

## რიცხვითი ინტეგრება: გაუსის კვადრატურა

გამოვითვალოთ ინტეგრალი ორი წერტილის გამოყენებით. მაგ. ტრაპეციის წესი:

$$\int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(a) + c_2 f(b) = \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b)$$

უფრო ზუსტი შეფასებისათვის შემოვიყვანოთ 4 თავისუფალი პარამეტრი:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

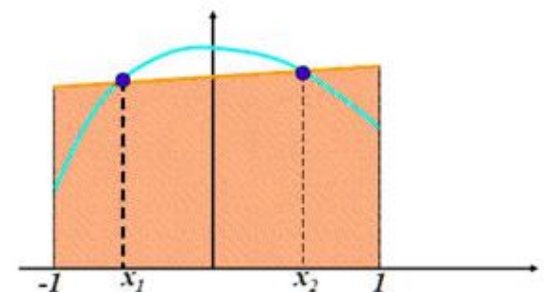
გაუსის კვადრატურების მეთოდი: პარამეტრები  $c_1, c_2, x_1, x_2$  გამოვთვალოთ დაშვებიდან, რომ ფორმულა ზუსტ შედეგს გვაძლევს კუბური პოლინომიალისათვის.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx$$

$$= \left[ a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} \right]_a^b$$

$$= a_0(b-a) + a_1 \left( \frac{b^2 - a^2}{2} \right) + a_2 \left( \frac{b^3 - a^3}{3} \right) + a_3 \left( \frac{b^4 - a^4}{4} \right)$$



გაუსის ფორმულა:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= c_1 (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3) + c_2 (a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3) \\ &= a_0 (c_1 + c_2) + a_1 (c_1 x_1 + c_2 x_2) + a_2 (c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2) + a_3 (c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3) \end{aligned}$$

პირობები:

$$b - a = c_1 + c_2 \quad \frac{b^2 - a^2}{2} = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad \frac{b^4 - a^4}{4} = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 \quad \frac{b^3 - a^3}{3} = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2$$

ამონახსნები:

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x) dx &\approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \\ x_1 &= \left( \frac{b-a}{2} \right) \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{b+a}{2} & c_1 &= \frac{b-a}{2} \\ x_2 &= \left( \frac{b-a}{2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{b+a}{2} & c_2 &= \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

გაუსის კვადრატურების ფორმულა:

$$\int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right) + \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right)$$

მაღალი რიგის გაუსის კვადრატურები:

$$\int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

$$\int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n)$$

გაუსის კვადრატურის სტანდარტული ცხრილი  $[-1,1]$  ინტერვალზე

$$\int_{-1}^1 g(x) dx \cong \sum_{i=1}^n c_i g(x_i)$$

ინტეგრალის საზღვრების გარდაქმნა სტანდარტულ ინტერვალზე გაუსის კვადრატურის გამოსაყენებლად:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt$$

| წერტილების<br>რაოდენობა | წევრების წონები                                          | ფუნქციის<br>არგუმენტები<br>(-1,1)                         |
|-------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 2                       | c1 = 1.000000000<br>c2 = 1.000000000                     | x1 = -0.577350269<br>x2 = 0.577350269                     |
| 3                       | c1 = 0.555555556<br>c2 = 0.888888889<br>c3 = 0.555555556 | x1 = -0.774596669<br>x2 = 0.000000000<br>x3 = 0.774596669 |

|   |                                                                                                                      |                                                                                                                           |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4 | c1 = 0.347854845<br>c2 = 0.652145155<br>c3 = 0.652145155<br>c4 = 0.347854845                                         | x1 = -0.861136312<br>x2 = -0.339981044<br>x3 = 0.339981044<br>x4 = 0.861136312                                            |
| 5 | c1 = 0.236926885<br>c2 = 0.478628670<br>c3 = 0.568888889<br>c4 = 0.478628670<br>c5 = 0.236926885                     | x1 = -0.906179846<br>x2 = -0.538469310<br>x3 = 0.000000000<br>x4 = 0.538469310<br>x5 = 0.906179846                        |
| 6 | c1 = 0.171324492<br>c2 = 0.360761573<br>c3 = 0.467913935<br>c4 = 0.467913935<br>c5 = 0.360761573<br>c6 = 0.171324492 | x1 = -0.932469514<br>x2 = -0.661209386<br>x3 = -0.2386191860<br>x4 = 0.2386191860<br>x5 = 0.661209386<br>x6 = 0.932469514 |

შეამოწმეთ:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

## მრავალჯერადი ინტეგრალები

1 - მრავალჯერადი ინტეგრალის ანალიზურად დაყვანა ერთჯერად ინტეგრალზე და შემდეგ რიცხვითი გამოთვლა;

2 - ინტეგრება თანმიმდევრობით:

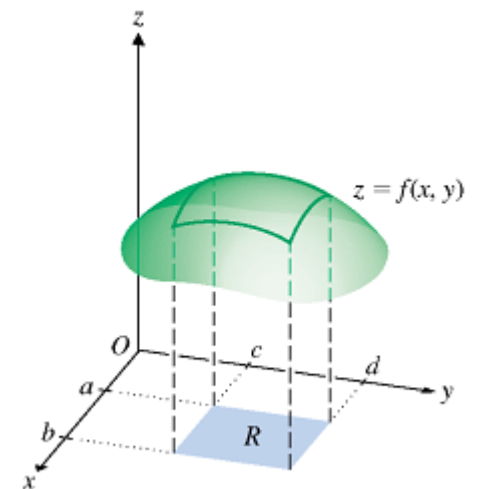
$$I = \int_D f(x, y) dx dy$$

$$I = \int_a^b \phi(x) dx, \quad \phi(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy.$$

$$I \approx \sum_{i=1}^n u_i \phi(x_i),$$

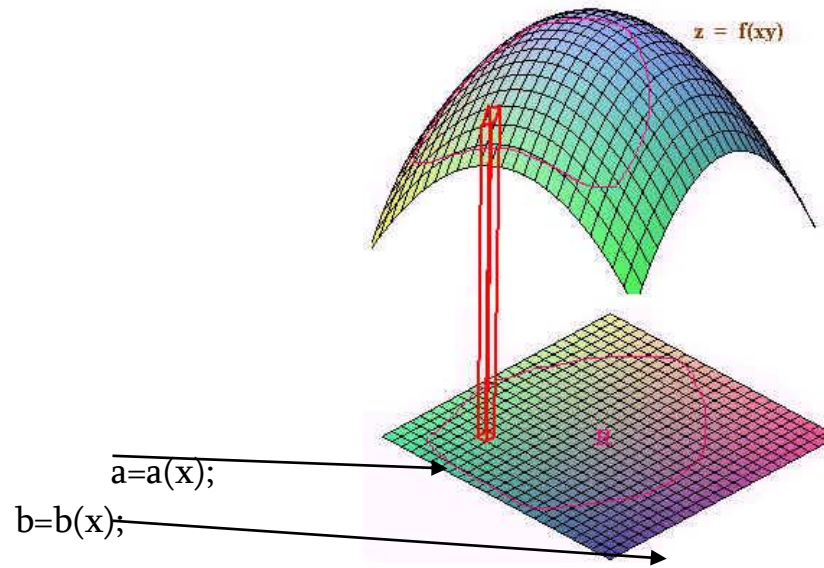
$$\phi(x_i) \approx \sum_{j=1}^n v_j f(x_i, y_j),$$

$$I \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} f(x_i, y_j), \quad w_{ij} = u_i v_j.$$



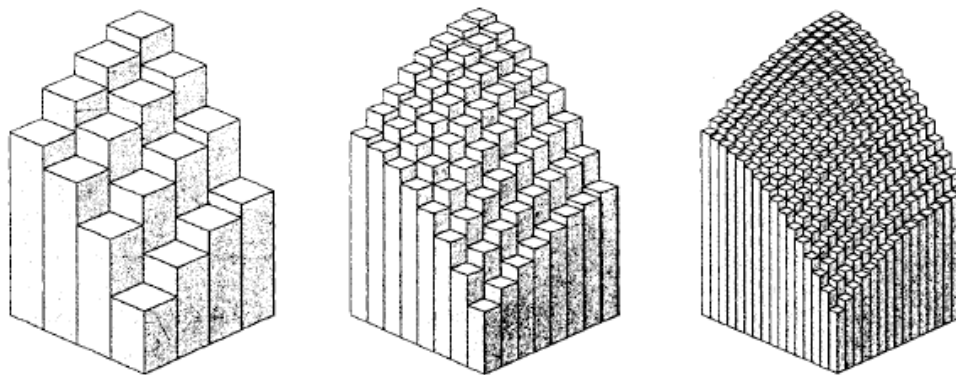
ტრაპეციების წესი:

$$I \approx hk \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}},$$



არამართკუთხა საზღვრები:

მაგ: მართკუთხედების მეთოდი მუდმივი ბიჯით:



$$Int = \text{sum}(\text{sum}(F)) * dx * dy;$$

## დავალება 7.1

გამოითვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$1. \quad I = \int_0^1 \int_0^1 x \tan(y^2) dx dy$$

$$2. \quad I = \int_0^1 \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} x \tan(y^2) dx dy$$

$$3. \quad I = \int_0^1 \int_0^2 \int_1^2 \int_0^{2\pi} \sin(xyz) \tan(xy) \cos\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{10} + \varphi\right) dx dy dz d\varphi$$