

რიცხვითი ინტეგრება: გაუსის კვადრატურა

გამოვითვალოთ ინტეგრალი ორი წერტილის გამოყენებით. მაგ. ტრაპეციის წესი:

$$\int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(a) + c_2 f(b) = \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b)$$

უფრო ზუსტი შეფასებისათვის შემოვიყვანოთ 4 თავისუფალი პარამეტრი:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

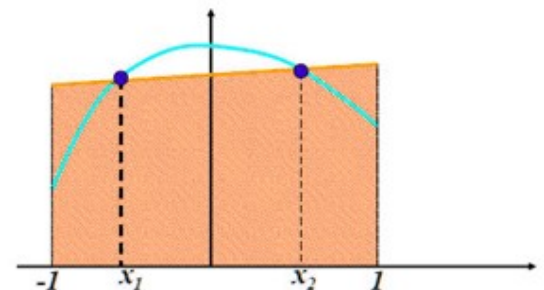
გაუსის კვადრატურების მეთოდი: პარამეტრები c_1 , c_2 , x_1 , x_2 გამოვთვალოთ დაშვებიდან, რომ ფორმულა ზუსტ შედეგს გვაძლევს კუბური პოლინომიალისათვის.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx$$

$$= \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} \right]_a^b$$

$$= a_0(b-a) + a_1 \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) + a_2 \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right) + a_3 \left(\frac{b^4 - a^4}{4} \right)$$



გაუსის ფორმულა:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= c_1(a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3) + c_2(a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3) \\ &= a_0(c_1 + c_2) + a_1(c_1x_1 + c_2x_2) + a_2(c_1x_1^2 + c_2x_2^2) + a_3(c_1x_1^3 + c_2x_2^3)\end{aligned}$$

პირობები:

$$b - a = c_1 + c_2 \quad \frac{b^2 - a^2}{2} = c_1x_1 + c_2x_2 \quad \frac{b^4 - a^4}{4} = c_1x_1^3 + c_2x_2^3 \quad \frac{b^3 - a^3}{3} = c_1x_1^2 + c_2x_2^2$$

ამონახსნები:

$$\begin{aligned}I = \int_a^b f(x)dx &\approx c_1f(x_1) + c_2f(x_2) \\ x_1 &= \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2} & c_1 &= \frac{b-a}{2} \\ x_2 &= \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2} & c_2 &= \frac{b-a}{2}\end{aligned}$$

გაუსის კვადრატურების ფორმულა:

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right) + \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right)$$

მაღალი რიგის გაუსის კვადრატურები:

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

$$\int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5) dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n)$$

გაუსის კვადრატურის სტანდარტული ცხრილი $[-1,1]$ ინტერვალზე

$$\int_{-1}^1 g(x) dx \cong \sum_{i=1}^n c_i g(x_i)$$

ინტეგრალის საზღვრების გარდაქმნა სტანდარტულ ინტერვალზე გაუსის კვადრატურის გამოსაყენებლად:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt$$

წერტილების რაოდენობა	წევრების წონები	ფუნქციის არგუმენტები (-1,1)
2	c1 = 1.000000000 c2 = 1.000000000	x1 = -0.577350269 x2 = 0.577350269
3	c1 = 0.555555556 c2 = 0.888888889 c3 = 0.555555556	x1 = -0.774596669 x2 = 0.000000000 x3 = 0.774596669

4	$c1 = 0.347854845$ $c2 = 0.652145155$ $c3 = 0.652145155$ $c4 = 0.347854845$	$x1 = -0.861136312$ $x2 = -0.339981044$ $x3 = 0.339981044$ $x4 = 0.861136312$
5	$c1 = 0.236926885$ $c2 = 0.478628670$ $c3 = 0.568888889$ $c4 = 0.478628670$ $c5 = 0.236926885$	$x1 = -0.906179846$ $x2 = -0.538469310$ $x3 = 0.000000000$ $x4 = 0.538469310$ $x5 = 0.906179846$
6	$c1 = 0.171324492$ $c2 = 0.360761573$ $c3 = 0.467913935$ $c4 = 0.467913935$ $c5 = 0.360761573$ $c6 = 0.171324492$	$x1 = -0.932469514$ $x2 = -0.661209386$ $x3 = -0.2386191860$ $x4 = 0.2386191860$ $x5 = 0.661209386$ $x6 = 0.932469514$

გაუს-ლეჟანდრის კვადრატურები

დავალება 7.1.

1. ბოზე-აინშტაინის ინტეგრალი:
$$\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \Gamma(n+1)\zeta(n+1)$$

შეამოწმეთ გაუსის კვადრატურტის გამოყენებით $n=3$:
$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

2. ამოხსენით ინტეგრალი 2,3,4,5 და 6 წერტილიანი კვადრატურების გამოყენებით:
[$Si(3) = 1.848652527999...$]

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin(3x)}{x} dx$$

მრავალჯერადი ინტეგრალები

1 - მრავალჯერადი ინტეგრალის ანალიზურად დაყვანა ერთჯერად ინტეგრალზე და შემდეგ რიცხვითი გამოთვლა;

2 - ინტეგრება თანმიმდევრობით:

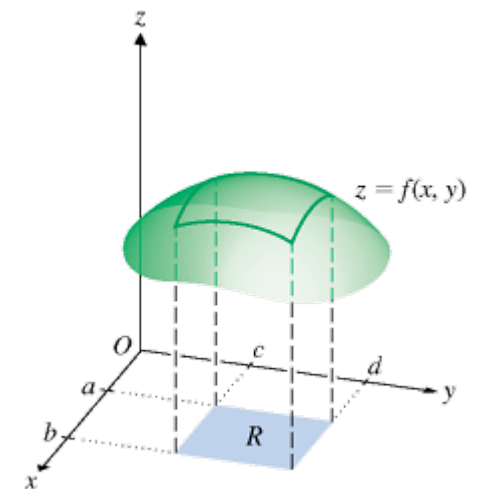
$$I = \int_D f(x, y) dx dy$$

$$I = \int_a^b \phi(x) dx, \quad \phi(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy.$$

$$I \approx \sum_{i=1}^n u_i \phi(x_i),$$

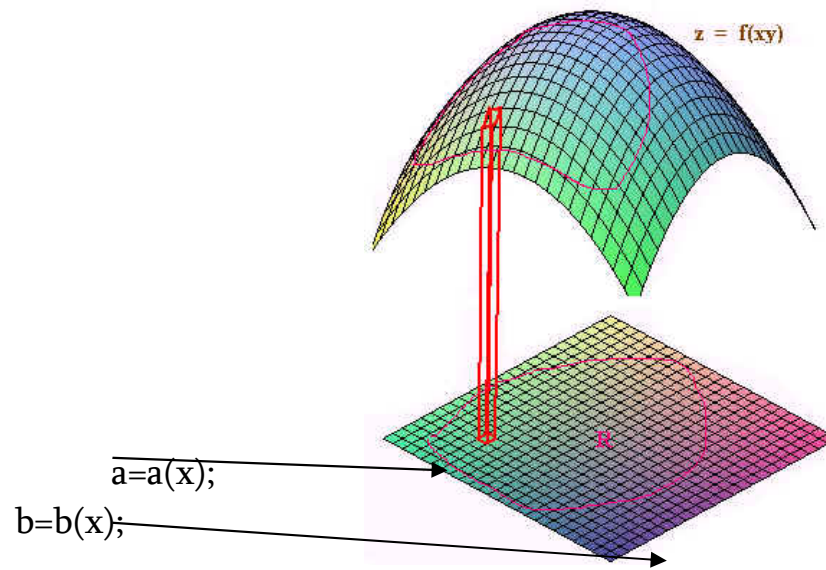
$$\phi(x_i) \approx \sum_{j=1}^n v_j f(x_i, y_j),$$

$$I \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} f(x_i, y_j), \quad w_{ij} = u_i v_j.$$



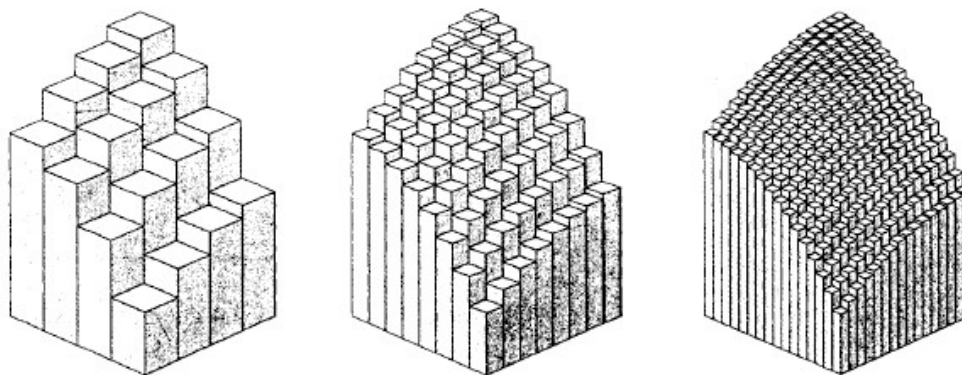
ტრაპეციების წესი:

$$I \approx hk \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}},$$



არამართკუთხა საზღვრები:

მაგ: მართკუთხედების მეთოდი მუდმივი ბიჯით:



$$Int = \text{sum}(\text{sum}(F)) * dx * dy;$$

დავალება 7.2

გამოითვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$1. \quad I = \int_0^1 \int_0^1 x \tan(y^2) dx dy$$

$$2. \quad I = \int_0^1 \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} x \tan(y^2) dx dy$$

$$3. \quad I = \int_0^1 \int_0^2 \int_1^2 \int_0^{2\pi} \sin(xyz) \tan(xy) \cos\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{10} + \varphi\right) dx dy dz d\varphi$$