უძრავი წერტილის იტერაცია
(Fixed-Point Iteration)

ფუნქციის უძრავი წერტილი:

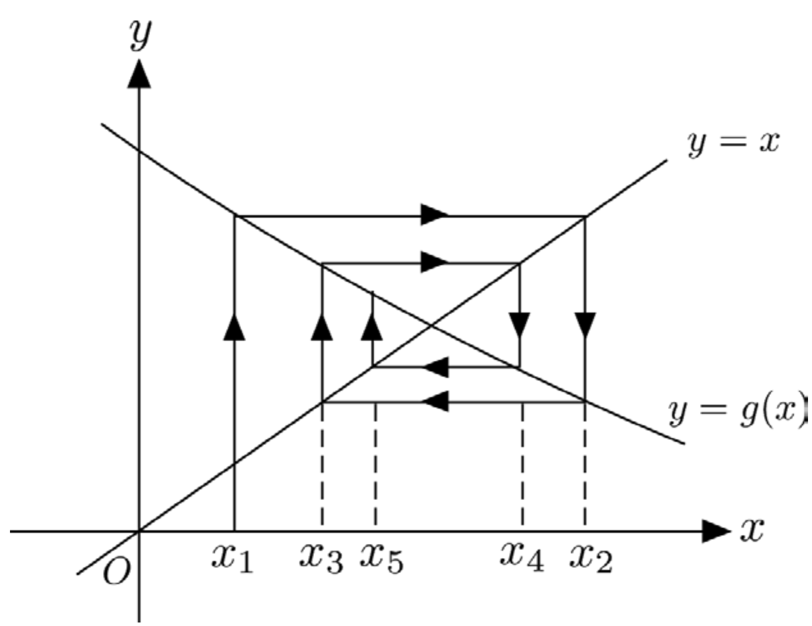
$$x = \phi(x)$$

უძრავი წერტილის იტერაცია:

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

ფუნქციის უძრავი წერტილის გამოთვლა იტერაციული მეთოდით:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \phi(\alpha),$$



იტერაციისას უძრავი წერტილისკენ მიზიდვა, ან განზიდვა;

მიზიდვისათვის:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq m|x - y|, \quad m < 1,$$

განვსაზღვროთ შემოვლის მიმართულება, ან გამოვიყენოთ შებრუნებული ფუნქცია:

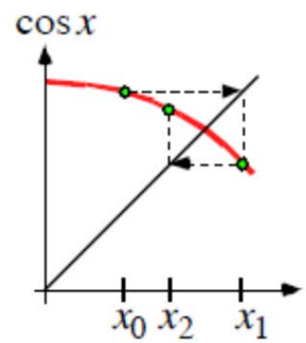
მაგალითად:

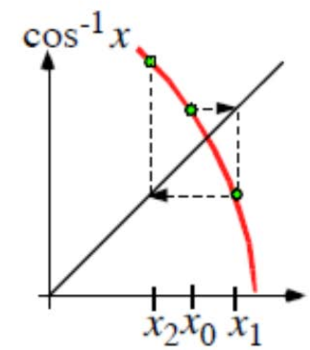
$$x - \cos x = 0$$

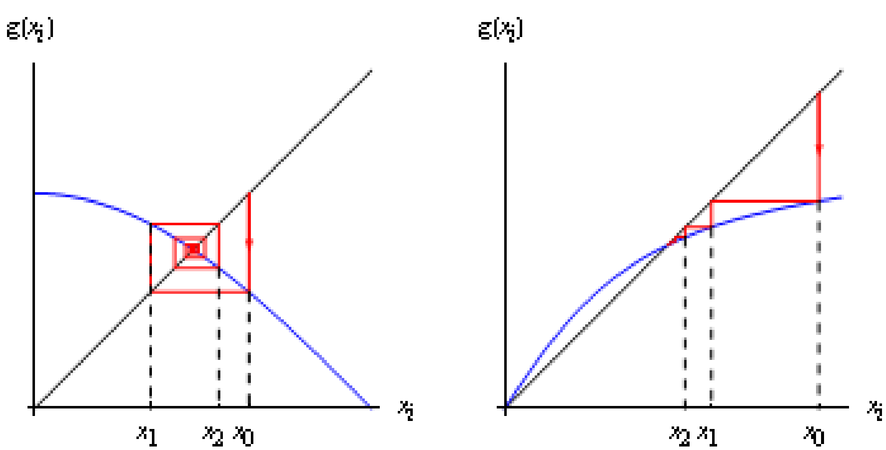
$$x_{k+1} = \cos x_k$$

or

$$x_{k+1} = \cos^{-1} x_k$$







უძრავი წერტილის იტერაციული მეთოდით პოვნისათვის იტერაციების გაჩერების პირობა:

- წინასწარ აღებული სიზუსტე: `Max_Delta`
- იტერაციების მაქსიმალური რიცხვი: `Max_iter`

ფუნქცია, რომლისთვისაც ვეძებთ უძრავ წერტილს

userdef_fun.m

```
function out_var = userdef_fun(in_var);

out_var = cos(in_var).^(2);
```

უძრავი წერტილის იტერაციული მეთოდით საძებნი ფუნქცია

fixedpoint_solver.m

```
function out = fixedpoint_solver(Xinit,Max_iter,Max_Delta);

x1 = Xinit;
y1 = userdef_fun(x1);
x2 = y1;
y2 = userdef_fun(x2);
x3 = y2;
% First iteration complete

Num_iter = 1;

while (abs(x2-x1)>Max_Delta) && (Num_iter<Max_iter)
    x1 = x3;
    x2 = userdef_fun(x1);
    x3 = userdef_fun(x2);
    Num_iter = Num_iter + 1;
end

out = x3;
```

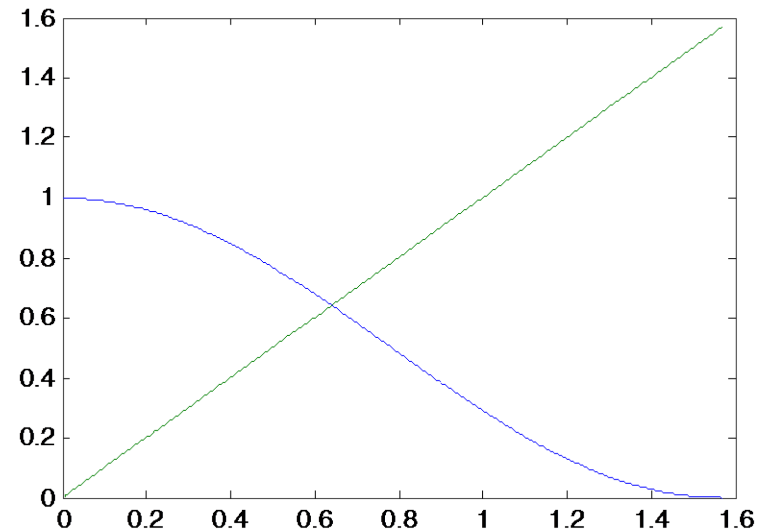
ფუნქცია არ ამოწმებს უძრავი წერტილის იტერაციის კრებადობას

მაგალითი:

$$x = \cos^2(x)$$

```
Xinit = 0.1;
Max_Delta = 1e-10;
```

Max_iter	out
10	0.546457502843768
20	0.603353388813703
30	0.625346578274696
40	0.634654270190017
50	0.638661592769074
100	0.641668024299846
1e+3	0.641714370826628
1e+4	0.641714370826628
1e+5	0.641714370826628

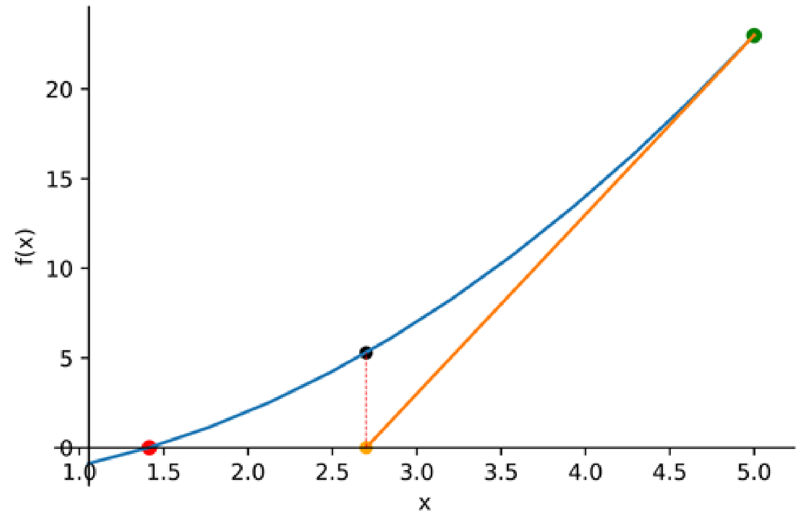


დავალება 3.1.

გამოითვალეთ ელიფსურ ორბიტაზე მბრუნავი პლანეტის ექსცენტრული ანომალიის კუთხის დამოკიდებულება საშუალო ანომალიის კუთხეზე $E=E(M)$, ორბიტის ექსცენტრისიტეტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის: $e=0.01, 0.05, 0.1, 0.2$.

ნიუტონის მეთოდი
(Newton-Raphson method)

არსებობს *f(x)* და მისი პირველი წარმოებული;



$$f(x) = 0$$
$$y = f(x)$$

თუ $f'(x_n) \neq 0.$

f(x) წრფივი აპროქსიმაცია მხებით და წრფის x ღერძთან გადაკვეთის წერტილის პოვნა;

$$T(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) = 0,$$

პირველი ტრუნკაცია (ტეილორის მწკრივი);

შემდგომი იტერაცია:

$$x_{n+1} = x_n + h_n, \quad h_n = -f(x_n)/f'(x_n).$$

ამონახსნი:

$$|h_n| < \delta$$

მაგალითი:

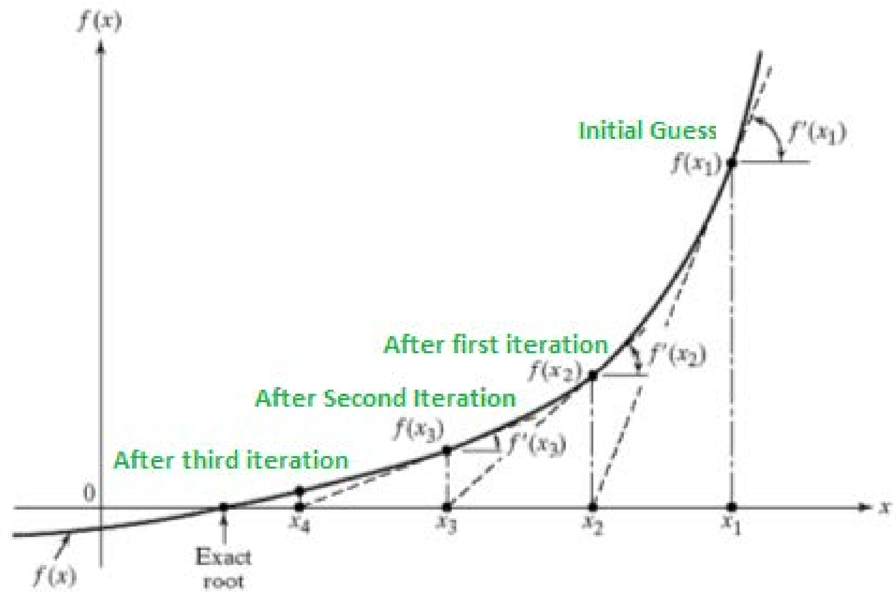
$$f(x) = (x/2)^2 - \sin x = 0$$
$$f'(x) = x/2 - \cos x,$$

$$x_0 = 1.8$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	h_n
0	**1**.8	−0.163847 630878	1.127202 094693	−0.145357 812631
1	**1.9**45357 812631	0.015436 106659	1.338543 359427	0.011532 018406
2	**1.933**825 794225	0.000095 223283	1.322020 778469	0.000072 028582
3	**1.933753 76**5643	0.000000 003722	1.3219174 29113	0.000000 002816
4	**1.933753 762827**			

ნიუტონ რაფსონის მეთოდი:

+ კვადრატული კრებადობა მარტივ ფესვთან;
+ წრფივი კრებადობა რთულ ფესვთან



პრობლემები:

- იტერაცები შეიძლება გახდეს განშლადი (მაგ. გადაღუნვის წერტილი);
- საჭიროა წარმოებულების გამოთვლა;
- ვერ ვაფასებთ ცდომილების ფუნქციას;

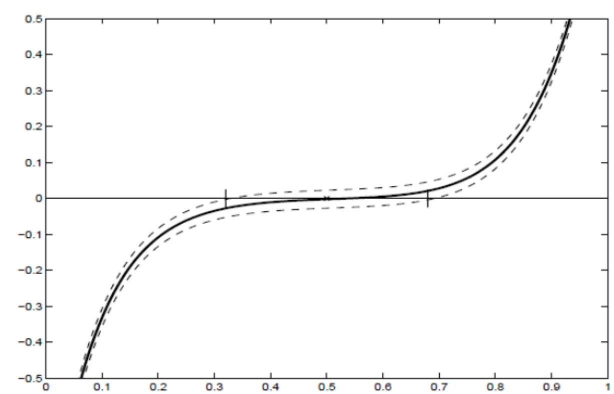


Figure 6.5.1. *An ill-conditioned root.*

დაზღვეული ნიუტონის მეთოდი

ბისექცია + ნიუტონის მეთოდი

საწყისი ინტერვალი: $a < b$, ვთქვათ $f(a)f(b) < 0.$

- ბისექციის იტერაცია: $a' = x,\ b' = b$ან $a' = a,\ b' = x$, სადაც: $f(a')f(b') \leq 0.$

- ნიუტონის იტერაცია: $z = x - f(x)/f'(x)$

თუკი *a*<*z*<*b:* *x*=*z*
სხვა შემთხვევაში: $x = (a+b)/2$
$z \in [a, b]$

$$b - z = b - x + f(x)/f'(x) \geq 0$$

$$z - a = x - a - f(x)/f'(x) \geq 0.$$

ა) $f'(x) > 0.$ $\quad (b-x)f'(x) \geq -f(x) \quad \text{and} \quad (x-a)f'(x) \geq f(x).$

ბ) $f'(x) < 0$ $\quad (b-x)f'(x) \leq -f(x) \quad \text{and} \quad (x-a)f'(x) \leq f(x).$

მაღალი რიგის ნიუტონის მეთოდი

კვადრატული მიახლოება:

$$T(h) = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2} f''(x_n) = 0$$

ამონახსნის იტერაცია: $h = x - x_n$
თუკი:

$$f'(x_n)^2 \geq 2f(x_n)f''(x_n)$$

$$h_n = -\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2\frac{f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}} \right).$$

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n) \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2t(x_n)}},$$

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad t(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

სეკანტის მეთოდი

ნიუტონის მეთოდის მინუსი: ფუნქციის ანალიზური წარმოებულის არსებობა.
შემთხვევა: *უცნობია ფუნქციის წარმოებული ანალიზური სახით;*

სეკანტის მეთოდში წარმოებულის შეფასება ხდება დისკრეტულად:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

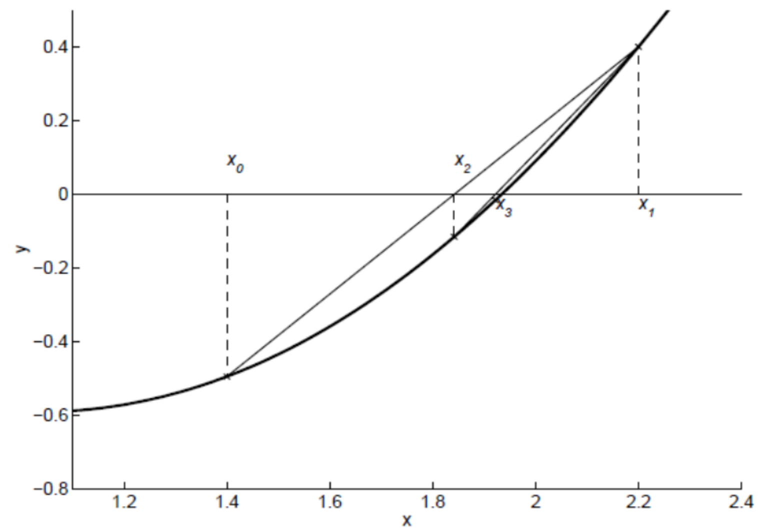
$$x_{n+1} = x_n + h_n,$$

$$h_n = -f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

მაგალითი:

$$f(x) = (x/2)^2 - \sin x = 0$$
$$x_0 = 1.5, x_1 = 2.$$

n	x_n	$f(x_n)$	h_n
0	1.5	−0.434994986604	
1	2.0	+0.090702573174	−0.086268778965
2	**1.9**13731221035	−0.026180060742	+0.019322989205
3	**1.933**054210240	−0.000924399645	+0.000707253882
4	**1.93376**1464122	+0.000010180519	−0.000007704220
5	**1.933753**759902	−0.000000003867	+0.000000002925
6	**1.933753762827**		



სკალარული ფუნქციის მინიმუმის პოვნა

ერთგანზომილებიანი მინიმიზაციის პრობლემა (ოპტიმიზაციის ამოცანები).

თუკი ფუნქცია დიფერენცირებადია მინიმუმში:

$$f'(x^*) = 0.$$

ფუნქციის წარმოებულის ნულთან ტოლობა (მეორე წარმოებული დადებითია, ან საზღვრები).
ფუნქციის ლოკალური მინიმუმები.

დავალება 3.2.

იპოვეთ *x=tan(x)* განტოლების დადებითი ფესვები;

დავალება 3.3.

გამოიყენეთ ნიუტონის მეთოდი და იპოვეთ შემდეგი განტოლების ამონახსნი 1e-6 სიზუსტით:

$$x = 1 - e^{-2x} \qquad (1)$$

$$x \ln(x) - 1 = 0 \qquad (2)$$