

რიცხვითი წარმოებულები

“გლუვი ფუნქციის” წარმოებულის გამოთვლა მცირე h ბიჯზე სხვაობების გამოყენებით:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

ტეილორის „ჩამოჭრილი“ მწკრივი:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi), \quad \xi \in (x, x+h).$$

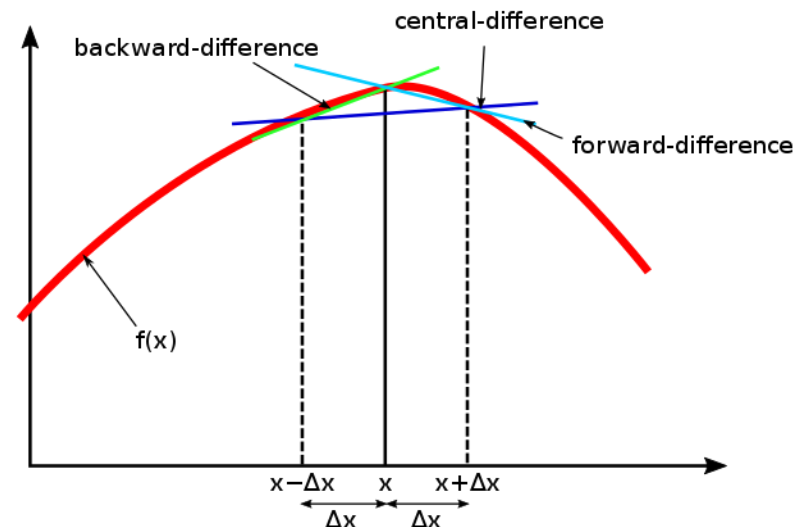
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi), \quad \xi \in (x, x+h).$$

„მარცხენა“ და „მარჯვენა“ წარმოებულები:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h},$$

„ცენტრალური“ წარმოებული $(L+R)/2$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$



ცენტრალური წარმოებულის ფორმულის ცდომილება:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1),$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2).$$

$$\xi_1 \in (x, x+h)$$

$$\xi_2 \in (x-h, x).$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)],$$

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)].$$

$$\xi \in (x-h, x+h)$$

საბოლოოდ:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(\xi),$$

პირველი რიგის ცენტრალური წარმოებულის ფორმის ცდომილების რიგი: $O(h^2)$

მეორე რიგის ცენტრალური წარმოებული:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) \pm \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_{\pm}).$$

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{24}(f^{(4)}(\xi_-) + f^{(4)}(\xi_+)) = f''(x) + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi),$$

ცდომილება:

$$-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x-h, x+h).$$

მეორე რიგის ცენტრალური წარმოებულის (3 წერტილიანი) ფორმის ცდომილების რიგი: $O(h^2)$

5 წერტილიანი ფორმულა (სტენსილი) (5 point stencil)

5 მეზობელი წერტილი: $\{x - 2h, x - h, x, x + h, x + 2h\}$.

$$f'(x) \approx \frac{-f(x + 2h) + 8f(x + h) - 8f(x - h) + f(x - 2h)}{12h}$$

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) \pm \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + O_{1\pm}(h^4). \quad (E_{1\pm}).$$

$$f(x + h) - f(x - h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f^{(3)}(x) + O_1(h^4). \quad (E_1).$$

$$f(x \pm 2h) = f(x) \pm 2hf'(x) + 2h^2f''(x) \pm \frac{4h^3}{3}f^{(3)}(x) + O_{2\pm}(h^4). \quad (E_{2\pm})$$

$$f(x + 2h) - f(x - 2h) = 4hf'(x) + \frac{8h^3}{3}f^{(3)}(x) + O_2(h^4). \quad (E_2).$$

გამოვაკლოთ: $8 \times E_1 - E_2$

$$8f(x + h) - 8f(x - h) - f(x + 2h) + f(x - 2h) = 12hf'(x) + O(h^4)$$

5 წერტილიანი წარმოებულის ფორმულის ცდომილების რიგი: $O(h^4)$

მაღალი რიგის წარმოებულები (5 წერტილიანი სტენსილი)

$$f''(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2}$$

$$f^{(3)}(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3}$$

$$f^{(4)}(x) \approx \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4}$$

ორი ცვლადის ფუნქცია

$$f_x(x, y) \approx \frac{f(x+h, y) - f(x-h, y)}{2h}$$

$$f_y(x, y) \approx \frac{f(x, y+k) - f(x, y-k)}{2k}$$

მეორე რიგის წარმოებული:

$$f_{xx}(x, y) \approx \frac{f(x+h, y) - 2f(x, y) + f(x-h, y)}{h^2}$$

$$f_{yy}(x, y) \approx \frac{f(x, y+k) - 2f(x, y) + f(x, y-k)}{k^2}$$

ორი ცვლადის ფუნქციის შერეული წარმოებული:

$$f_{xy}(x, y) \approx \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y-k) - f(x-h, y+k) + f(x-h, y-k)}{4hk}.$$



ანონსი:

წარმოებულის გამოსათვლელი n რიგის სიზუსტის დისკრეტული ფორმულიდან $(n+1)$ რიგის სიზუსტის ფორმულის მიღება: რიჩარდსონის ექსტრაპოლაცია >>> [ლექცია 14](#).

ფუნქციის დისკრეტული წარმომადგენლის ასახვად ოპტიმალური ბიჯის შერჩევა:

დიდი ბიჯი: N რიგის დისკრეტული ფორმულის ცდომილება $M \cdot O(h^{N-1})$;
 M - ბიჯების რაოდენობა;

მცირე ბიჯი: დისკრეტული ოპერაციების (ბიჯების) რაოდენობის ზრდა და დამრგვალების ცდომილების (truncation error) დაგროვება.

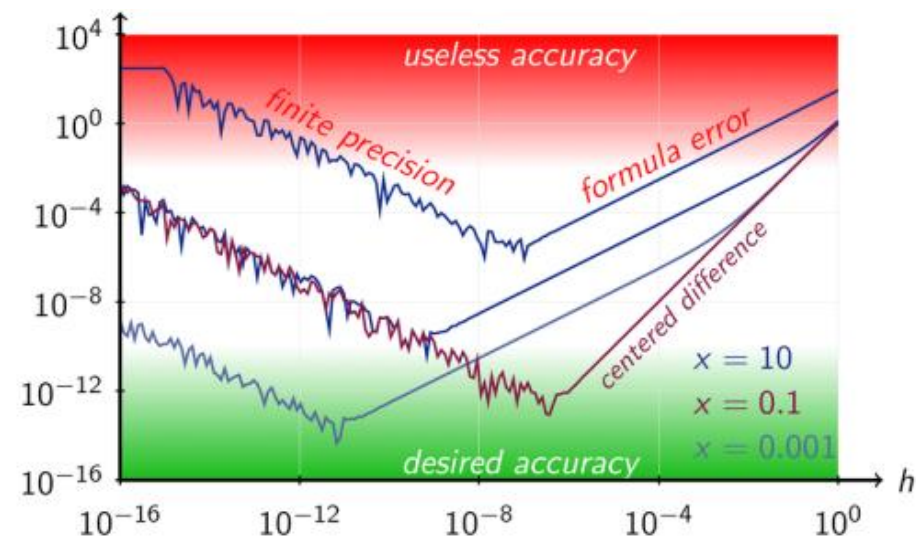
ცვლადის ტიპი (მაგ. floating point) და დამრგვალების ცდომილება:

- Single precision (32bit);
- Double precision (64 bit);

მინიმალური ჯამური ცდომილება: **ოპტიმალური ბიჯი h .**

დავალება 4.1

$\sin(x)$ ფუნქციის მაგალითზე $(0, 2\pi)$ ინტერვალში გამოთვალეთ ოპტიმალური დისკრეტული ბიჯის ცენტრალური წარმომადგენლის ფორმულისათვის. ააგეთ ცდომილების დამოკიდებულება დისკრეტიზაციის ბიჯზე (ანალიზური და რიცხვით გამოთვლებს შორის სხვაობა, იხ. სურათი.)



დავალება 4.2.

გამოითვალეთ წარმოებულები ფუნქციისათვის $f(x) = \sin^2(1.2x) + \cos^2(0.8x)$ მშემდეგ ინტერვალში:
 $x = (0:0.1:20)$;

$f1_an(x)$	$= d/dx f(x)$	: ანალიზური წარმოებული;
$f1_left(x)$	$= d/dx f(x)$	: რიცხვითი წარმოებული: მარცხენა ფორმულა;
$f1_right(x)$	$= d/dx f(x)$	: რიცხვითი წარმოებული: მარჯვენა ფორმულა;
$f1_center(x)$	$= d/dx f(x)$	: რიცხვითი წარმოებული: ცენტრალური წარმოებულის ფორმულა;
$f1_5(x)$	$= d/dx f(x)$	: რიცხვითი წარმოებული: 5 წერტილიანი ფორმულა;
$f2_an(x)$	$= d^2/dx^2 f(x)$	: მეორე რიგის ანალიზური წარმოებული;
$f2_center(x)$	$= d^2/dx^2 f(x)$	: მეორე რიგის რიცხვითი წარმოებული: ცენტრალური ფორმულა;
$f2_5(x)$	$= d^2/dx^2 f(x)$	: მეორე რიგის რიცხვითი წარმოებული: 5 წერტილიანი ფორმულა;

დახაზეთ ერთ გრაფიკზე:

1. $(f1_an-f1_left)$
2. $(f1_an-f1_right)$
3. $(f1_an-f1_center)$
4. $(f1_an-f1_5)$

დახაზეთ ერთ გრაფიკზე:

1. $(f2_an-f1_left)$
2. $(f2_an-f1_center)$
3. $(f2_an-f1_5)$

სტოქასტური ვექტორი (პროცესი)

“ვინერის პროცესი”

„გლუვი“ ფუნქციების რიცხვითი წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმები დისკრეტულ ვექტორებზე არ მუშაობენ სტოქასტური ვექტორებისათვის.

შემთხვევითი რიცხვები $[-1,1]$ ინტერვალში:

$\xi_1, \xi_2, \dots$

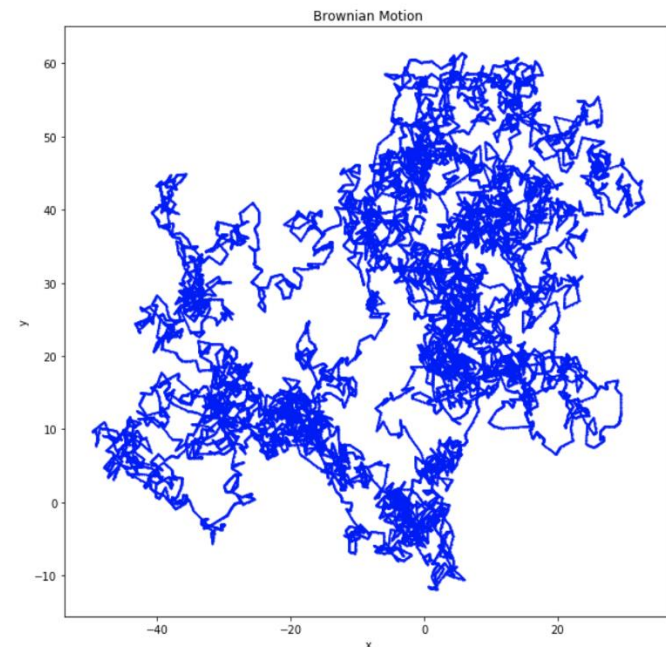
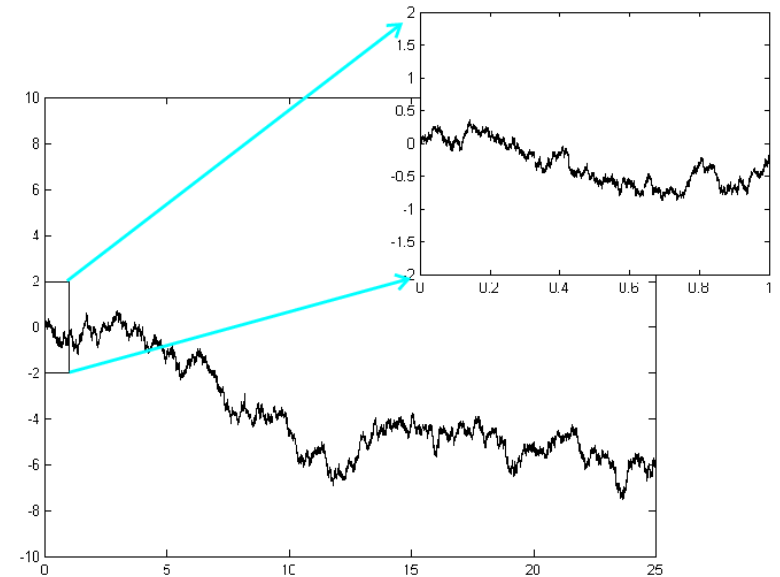
შემთხვ. რიცხვებისაგან შედგენილი სტოქასტური ვექტორი

$$W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1 \leq k \leq [nt]} \xi_k, \quad t \in [0, 1]$$

„ქაოსური ჰევისაიდის ფუნქციების ჯამი“

$n \rightarrow \infty$: ვინერის პროცესი W_t

ფიზიკური მაგალითი: მოძრაობა ორ განზომილებაში ვინერის პროცესით მოცემულ X-Y გადაადგილებით: ბროუნის მოძრაობა Bn



ვინერის პროცესის თვისებები

ვინერის პროცესის ალბათობის განაწილების ფუნქცია:

$$f_{W_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

ვინერის პროცესის ინტეგრალი:

$$W^{(-1)}(t) := \int_0^t W(s) ds$$

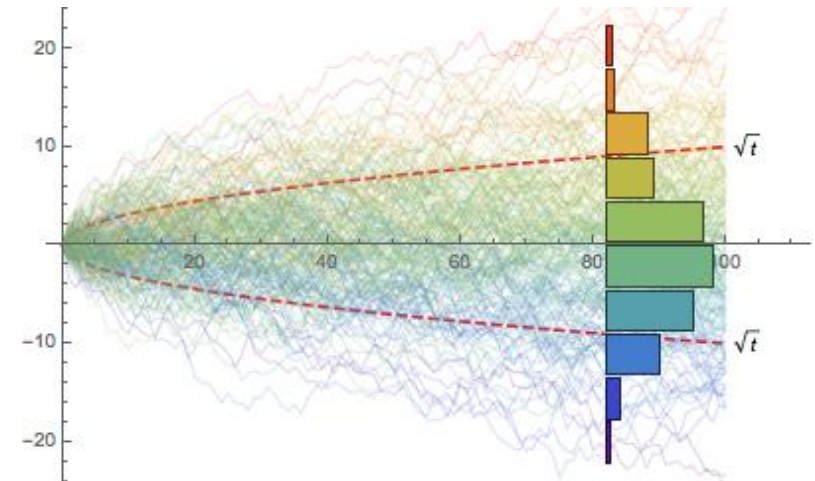
ვინერის სტოქასტური ვექტორი ფურიე მწკრივებით:

$$W_t = \xi_0 t + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \frac{\sin \pi n t}{\pi n}$$

დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dX_t}{dt} = a(X_t)$$

ვიპოვოთ ამონახსნი თუკი საწყისი მნიშვნელობა X_0 ქაოსურია: სტოქასტური პროცესი.



იტოს (Ito) სტოქასტური კალკულუსი

$$dX_t = a(X_t)dt + c(X_t)dB_t$$

„რეგულარული“ პროცესი

„სტოქასტური“ პროცესი

$a(X)$ - დრეიფის ფუნქცია

$c(X)$ - დიფუზიის ფუნქცია

შემთხვევითი პროცესის წარმოებული შემთხვევითი სიდიდეა (stochastic self-similar process).

შესაძლებელია მხოლოდ (სტოქასტური) ინტეგრალის გამოთვლა(!)

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t c(X_s)dB_s$$

სადაც იტოს სტოქასტური ინტეგრალი:

$$I_t = \int_0^t c(X_s)dB_s$$

ამონახსნის „რეგულარულ“ და „ქაოსური“ ნაწილად გაყოფა:

$$X_t = x_t + I_t$$

იტოს სტოქასტური დიფერენციალი:

იტოს ლემა:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t,$$

სტოქასტური პროცესის დიფერენციალი (dY_t):

$$Y_t = f(t, X_t)$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x} dB_t$$

დამატებითი წევრები:

1. კვადრატული წევრი;
2. დისპერსიული ნაწილი;

სტოქასტური ვექტორების ნამრავლის დიფერენციალი:

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$$

ვინერის დისკრეტული პროცესის მოდელირება

ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი შემთხვევითი რიცხვების ვექტორი: $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$

$$W_0 = 0$$

$$W_1 = W_0 + Z_1 (t_1 - t_0)^{1/2}$$

$$W_2 = W_1 + Z_2 (t_2 - t_1)^{1/2}$$

...

$$W_{k+1} = W_k + Z_k (t_{k+1} - t_k)^{1/2}$$

შემთხვევითი პროცესი, რომელიც იკრიბება ბროუნის პროცესისაკენ როდესაც $n \rightarrow \infty$.

მაგალითი:

„გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობა“: $a(X) = aX$, $c(X) = bX$, $a, c = \text{constant}$.

ავიღოთ სტოქასტური ვექტორის ლოგარითმული ფუნქცია: $f(X) = \log(X)$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x} dB_t$$

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dB_t$$

$$d \log X_t = \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{X_t^2} \right)^2 (dX_t)^2$$

$$\log X_t = \log X_0 + \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t + b B_t$$

$$= \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2} b^2 dt$$

$$X_t = X_0 e^{(a - \frac{1}{2} b^2)t + b B_t}$$

$$= \left(aX_t - \frac{1}{2} b^2 \right) dt + \alpha dB_t$$

$\log(\text{ბროუნის მოძრაობა})$

დავალება 4.2

ააგეთ ვინერის სტოქასტური ვექტორი და დახაზეთ გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობის ტრაექტორიები:

$$Y_t = Y_0 e^{\alpha t + \beta B_t}$$

შემდეგი პარამეტრებისათვის:

- 1.) $\alpha=1, \beta=0.1$;
- 2.) $\alpha=0, \beta=0.1$;
- 3.) $\alpha=0.5, \beta=0.5$;
- 4.) $\alpha=0.1, \beta=1$;