

სასრული ელემენტის მეთოდი

II რიგის წრფივი დიფ. განტოლება:

$$\hat{L}(U(x)) = g(x)$$

- საწყისი მნიშვნელობის ამოცანა;

$$U(0), d/dx U(0)$$

სასრული სხვაობების მეთოდი: მარშირება საწყისი წერტილიდან (დრო, სივრცე).

მაგალითი: რუნგე-კუტა;

ფილოსოფია: მცირე სხვაობები - ტეილორის მწკრივად გაშლა;

- სასაზღვრო მნიშვნელობის ამოცანა;

საზღვრები: $x=[a,b]$

$U(a), U(b),$ დირიხლეს სასაზღვრო პირობა;

$d/dx U(a), d/dx U(b),$ ნეიმანის სასაზღვრო პირობა;

$d/dx U(a,b) + \alpha U(a,b)$ რობინის სასაზღვრო პირობა;

სხვა „ფიზიკური“ პირობა: მაგ. Outflow, Partially Reflective, ...

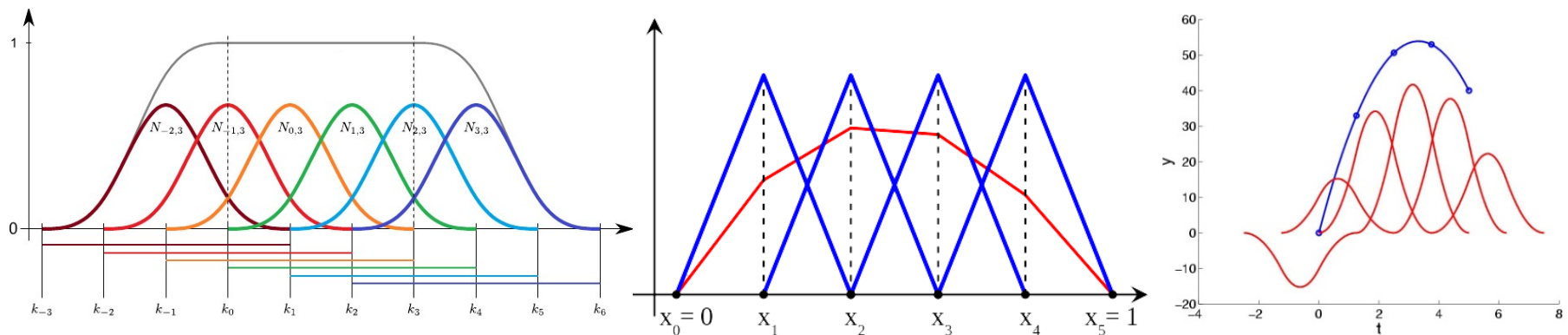
მეთოდი: გავშალოთ ამონახსნი სასრული რაოდენობის „ელემენტებად“

„ელემენტები“ - ფუნქციების სიმრავლე (ფუნქციების ორთოგონალური ბაზისი) რომლებიც უკვე აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს:

$$U(x) \approx u(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x)$$

წონის კოეფიციენტები საბაზისო ფუნქციები

საბაზისო ფუნქციების ფორმის და რაოდენობის არჩევა:



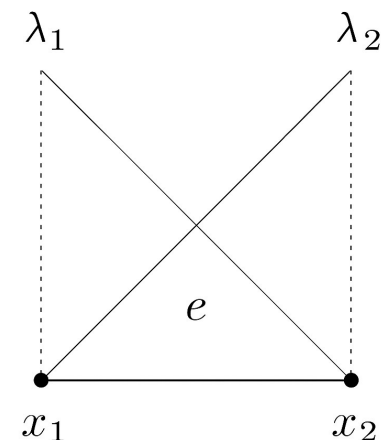
სხვადასხვა რიგის სასრული ელემენტები

ბარიცენტრული ფუნქციები

პირველი რიგის ბაზისი: ორი წრფივი ფუნქცია (ელემენტი)

$$\lambda_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \lambda_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$u(x) = a_1 \lambda_1(x) + a_2 \lambda_2(x)$$



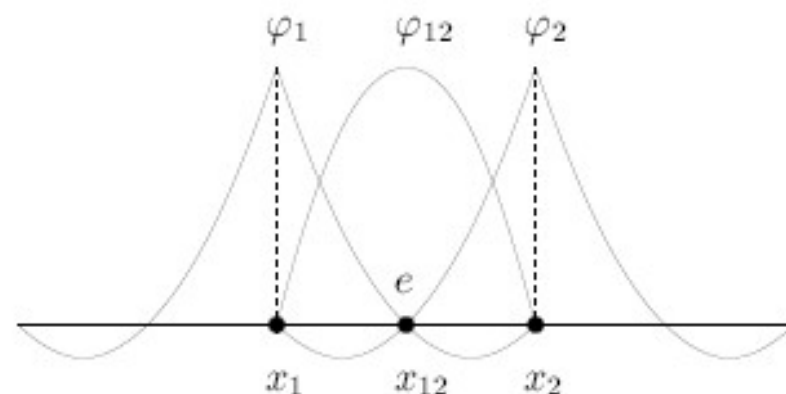
შემდეგი მიახლოება: მეორე რიგის საბაზისო ფუნქციები:

$$\varphi_1(x) = \lambda_1(x)(2\lambda_1(x) - 1)$$

$$\varphi_2(x) = \lambda_2(x)(2\lambda_2(x) - 1)$$

$$\varphi_{12}(x) = 4\lambda_1(x)\lambda_2(x)$$

$$u(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + a_{12} \varphi_{12}(x)$$



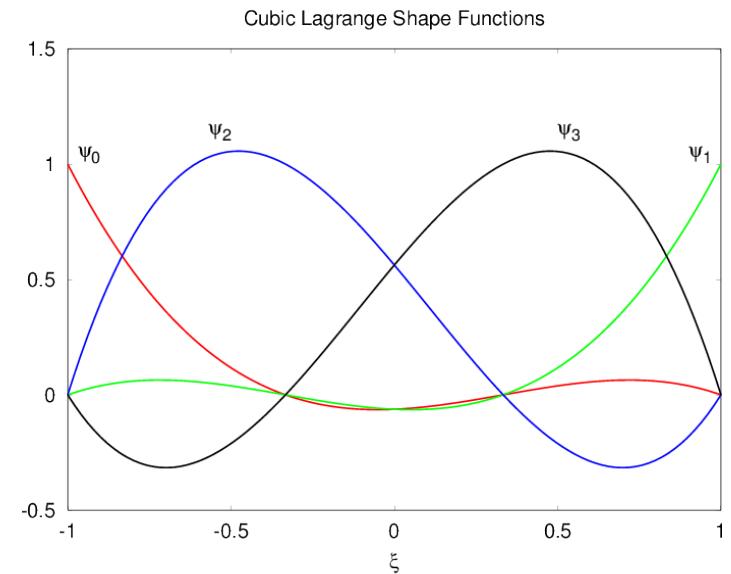
კუბური საბაზისო ფუნქციები:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\lambda_1(x)(3\lambda_1(x) - 2)(3\lambda_1(x) - 1)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}\lambda_2(x)(3\lambda_2(x) - 2)(3\lambda_2(x) - 1)$$

$$\varphi_{12}(x) = \frac{9}{2}\lambda_1(x)\lambda_2(x)(3\lambda_1(x) - 1)$$

$$\varphi_{21}(x) = \frac{9}{2}\lambda_1(x)\lambda_2(x)(3\lambda_2(x) - 1)$$



$$u(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + a_{12} \varphi_{12}(x) + a_{21} \varphi_{21}(x)$$

ამოცანა: როგორ ვიპოვოთ a_1 , a_2 , a_3 წონის კოეფიციენტები?

შეწონილი ნაშთების მეთოდი (Weighted residuals)

ამოსახსნელი დიფ. განტოლება:

$$\hat{L}(U(x)) - g(x) = 0$$

საბაზისო ფუნქციებიდან შედგენილი მიახლოებითი ამონახსნის ჩასმით:

$$\hat{L}\left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x)\right) - g(x) \approx 0$$

ამონახსნის სიზუსტე შეიძლება განვსაზღვროთ ნაშთით:

$$R(x) = \sum_{i=1}^n a_i \hat{L}(\psi_i(x)) - g(x)$$

a მუდმივი წონის კოეფიციენტებია, ხოლო L წრფივი ოპერატორია.

a კოეფიციენტები ვიპოვოთ $R(x)$ ნაშთის მინიმიზაციის პირობით.

კოლოკაციის მეთოდი

ნაშთი $R(x)$ ნულდება გამოთვლითი დომენის შიგნით წინასწარ ადებულ n კოლოკაციის წერტილში:

$$x_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

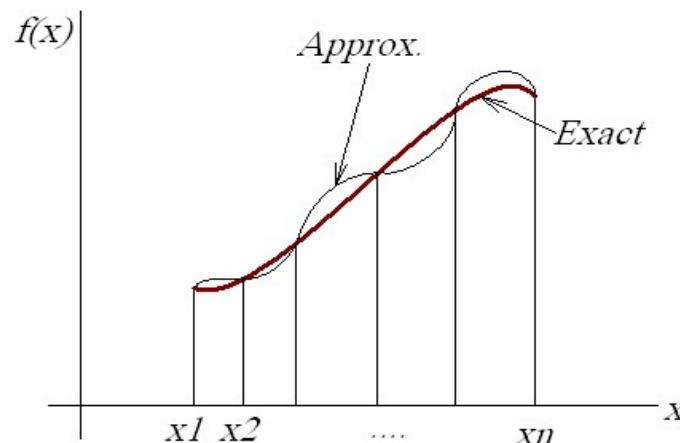
$$R(x_j) = 0$$

ნაშთის ნულობის პირობა კოლოკაციის წერტილებში - n ცალი განტოლება:

$$\sum_{i=1}^n a_i \hat{L}(\psi_i(x_j)) - g(x_j) = 0$$

a კოეფიციენტების მიმართ ალგებრული განტოლებები, თუკი ვიცით საბაზისო ფუნქციების წარმოებულები ანალიზური სახით.

ამოცანა: n რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი ალგებრული სისტემის ამოხსნა.



მაგალითი 1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(x) = 0$$

ამონახსნის გაშლა საბაზისო ფუნქციებად:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x)$$

ნაშთის ფუნქცია:

$$R(x) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} + F(x)$$

კოლოკაციის წერტილებში ნაშთის განულება:

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{d^2 \psi_i(x_j)}{dx^2} + F(x_j) = 0$$

კოეფიციენტების საპოვნელად უნდა ამოვხსნათ შემდეგი სისტემა:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & \dots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \dots & k_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F(x_1) \\ F(x_2) \\ \vdots \\ F(x_n) \end{bmatrix}$$

სადაც:

$$k_{ij} = \frac{d^2 \psi_i(x_j)}{dx^2}$$



ამოვხსნათ წრფივი ალგებრული სისტემა და ვიპოვოთ წონის კოეფიციენტები a .

საწყისი დაშვება: საბაზისო ფუნქციების რაოდენობა ემთხვევა შერჩეული კოლოკაციის წერტილების რაოდენობას n

$$\begin{aligned} i &= 1 \dots n \\ j &= 1 \dots n \end{aligned}$$

შეწონილი ნაშთების მეთოდი:

- + არ გვაინტერესებს $F(x)$ ფუნქციის ანალიზური სახე (!)
- რთული სისტემებისთვის საჭიროა კოლოკაციის წერტილების და საბაზისო ფუნქციების შეთახმებული შერჩევა და დიდი რაოდენობა.

მაგალითი 2:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f = 0$$

სადაც $f = \text{const.}$ და სასაზღვრო პირობა $U(0) = 0$, $U(l) = 1$.

ავირჩიოთ ჰარმონიული საბაზისო ფუნქცია:

$$\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

ჩასმით:

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = -\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

ავარჩიოთ კოლოკაციის ერთი წერტილი. სიმარტივისთვის $x_l = l/2$

$$\left[-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x_1}{2l}\right) \right] \{a_1\} = -\{f\}$$

$$a_1 = \frac{f}{\left(\pi/2l\right)^2 \sin(\pi/4)} \approx 0.57 fl^2$$

განტოლების ამონახსნი:

$$u(x) \approx a_1 \psi(x) = 0.57 fl^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

გალიორკინის მეთოდი

ნაშთის მინიმიზაციისათვის დომენში შეგვიძლია გამოვიყენოთ არა მხოლოდ დისკრეტული კოლოკაციის წერტილები, არამედ უწყვეტი შეწონვის ფუნქცია $W(x)$

$$\int_L W(x)R(x)dx = 0$$

გალიორკინის მეთოდი:

უწყვეტი შეწონვის ფუნქციად ავირჩიოთ საბაზისო ფუნქციები

$$W(x) = \psi_j(x)$$

ჩასმით:

$$\int_L \psi_j(x)R(x)dx = \sum_{i=1}^n a_i \int_L \psi_j(x)\hat{L}(\psi_i(x))dx - \int_L \psi_j(x)g(x)dx = 0$$

$$j = 1, \dots, n$$

ვპოულობთ წონის
კოეფიციენტებს

მაგალითი:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(x) = 0$$

ამონახსნის გაშლა საბაზისო ფუნქციებად:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x)$$

ნაშთის ფუნქცია:

$$R(x) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} + F(x)$$

გალიორკინის ნაშთის მინიმიზაცია:

$$\sum_{i=1}^n a_i \int \psi_j(x) \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} dx = - \int \psi_j(x) F(x) dx$$

ალგებრულ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \dots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \dots & K_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G(x_1) \\ G(x_2) \\ \vdots \\ G(x_n) \end{bmatrix}$$

სადაც:



$$K_{ij} = \int_L \psi_j(x) \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} dx$$

$$G_j = - \int_L \psi_j(x) F(x) dx$$

გამოვითვალთ a კოეფიციენტები;

ალტერნატიული ფორმა:

$$\sum_{i=1}^n a_i \int \psi_j(x) \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} dx = \sum_{i=1}^n \left(\psi_j(x) \frac{d\psi_i(x)}{dx} \Big|_L - a_i \int \frac{d\psi_j(x)}{dx} \frac{d\psi_i(x)}{dx} dx \right)$$

$$\bar{K}_{ij} = \int_L \frac{d\psi_i(x)}{dx} \frac{d\psi_j(x)}{dx} dx$$

$$\bar{G}_j = \int_L \psi_j(x) F(x) dx + \psi_j(x) \frac{dU(x)}{dx} \Big|_L$$

+ არ გვჭირდება საბაზისო ფუნქციის მეორე წარმოებული (მაგ. წრფივი საბაზისო ფუნქციები).

კოლოკაციის მაგალითის გალერკინისეული ამონახსნი: $a_1 \approx 0.52 fl^2$

დავალება 10.1.

იპოვეთ შემდეგი დიფ. განტოლების ამონახსნი გალიორკინის მეთოდის გამოყენებით

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + 1 = 0$$

თუკი ამონახსნის სასაზღვრო პირობებია:

$$\begin{aligned} U(0) &= 0 \\ \frac{dU(1)}{dx} &= 1 \end{aligned}$$

ხოლო საბაზისო ფუნქციებად გამოიყენეთ ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს: x და $x^2/2$.

დავალება 10.2.

ამოხსენით განტოლება სასრული ელემენტის კოლოკაციისა და გალიორკინის მეთოდების გამოყენებით:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha \frac{dw}{dx} = F(x),$$

ინტერვალში $(0-l)$, სასაზღვრო პირობებით:

$$w(0) = w(L) = 0$$

1. $F(x) = f_0$
2. $F(x) = \cos^2(\pi x/8)$

მოცემულია: $\alpha=0.1, L=10, f_0=1$.

შეეცადეთ საწყისი მნიშვნელობის ამოცანის ფორმულირება და სასრული სხვაობებით ამოხსნა. შეადარეთ ამონახსნები ერთმანეთს.