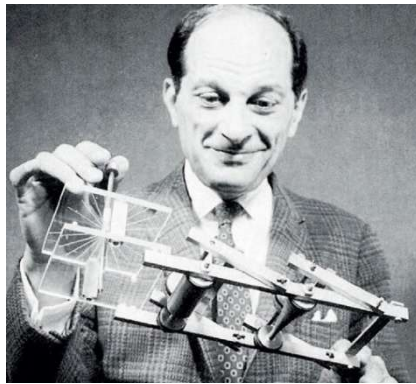
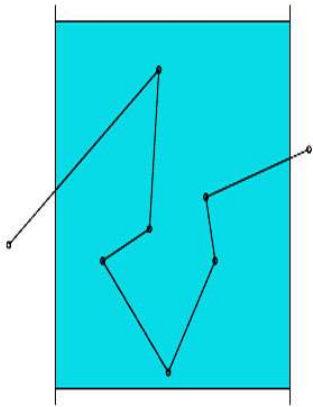


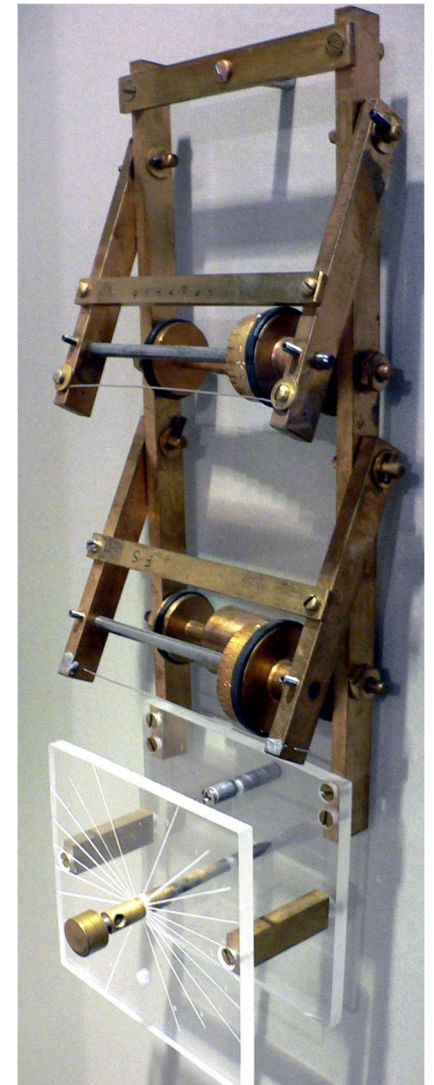
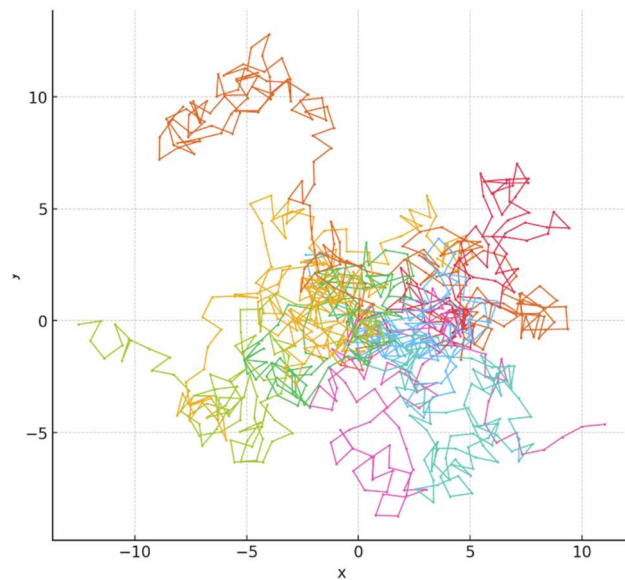
„მონტე კარლო“ მეთოდები

მოდელირება შემთხვევითი რიცხვების საშუალებით.

ფერმის შემთხვევითი რიცხვების მექანიკური გენერატორი FERMIAC



ნეიტრონების ფარის მოდელირება (ანალოგური კომპიუტერი)



ფსევდო-შემთხვევითი რიცხვების ანალიზური გენერატორი:

Mod - ნაშთი გაყოფის შემდეგ (modulo)

Matlab:

`mod(23, 5)=3` ფსევდო-შემთხვევითი რიცხვები

`N = mod(11*N, 31)`
 11, 28, 29, 9, 6, 4, 13, 19, 23, 5 ...

პარკ-მილერის მინიმალური სტანდარტი:

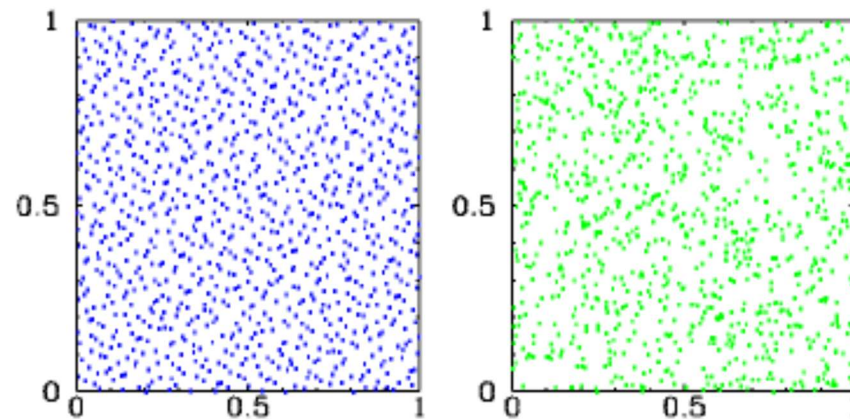
$$x_{k+1} = \text{mod}(2^{31} - 1, 16807x_k)$$

$x / 2147483647 = (0, 1)$

მატლაბის შემთხვევითი რიცხვების გენერატორის იმპლემენტაცია (rand)

დღეს: 2^{1492} ფსევდო შემთხვევითი სიდიდე განმეორების დაწყებამდე.

სხვადასხვა ტიპის გენერატორები:



შემთხვევითი რიცხვების გენერატორები

Pseudo-Random ფსევდო-შემთხვევითი რიცხვების გენერატორები

ვიზუალურ - შემთხვევითი რიცხვები. არ მეორდება „პერიოდის“ შიგნით

Park-Miller: 10^9

Xoshiro256: 2^{256}

Mersenne Twister: 10^{6000}

კრებადობა: $1/n^{1/2}$

Quasi-Random კვაზი-შემთხვევითი რიცხვების გენერატორები

ვიზუალურად თანაბრად ავსებენ სივრცეს: „დეტერმინისტული შემთხვევითობა“

ამოცანები: ინტეგრება, სემპლინგი;

მეთოდები: Sobol, Halton, Faure

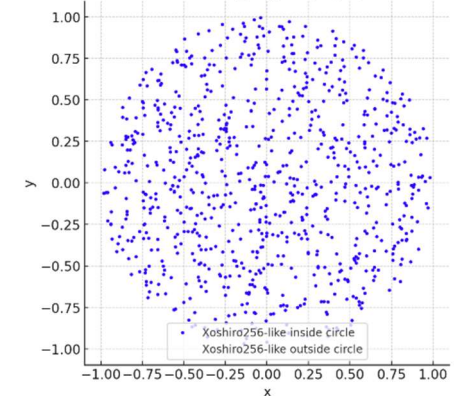
კრებადობა: $1/n$

Hard-Random ნამდვილი შემთხვევითი რიცხვები

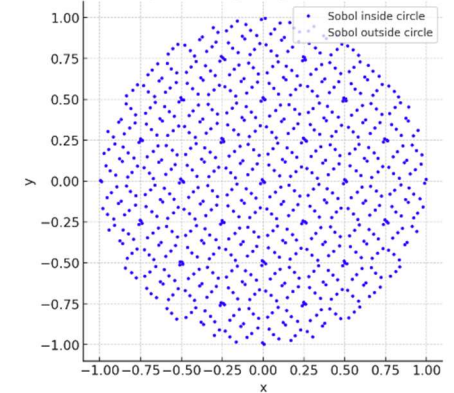
ფიზიკურად (hardware) შემთხვევითი რიცხვები:

სითბური ფლუქტურაციები, რადიოაქტიული დაშლა, ტურბულენტობა

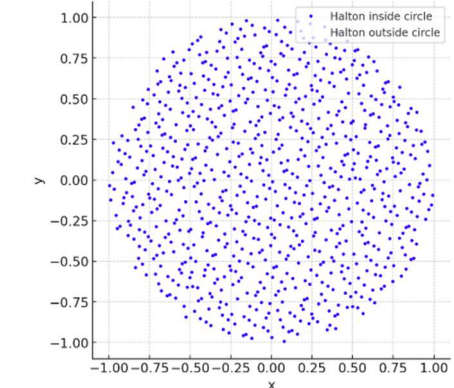
Xoshiro256-like (via default_rng) in $[-1, 1]^2$ with Circle Filter



Sobol Sequence in $[-1, 1]^2$ with Circle Filter



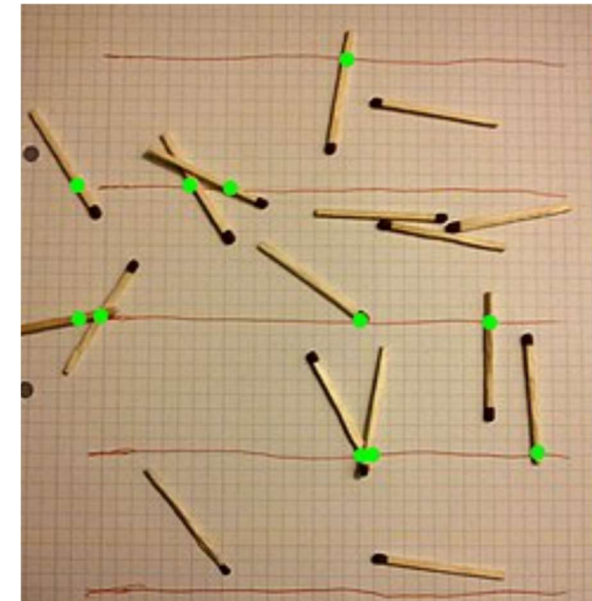
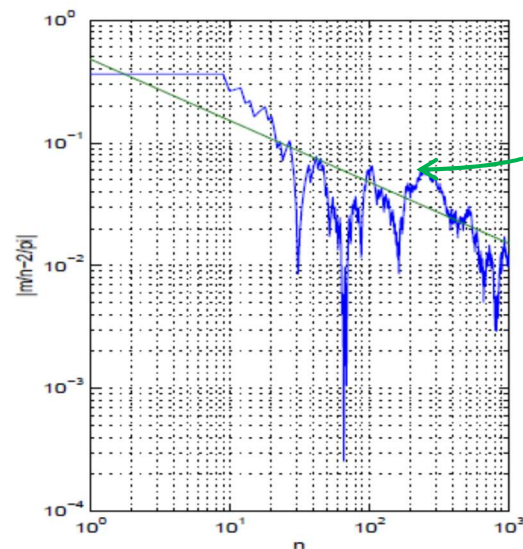
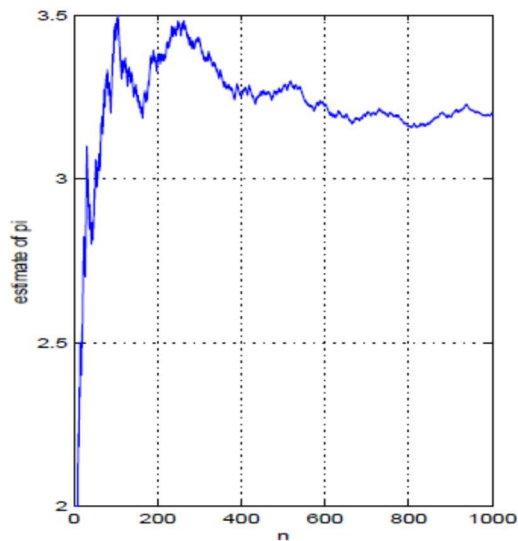
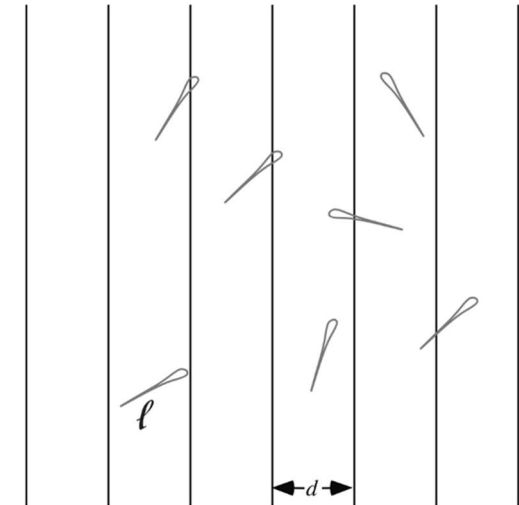
Halton Sequence in $[-1, 1]^2$ with Circle Filter



გამოთვლები შემთხვევითი რიცხვებით

π -ს გამოთვლა (Buffon 1770)

პარალელურ ზოლებს შორის მანძილი: d
 ნემსის სიგრძე: l
 ალბათობა რომ ნემსი კვეთს ზოლს ($l < d$): $2l/\pi d$

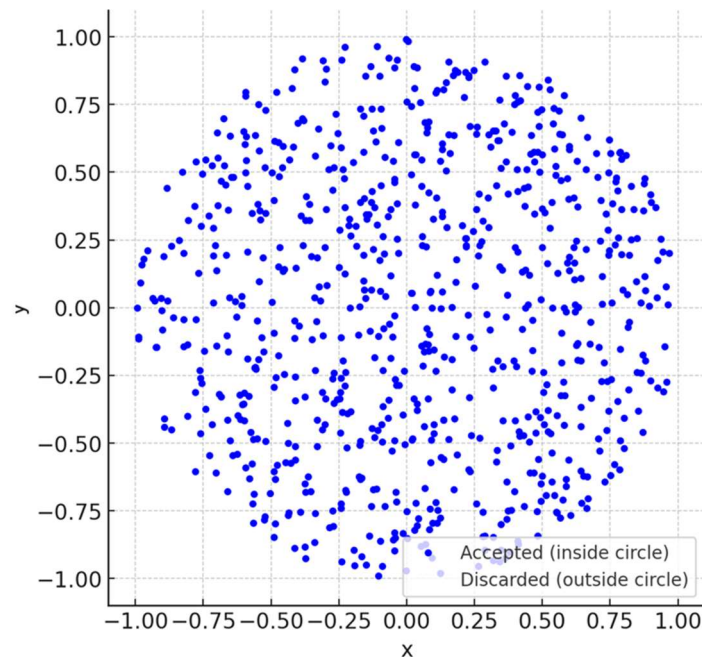


დავალება 8.1.

მოცემულია შემთხვევითი რიცხვების გენერატორი, რომელიც თანაბრად ანაწილებს რიცხვებს ინტერვალში $[-1, 1]$. ერთეულოვან წრეწირში წერტილების დასასმელად დააგენერირეთ შემთხვევითი რიცხვების წყვილების თანმიმდევრობა: (x_n, y_n) . თუკი $x_n^2 + y_n^2 < 1$ წერტილი (x_n, y_n) შეინახეთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში დააიგნორეთ.

ა) გამოიყენეთ MATLAB-ის rand ფუნქცია ერთეულოვან წრეში შემთხვევითი წერტილების დასასმელად. დახაზეთ მიღებული წერტილები (n=10,100,1000).

ბ) რა არის ალბათობა, რომ მოხდება გენერირებული წყვილის იგნორირება? გამოიყენეთ 1000 წერტილის გენერირებისას დაიგნორებული წერტილების რაოდენობა π -ს მნიშვნელობის მიახლოებითად გამოსათვლელად.



ინტეგრება მონტე კარლო მეთოდით

- S_0 - საერთო ფართობი;
 N - შემთხვევითი რიცხვი;
 N_I - გრაფიკს ქვევით;

$$Int = S_0 * N_I/N;$$

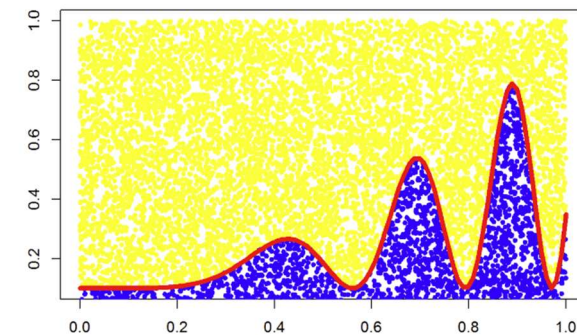
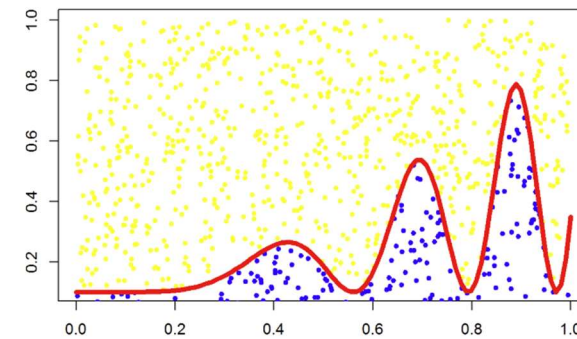
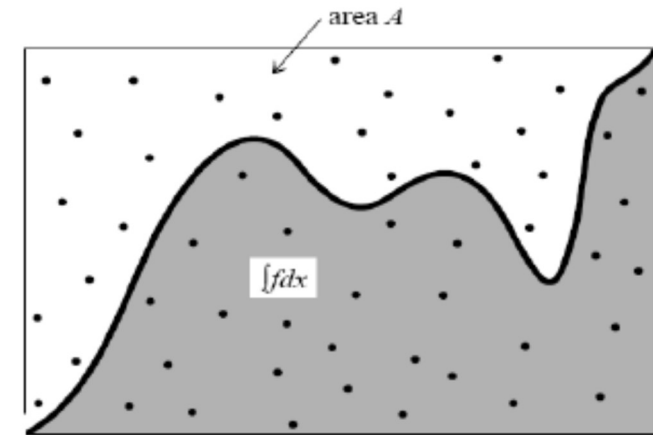
„Hit and miss method“

„გარტყმის ფუნქცია“

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is inside the volume} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

ფართობი (ინტეგრალი):

$$S = S_0 \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$



მაღალი რიგის ინტერგალები

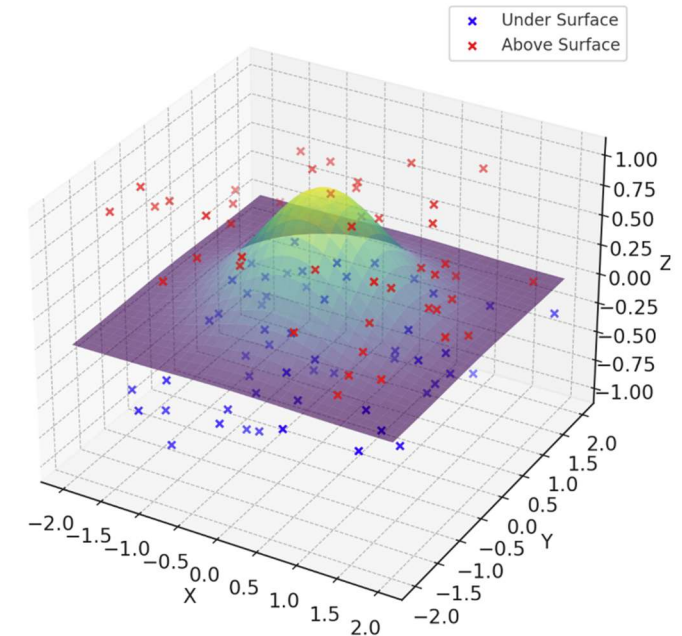
მე-3 რიგის ინტეგრალი: $Int = \iiint f(x, y, z) dx dy dz$

ინტეგრება კვადრატურებით: $Int = \Delta V \sum \sum \sum f(x_i, y_j, z_k)$

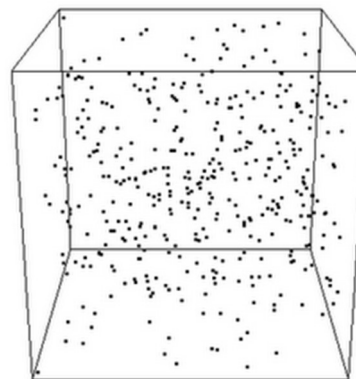
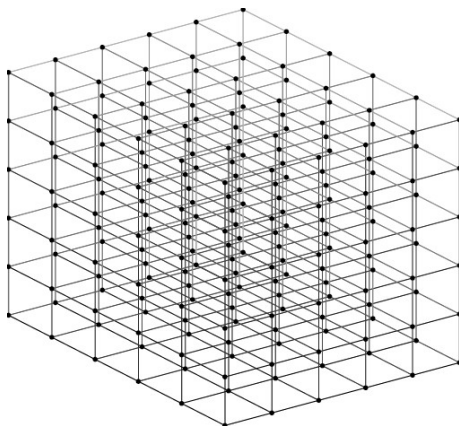
$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

ინტეგრება მონტე კარლო მეთოდით: $Int = \Delta V \sum f(V_i)$

Monte Carlo Sampling with Simple Gaussian Surface



სტრუქტურირებული ბადე (ND-grid) და მონტე კარლო შემთხვევითი (1D) წერტილები



კრებადობა

1 განზომილებიანი ინტეგრალი სიმსონის წესით: $\varepsilon \sim N^{-4}$

d განზომილებიანი ინტეგრალი სიმსონის წესით: $\varepsilon \sim N^{-4/d}$

d განზომილებიანი ინტეგრალი მონტე კარლო ინტეგრებით: $\varepsilon \sim N^{-1/2}$

ფორმალურად მონტეკარლოს გამოყენების უპირატესობა: **$d > 8$**

მაგრამ:

კვადრატურებით ინტეგრება d განზომილებაში: **N^d** ელემენტი/ოპერაცია;

მონტეკარლო ინტეგრება d განზომილებაში: **N** ელემენტი/ოპერაცია;

დავალება 8.2.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy$$

1. გამოთვალეთ ინტეგრალი:

- ა.) გამოთვალეთ ინტეგრალი რამდენჯერმე ერთიდაიგივე რაოდენობის შემთხვევითი რიცხვების გამოყენებით. იპოვეთ გამოთვლილი სიდიდეების საშუალო მნიშვნელობა.
- ბ.) გამოთვალეთ ინტეგრალი შემთხვევითი რიცხვების სხვადასხვა რაოდენობების გამოყენებით ინტერვალში $N=10^4-10^6$. დახაზეთ ინტეგრალის მნიშვნელობის შემთხვევითი რიცხვების რაოდენობაზე დამოკიდებულება.

2. გამოთვალეთ ინტეგრალები 7.1.1-3. შეადარეთ კვადრატურების და მონტე-კარლო ინტეგრების გამოთვლის დროები.

მნიშვნელოვნებით შერჩევა (Importance sampling)

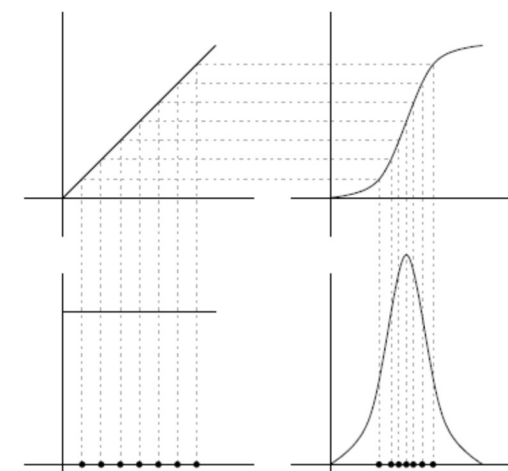
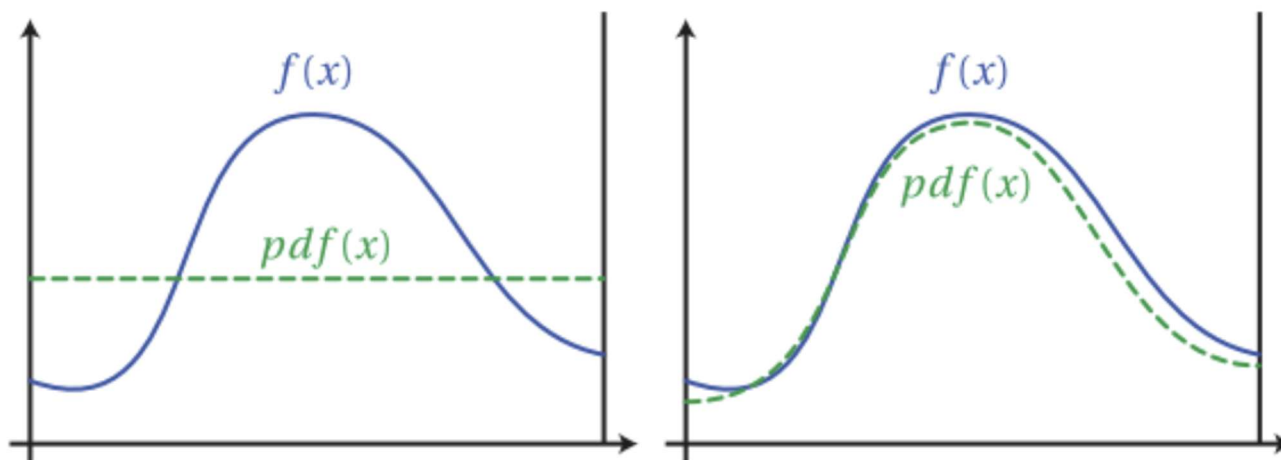
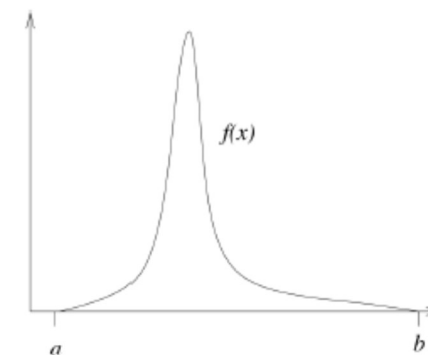
შემთხვევითი რიცხვების განაწილების მეთოდი: sampling;

Simple sampling - თანაბარი განაწილება;

მონტე კარლო მეთოდების ძირითადი პრობლემა:

სწრაფად ცვლადი და არაგლუვი ფუნქციები;

შემთხვევითი რიცხვების განაწილების ფუნქცია $f(x)$:



დამხმარე ნორმირების $g(x)$ ფუნქცია: “მნიშვნელოვნების ფუნქცია“

დადებითი ანალიზური ინტეგრებადი ფუნქციაა რომელსაც გააჩნია შებრუნებული ფორმა.

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dG(x) = \int_0^1 \frac{f(G^{-1}(u))}{g(G^{-1}(u))} du$$

სადაც:

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt$$

ცვლადთა და საზღვრების გარდაქმნა:

$$r = G(x)$$

$$I = \int_{G(a)}^{G(b)} \frac{f(G^{-1}(r))}{g(G^{-1}(r))} dr$$

თუკი $f(r)/g(r)$ უფრო გლუვი ფუნქციაა, ე.ი. მონტე კარლო ინტეგრება გვაძლევს უფრო ზუსტ შედეგს.
ან

იგივე სიზუსტის მისაღებად შესაძლებელია წერტილების რაოდენობის შემცირება: N .

ნორმირების ფუნქციის გამოყენების პირობები:

1. ანალიზურად ინტეგრებადი: $r = G(x)$
2. არსებობს შებრუნებული ფუნქცია: $x = G^{-1}(r)$

მაგალითი:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

ნორმირების ფუნქცია: $\exp(-x)$

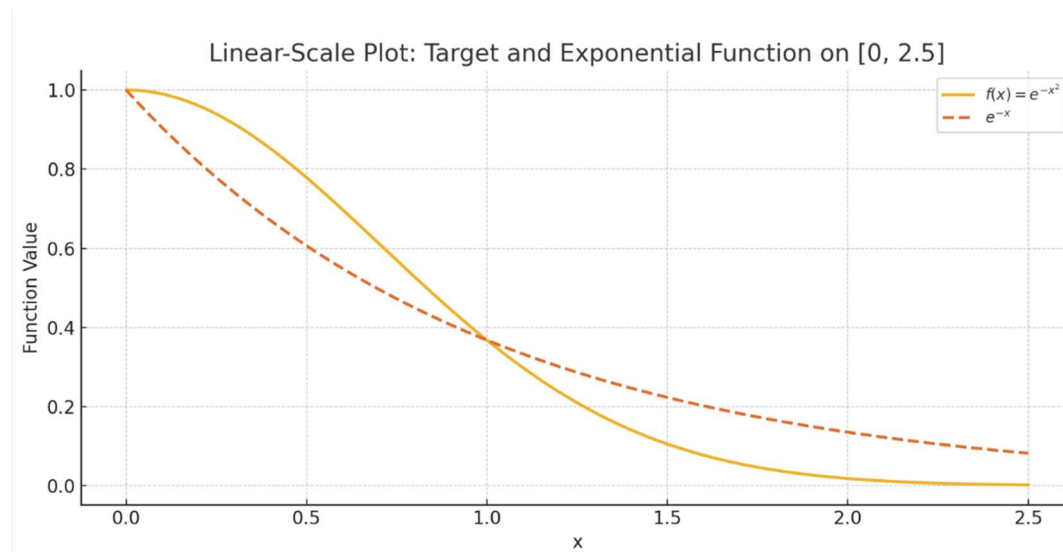
$$\int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} + 1 = \frac{e-1}{e}$$

$$g(x) = \frac{e^{-x} \cdot e}{e - 1}$$

$$G(x) = \int_0^x \frac{e^{-t} \cdot e}{e - 1} dt = \frac{e(1 - e^{-x})}{e - 1}$$

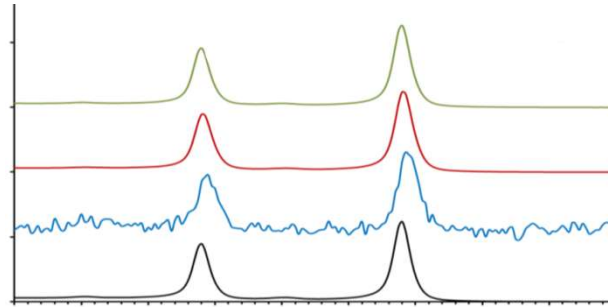
შებრუნებული ფუნქცია:

$$G^{-1}(u) = -\log \left(1 - u \cdot \frac{e - 1}{e} \right)$$



რთული ფუნქციების მნიშვნელოვნების ფუნქციის ანალიზური მოდელირება

ორპიკიანი ფუნქცია



$$g(x) = P_1(x) + P_2(x)$$

დამხმარე ფუნქცია - გაუსის ფუნქციების ჯამი:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

წარმოებული:

$$\int \operatorname{erf}(x) dx = x \cdot \operatorname{erf}(x) + \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} + C$$

შეპრუნებული:

erf(x) , **erfinv(x)**

დავალება 8.3

გამოითვალეთ ინტეგრალი მონტე კარლოს მეთოდით მნიშვნელოვნების ფუნქციის გამოყენებით:

$$I = \int_0^1 e^{-10x^2 \sin(x)} dx$$

შეადარეთ მიღებული პასუხი მნიშვნელობას:

$$I \approx 0.4203737830 \pm 4.95 \times 10^{-9}$$