

რიჩარდსონის ექსტრაპოლაცია

ვთქვათ გვაქვს n რიგის დისკრეტული მეთოდი.

გვჭირდება მეთოდი, რომლის სიზუსტე იქნება $n+1$...

$$f = F(h) + O(h^n)$$

f ზუსტი მნიშვნელობა

$F(h)$ დისკრეტული მეთოდი

$$F(h) = f + O(h^n) = f + Ch^n + O(h^{n+1})$$

გამოვიყენოთ დაბალი რიგის სქემა რამდენჯერმე რათა გავზარდოთ სიზუსტე.
მაგ:

$$1) F(h)$$

$$2) F(h/2)$$

$$F(h/2) = f + C \left(\frac{h}{2}\right)^n + O(h^{n+1})$$

$$AF(h/2) + BF(h) = (A+B)f + C \left(A + \frac{B}{2^n}\right) h^n + O(h^{n+1})$$

$$\frac{AF(h/2) + BF(h)}{A+B} = f + C \frac{\left(B + \frac{A}{2^n}\right)}{A+B} h^n + O(h^{n+1})$$

$$C \frac{\left(B + \frac{A}{2^n}\right)}{A + B} h^n = 0$$

$$A = -2^n B$$

$$A = 1$$

$$B = -2^n$$

$$\frac{F(h) - 2^n F(h/2)}{2^n - 1} = f + O(h^{n+1})$$

რიჩარდსონის ინტერპოლაციის მეთოდით მივიღეთ ერთი რიგით უფრო მაღალი დისკრეტული მეთოდი:

$$R\left(\frac{h}{2}, h\right) = \frac{2^n F(h/2) - F(h)}{1 - 2^n}$$

რიჩარდსონის ექსტრაპოლაციის მეთოდი ნებისმიერ κ -ს ჯერად ბიჯზე:

$$R(h, k) = \frac{k^n F(h) - F(kh)}{k^n - 1}$$

გამოყენების სფერო: წარმოებულები, ინტეგრალები, ნებისმიერი დისკრეტული ფორმა.

დავალება 13.1.

ცენტრალური წარმოებული განაზოგადეთ ბიჯის 3-ე და 4-ე რიგის სიზუსტის დისკრეტული ფორმებად:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} (f(x+h) - f(x-h)) + O(h^2)$$

რიჩარდსონის ინტერპოლაციისათვის გამოიყენეთ ნახევარბიჯი: $R(h,2)$

ექსტრაპოლაციის ალტერნატიული მეთოდები:

რიჩარდ-რომბერგი:

$$\int_a^b f(x)dx = T(h) + a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + \dots ,$$

$$T_{k,j} = \frac{4^j T_{k,j-1} - T_{k-1,j-1}}{4^j - 1}$$

პადეს ექსტრაპოლაცია:

$$f(x) = \sum_{k=0}^M c_k x^k \simeq \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{i=0}^m b_i x^i}.$$

$$T_{N+M}(z) = \sum_{n=0}^{N+M} a_n z^n$$

$$P_M^N(z) = \frac{\sum_{n=0}^N A_n z^n}{\sum_{m=0}^M B_m z^m},$$

- 1) $B_0=1$
- 2) $A_0, A_1, \dots, B_1, B_2, \dots$ სულ $N+M+1$ უცნობი კოეფიციენტი
- 3) გავშალოთ რაციონალური ფუნქცია ტეილორის მწკრივად და კოეფიციენტები სხვადასხვა რიგის ცვლადებთან გავუტოლოდ.

მაგალითად:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots$$

Pade[1,1]

$$P_1^1(z) = \frac{A_0 + A_1 z}{1 + B_1 z}$$

$$\frac{A_0 + A_1 z}{1 + B_1 z} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + O(z^3)$$

$$A_0 + A_1 z + 0 z^2 = 1 + (B_1 + 1)z + \left(B_1 + \frac{1}{2}\right)z^2 + O(z^3)$$

კოეფიციენტების შედარებით (z ნებისმიერია):

$$A_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_1 = \frac{1}{2},$$

პაღეს $[1,1]$ ექსტრაპოლაცია რაციონალურ ფუნქციად:

$$P_1^1(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z}{1 - \frac{1}{2}z}.$$

ექსპონენტას მაგივრად წარმოვიდგინოთ ნებისმიერი სპეც ფუნქცია ...

დავალეზა 13.2.

პაღეს ექსტრაპოლაციით მოახდინეთ პირველი ტიპის ბესელის ფუნქციის რაციონალური ფუნქციის სახით წარმოდგენა:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$$

დაზაზეთ ბესელის ფუნქცია, მისი $[1,1]$ და $[2,2]$ პაღეს ექსტრაპოლაციის შედეგები.

