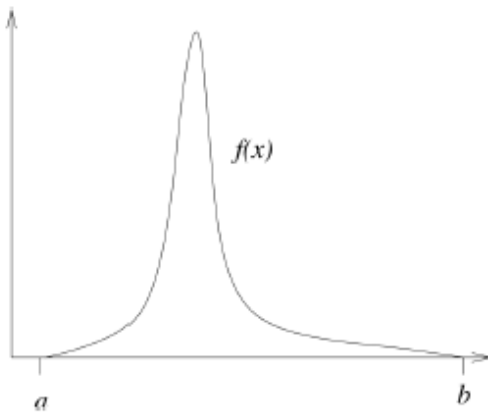
Importance sampling

შემთხვევითი რიცხვების განაწილების მეთოდი: sampling;

Simple sampling - თანაბარი განაწილება;

მონტე კარლო მეთოდების ძირითადი პრობლემა: სწრაფად ცვლადი და არაგლუვი ფუნქციები;

შემთხვევითი რიცხვების განაწილების ფუნქცია $f(x)$:



დამხმარე $g(x)$ ფუნქცია:

დადებითი ანალიზური ინტეგრებადი ფუნქციაა რომელსაც გააჩნია შებრუნებული ფორმა.

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dG(x)$$

სადაც: $G(x) = \int_a^x g(x) dx$

ცვლადთა და საზღვრების გარდაქმნა: $r = G(x)$

$$I = \int_{G(a)}^{G(b)} \frac{f(G^{-1}(r))}{g(G^{-1}(r))} dr$$

თუკი $f(r)/g(r)$ უფრო გლუვი ფუნქციაა, ე.ი. მონტე კარლო ინტეგრება გვაძლევს უფრო ზუსტ შედეგს, ან იგივე სიზუსტის მისაღებად შესაძლებელია წერტილების რაოდენობის შემცირება: (N).

ნორმირების ფუნქციის გამოყენების პირობები:

1. ანალიზურად ინტეგრებადი: $r = G(x)$
2. არსებობს შებრუნებული ფუნქცია: $x = G^{-1}(r)$

მაგალითი:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

ნორმირების ფუნქცია: $\exp(-x)$

$$\int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

$$g(x) = \frac{e^{-x}e}{(e-1)}$$

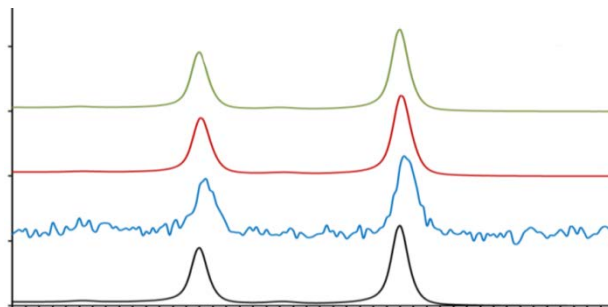
$$G(x) = \int_0^x \frac{e^{-x}e}{e-1} dx = \frac{(1-e^{-x})e}{e-1}$$

შებრუნებული ფუნქცია:

$$G^{-1}(u) = -\log\left(1 - u\frac{e-1}{e}\right)$$

მაგალითი:

ორპიკიანი ფუნქცია



$$g(x) = P_1(x) + P_2(x)$$

დამხმარე ფუნქცია - გაუსის ფუნქციების ჯამი:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

$\text{erf}(x), \text{erfinv}(x)$