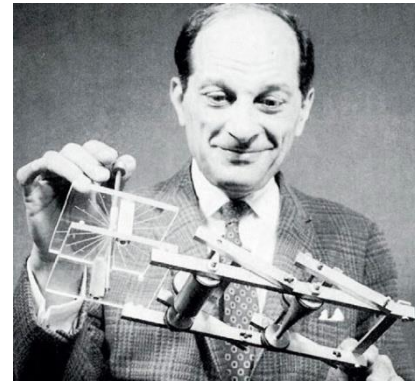
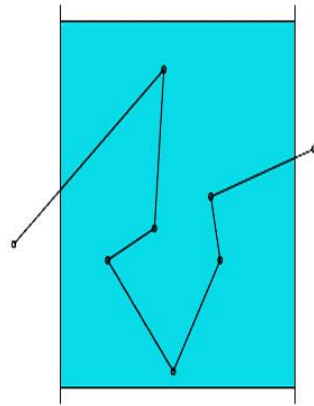


მონტე კარლო მეთოდები

მოდელირება შემთხვევითი რიცხვების გამოყენებით.

მაგ: ნეიტრონების ფარის მოდელირება (FERMIAC)

შემთხვევითი რიცხვების მექანიკური გენერატორი



შემთხვევითი რიცხვების ანალიზური გენერატორი:

Mod - ნაშთი გაყოფის შემდეგ (modulo)

Matlab:

`mod(23, 5) = 3`

ფსევდო-შემთხვევითი რიცხვები:

$$N = \text{mod}(11 * N, 31)$$

11, 28, 29, 9, 6, 4, 13, 19, 23, 5 ...

პარკ-მილერის მინიმალური სტანდარტი:

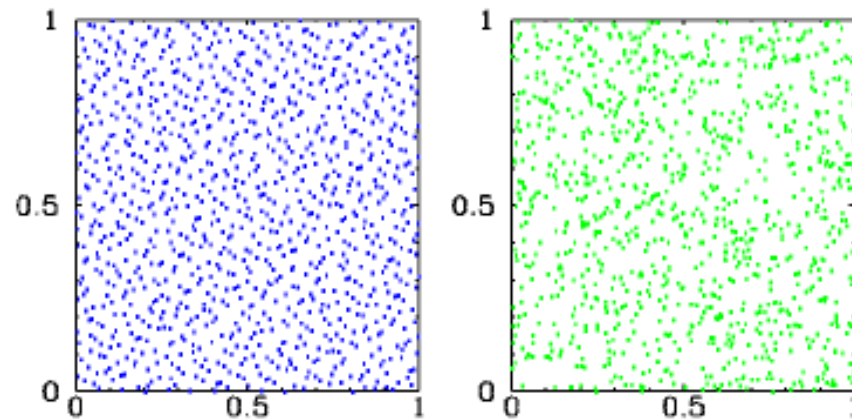
$$x_{k+1} = \text{mod}(2^{31} - 1, 16807x_k)$$

$$x / 2147483647 = (0, 1)$$

მატლაბის იმპლემენტაცია (ver.4: 77),

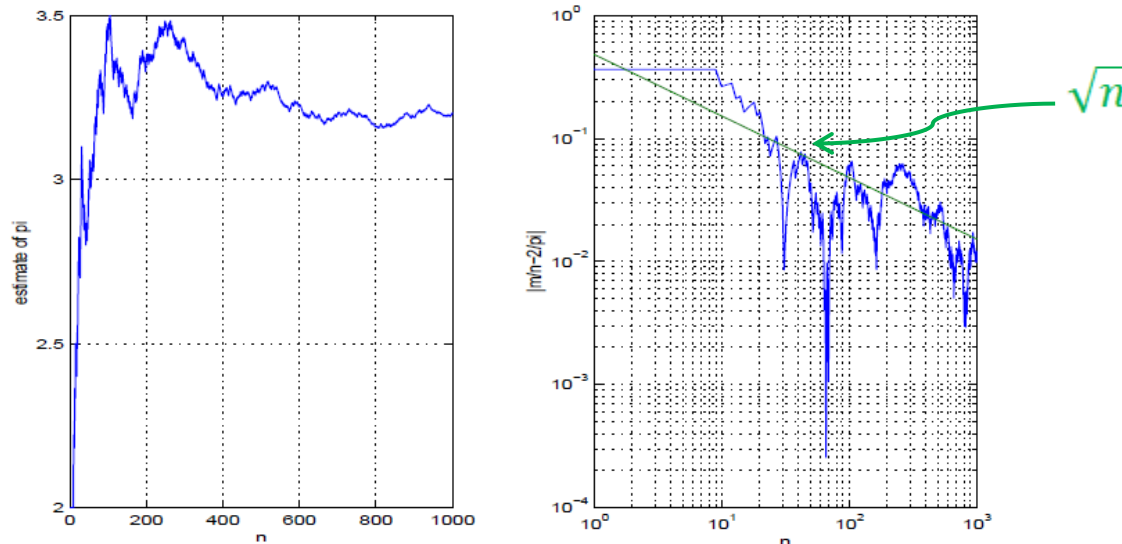
დღეს: 2^{1492} ფსევდო შემთხვევითი სიდიდე განმეორების დაწყებამდე.

სხვადასხვა ტიპის გენერატორები:



π -ს გამოთვლის მცდელობა

Buffon 1770, $[2l/\pi d]$



დავალება 12.1.

Suppose we have a random number generator which generates random numbers uniformly distributed in $[-1, 1]$. To generate random points in the unit circle generate a pair of random numbers x_n, y_n . If $x_n^2 + y_n^2 < 1$, then accept (x_n, y_n) ; otherwise discard (x_n, y_n) and generate new random numbers.

(a) Use, e.g., the function rand in MATLAB to generate points in the unit circle. Plot the accepted points.

(b) What is the probability that a pair of points is discarded? Use the observed number of discarded points in a run of 1000 points to approximate the value of π .

ინტეგრება მონტე კარლო მეთოდით

N შემთხვევითი რიცხვი.

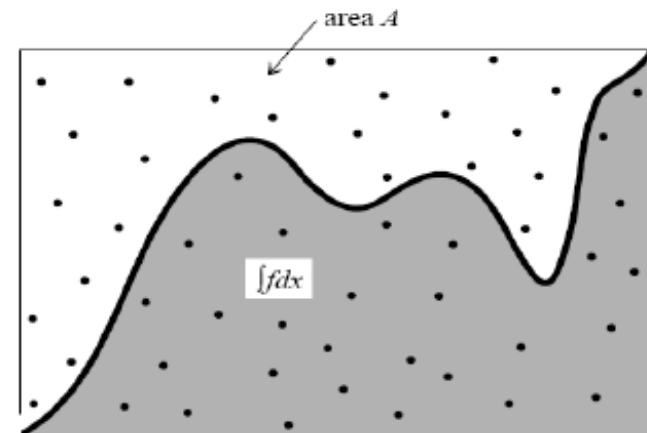
N_1 - გრაფიკს ზევით;

$\text{Int} = S * N_1/N$;

„Hit and miss method“

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is inside the volume} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$V = V_e \frac{\sum_{i=1}^N f(x_i)}{N}$$



კრებადობა:

1 განზომილებიანი ინტეგრალი სიმსონის წესით:

$$\varepsilon \sim N^{-4}$$

d განზომილებიანი ინტეგრალი სიმსონის წესით:

$$\varepsilon \sim N^{-4/d}$$

d განზომილებიანი ინტეგრალი მონტე კარლო ინტეგრებით:

$$\varepsilon \sim N^{-1/2}$$

ფორმალურად მონტეკარლოს გამოყენების უპირატესობა:

$$d > 8$$

მაგრამ:

კვადრატურებით ინტეგრება d განზომილებაში:

N^d ოპერაცია;

მონტეკარლო ინტეგრება d განზომილებაში:

N ოპერაცია;

3-ე რიგის ინტეგრალი:

$$Int = \iiint f(x, y, z) dx dy dz$$

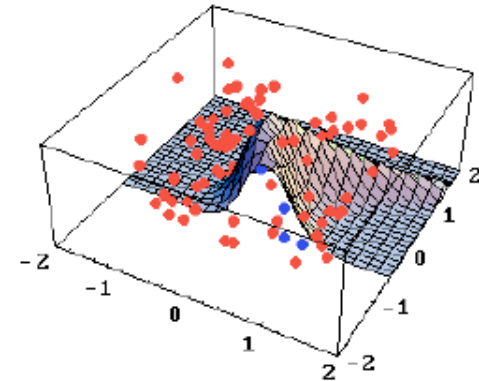
ინტეგრება კვადრატურებით:

$$Int = \Delta V \sum \sum \sum f(x_i, y_j, z_k)$$

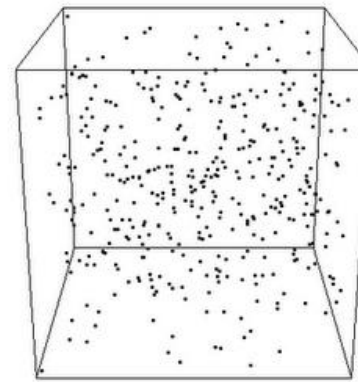
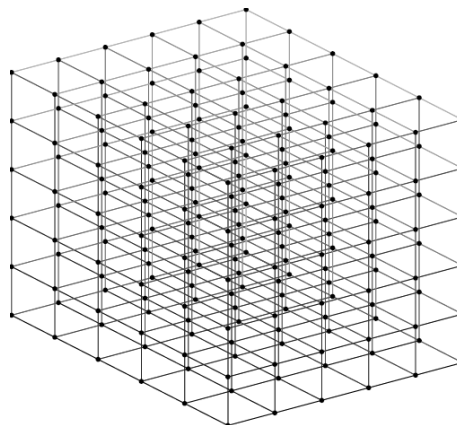
$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

ინტეგრება მონტე კარლო მეთოდით:

$$Int = \Delta V \sum f(V_i)$$



მაღალგანზომილებიანი ერთგვაროვანი ბადის და მონტე კარლო შემთხვევითი წერტილების პროექციები დაბალ განზომილებაში



დავალება 12.2.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \exp[-(x^2 + y^2) / 2] dx dy$$

1. გამოთვალეთ ინტეგრალი:

- ა.) გამოთვალეთ ინტეგრალი რამდენჯერმე ფიქსირებული შემთხვევითი რიცხვების შემთხვევაში. იპოვეთ გამოთვლილი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა.
- ბ.) დახაზეთ ინტეგრალის მნიშვნელობის გამოყენებული შემთხვევითი რიცხვების რაოდენობაზე დამოკიდებულება რამდენჯერმე.

2. გამოთვალეთ ინტეგრალები 7.1.1-3. შეადარეთ კვადრატურების და მონტე-კარლო ინტეგრების გამოთვლის დროები.

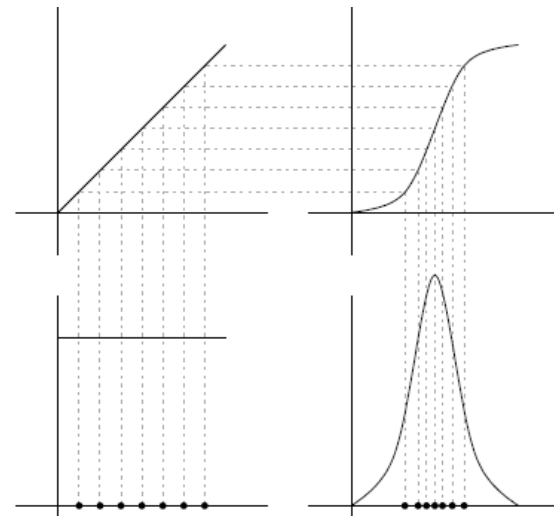
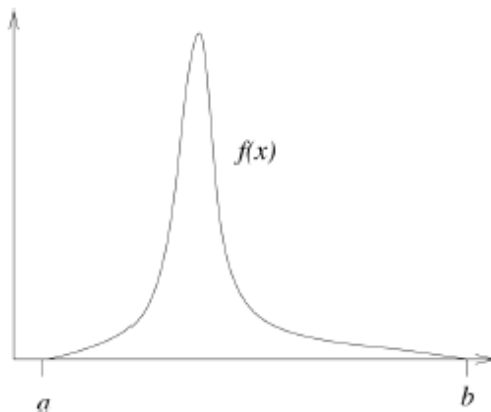
Importance sampling

შემთხვევითი რიცხვების განაწილების მეთოდი: sampling;

Simple sampling - თანაბარი განაწილება;

მონტე კარლო მეთოდების ძირითადი პრობლემა: სწრაფად ცვლადი და არაგლუვი ფუნქციები;

შემთხვევითი რიცხვების განაწილების ფუნქცია $f(x)$:



დამხმარე $g(x)$ ფუნქცია:

დადებითი ანალიზური ინტეგრებადი ფუნქციაა რომელსაც გააჩნია შებრუნებული ფორმა.

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dG(x)$$

სადაც: $G(x) = \int_a^x g(x) dx$

ცვლადთა და საზღვრების გარდაქმნა, $r = G(x)$

$$I = \int_{G(a)}^{G(b)} \frac{f(G^{-1}(r))}{g(G^{-1}(r))} dr$$

თუკი $f(r)/g(r)$ უფრო გლუვი ფუნქციაა, ე.ი. მონტე კარლო ინტეგრება გვაძლევს უფრო ზუსტ შედეგს, ან იგივე სიზუსტის მისაღებად შესაძლებელია წერტილების რაოდენობის შემცირება: (N).

ნორმირების ფუნქციის გამოყენების პირობები:

1. ანალიზურად ინტეგრებადი: $r = G(x)$
2. არსებობს შებრუნებული ფუნქცია: $x = G^{-1}(r)$

მაგალითი:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

ნორმირების ფუნქცია: $\exp(-x)$

$$\int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

$$g(x) = \frac{e^{-x}e}{(e-1)}$$

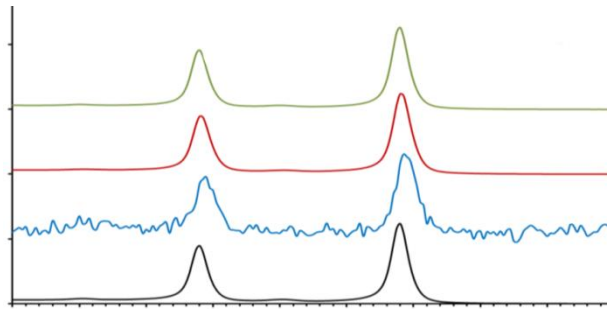
$$G(x) = \int_0^x \frac{e^{-x}e}{e-1} dx = \frac{(1-e^{-x})e}{e-1}$$

შებრუნებული ფუნქცია:

$$G^{-1}(u) = -\log\left(1 - u\frac{e-1}{e}\right)$$

მაგალითი:

ორპიკიანი ფუნქცია



$$g(x) = P_1(x) + P_2(x)$$

დამხმარე ფუნქცია - გაუსის ფუნქციების ჯამი:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

erf(x), erfinv(x)