

ამოცანა 1.

სივრცის მეტრიკა, რომელიც აღწერს საკუთარი მასის შესაბამისი შვარცშილდის რადიუსზე უფრო დიდი ზომის რელატივისტური კომპაქტური ობიექტის თვისებებს (მაგ. ნეიტრონული ვარსკვლავის) ხშირად იწერება შემდეგი ფორმით:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

სადაც $m(r)$ მასის განაწილების ფუნქციაა, ხოლო $\Phi(r)$ დაგვიანების ფუნქცია. კომპაქტური ობიექტის ზედაპირის გარეთ მეტრიკა ემთხვევა შვარცშილდის მეტრიკას და დაგვიანების ფუნქცია იღებს შემდეგ სახეს:

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2Gm_\star}{rc^2}\right)$$

სადაც $m_\star$ ვარსკვლავის ჯამური მასაა. ვარსკვლავის შიდა სტრუქტურა შეიძლება გამოვითვალოთ რელატივისტური ჰიდროსტატიკური წონასწორობის განტოლებებით, რომელიც მოიცემა ტოლმან, ოპენჰეიმერ ვოლკოვის განტოლებებით (TOV):

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r),$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G(\rho + P(r)/c^2)}{r^2} \left[m(r) + \frac{4\pi r^3 P(r)}{c^2} \right] \left[1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right]^{-1},$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{Gm(r) + 4\pi G r^3 P(r)/c^2}{c^2 r [r - 2Gm(r)/c^2]}.$$

სისტემის ამოსახსნელად საჭიროა მდგომარეობის განტოლებისა და ფიზიკური ცვლადების საწყისი მნიშვნელობების ცოდნა:

$$P(r) = K \rho(r)^\gamma$$

$$m(r=0) = 0, \quad P(r=0) = P_c = P(\rho_c), \quad \Phi(r_\star) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2Gm_\star}{r_\star c^2}\right)$$

1. იპოვეთ ნეიტრონული ვარსკვლავის შიდა სტრუქტურა (მასის და წნევის განაწილება), თუკი მისი ცენტრალური სიმკვრივეა $\rho_c = 5 \times 10^{17} \text{ კგ/მ}^3$, ხოლო მდგომარეობის განტოლება ემორჩილება პოლიტროპულ კანონს: $\gamma=5/3$, $K=5380.3$. რას უდროს ამ ვარსკვლავის მასა $m_\star$ და რადიუსი $R_\star$? ამოცანა შეგიძლიათ ამოხსნათ სფერული სიმეტრიის მიახლოებაში.
2. გამოთვალეთ დაგვიანების ფუნქცია Φ დან 0 -მდე. ერთ ნახაზზე დახატეთ შვარცშილდის მეტრიკის დაგვიანების ფუნქცია და მოცემული თეთრი ჯუჯის დაგვიანების ფუნქციები, $R = R_\star - R_s$, სადაც R_s შვარცშილდის რადიუსია ($2Gm_\star/c^2$). დაგვიანების ფუნქციები ერთმანეთს უნდა ემთხვეოდნენ ვარსკვლავის ზედაპირზე: $R = R_\star$